00049876

NOT TO BE ISSUED
OUT OF THE LIBRARY.

BOMBAY BRANCH
OF THE
ROYAL ASIATIC SOCIETY.
TOWN HALL, BOMBAY.

Digitized with financial assistance from
Observer Research Foundation
on 17 May, 2019

NOUVEAUX OUVRAGES

DE MONSIEUR

L'ABBÉ BOSCOVICH

APPARTENANTS PRINCIPALEMENT

A' L'OPTIQUE, ET A' L'ASTRONOMIE

EN CINQ VOLUMES

DÉDIÉS

AU ROI.

TOME QUATRIÈME.

A' BASSAN MDCCLXXXV.

& se vendent

A' VENISE, CHEZ REMONDINI.

Avec Approbation, & Privilége.

ROGERII JOSEPHI
BOSCOVICH

OPERA PERTINENTIA

AD OPTICAM, ET ASTRONOMIAM

Maxima ex parte nova, & omnia hucusque inedita,

IN QUINQUE TOMOS DISTRIBUTA

LUDOVICO XVI.

GALLIARUM REGI POTENTISSIMO DICATA.

TOMUS QUARTUS.

BASSANI MDCCLXXXV.

PROSTANT

VENETIIS APUD REMONDINI.

Superiorum Permissu, ac Privilegio.

O
520
Rog/Bos
49876
00049876

INDEX

OPUSCULORUM, PARAGRAPHORUM, &c.

Quæ in hoc quarto Tomo continentur.

OPUSCULUM I.

De verificatione diviſionum quadrantis muralis. Pag. 1

OPUSC. II. *De examine plani quadrantis.* 16

OPUSC. III. *De erroribus collocationis quadrantis muralis deprehendendis, & corrigendis.* 39

OPUSC. IV. *De verificatione puncti poſtremi quadrantis muralis, quod indicat poſitionem horizontalem.* 58

OPUSC. V. *De ſuſpenſione teleſcopii quadrantis muralis ope curvæ æquilibrii.* 68

OPUSC. VI. *De collocatione, & verificatione ingentis quadrantis verticalis mobilis circa axem verticalem cum alidada, quæ in ingenti circulo horizontali notet azimutha.* 87

OPUSC. VII. *De determinandis, & corrigendis erroribus axium in quadrantibus, & ſextantibus.* 118

OPUSC. VIII. *De verificatione diviſionum ſextantis.* 136

OPUSC. IX. *Problema pertinens ad excentricitatem in circulo verticali, circa cujus axem horizontalem convertatur teleſcopium meridianum.* 149

APPENDIX AD OPUSC. IX. *Applicatio ſolutionis analyticæ problematis propoſiti numero 5 ad alium Aſtronomiæ uſum.* 161

OPUSC. X. *De quadam correctiuncula ſectorum aſtronomicorum.* 166

OPUSC. XI. *De rectificatione teleſcopii Meridiani Gallice Inſtrument des paſſages.* 184

OPUSC. XII. *De erroribus lineæ meridianæ ita deprehendendis, ut obſervationes per eam inſtitutæ corrigi poſſint.* 222

OPU-

OPUSC. XIII. *De determinanda linea meridiana una cum linea æquinoctiali, altitudine poli, & declinatione solis per tria extrema puncta umbræ gnomonis notata in plano horizontali, vel verticali. Accedunt, quæ pertinent ad horologium solare.* 238

OPUSC. XIV. *De verificatione Machinæ Parallaticæ.* 284

Præfatio. ibid.

§. I. *Brevis notio machinæ, & scopus hujusce Opusculi.* 285

§. II. *De positione axis primi determinanda, supposita satis accurata divisione circuli ascensionis rectæ.* 287

§. III. *Determinatio ejusdem sine usu ejus divisionis per simplicem Trigonometriam sphæricam.* 289

§. IV. *Determinatio eadem ex iisdem datis per formulas trigonometricas differentiales.* 290

§. V. *Determinatio eadem simplicior.* 293

§. VI. *Exemplum cum observationibus pro postrema methodo.* 296

§. VII. *Determinatio erroris in positione reliquorum binorum axium.* 298

§. VIII. *De usu machinæ parallaticæ portatilis.* 305

§. IX. *Usus aliarum formularum differentialium Trigonometriæ in hisce perquisitionibus.* 309

OPUSC. XV. De formulis differentialibus Trigonometriæ. 315

Des formules différentielles de Trigonométrie. 316

§. I. *Idée générale de l'objet de cet Opuscule.* ibid.

§. II. *Extrait de ce, qui intéresse la pratique.* 321

§. III. *Procédé pour avoir les deux premières des quatre équations générales du num. 15.* 323

§. IV. *Procédé pour les deux dernières.* 325

§. V. *Notices nécessaires pour trouver les deux premières équations par l'autre méthode.* 327

§. VI. *Première équation trouvée par la seconde méthode.* 328

§. VII. *Seconde équation trouvée par la seconde méthode.* 329

§. VIII. *Application des équations trouvées à la Trigonométrie plane.* 331

§. IX. *Danger dans certains cas.* 333

§. X. *Équations pour le rapport des petits compléments.* 338

§. XI. *Des triangles qui ont un seul angle très-petit & chacun des deux autres assez éloigné de 180 degrés.* 340

§. XII.

§. XII. *Des triangles, qui ont deux angles très-petits, ou des angles approchans de 180°.* 352
§. XIII. *Résumé des propriétés trouvées dans les deux derniers paragraphes, & leur application aux triangles plans.* 356
§. XIV. *Manière de transformer les quatre premières équations générales, & d' en tirer des autres.* 362
§. XV. *Méthode pour appliquer les quatre équations générales à toute la grande multitude des combinaisons particulières.* 365
§. XVI. *Développement des cas de deux termes constants.* 367
§. XVII. *Des cas d' un terme constant.* 371
§. XVIII. *Application des équations générales à la détermination de la vitesse de la montée d' un astre sur l' horizon, & de sa descente.* 376
§. XIX. *Application des mêmes équations à la correction du midi trouvé par les hauteurs correspondantes.* 378
§. XX. *Application des mêmes équations à la détermination du plus court crépuscule.* 384
§. XXI. *Application des mêmes équations à la détermination du plus grand éclat de Vénus.* 388
§. XXII. *D' autres applications de quatre équations générales du num. 15, & 17, & des deux du num. 19.* 392
OPUSC. XVI. *De Rhombo micrometrico pro corrigendo effectu ejus positionis obliquæ.* 395
§. I. *Correctionis Theoria.* ibid.
§. II. *Regulæ & exempla.* 408
EXEMPL. I. *Utroque astro percurrente eundem semirhombum.* 410
EXEMPL. II. *Pro binis astris percurrentibus semirhombos oppositos.* 414
§. III. *De casibus, in quibus viæ astrorum secent utramque rhombi diametrum, vel solam minorem.* 416
OPUSC. XVII. *De errore inducto a refractione in usu Horologii solaris annularis universalis methodo posteriore simpliciore.* 420
§. I. *Proponitur descriptio, & usus ejus instrumenti.* 421
§. II. *Determinantur errores orti e refractione.* 423
§. III. *Proponuntur methodi, & formulæ inventæ cum aliquot exemplis.* 435
§. IV. *De alia constructione ejus instrumenti per tres circulos.* 442
OPUSC. XVIII. *De eodem argumento præcedentis Opusculi methodo complicatiore, quæ prima in mentem venerat.* 444

§. I.

§. I. *Compendium eorum, quæ dicta ſunt in Opuſculo primo, & habent nexum cum iis, quæ ſunt hic proponenda.* ibid.
§. II. *Determinatur effectus refractionis calculo exacto per Trigonometriam finitam.* 446
§. III. *Determinantur eadem per theoriam differentialem Trigonometriæ.* 449
§. IV. *Proponuntur conſiderationes prioris methodi ad ſolutionem adhibitæ.* 453
§. V. *Proponuntur conſiderationes ſecundæ methodi paragraphi III.* 465
SCHOLIUM GENERALE. 471

E X T R A I T

Du Tome IV. 475

§. I. *Des deux premiers Opuſcules.* ibid.
§. II. *Des Opuſcules III, & IV.* 480
§. III. *Des Opuſcules V, & VI.* 484
§. IV. *Des Opuſcules VII, & VIII.* 490
§. V. *Des Opuſcules IX, & X.* 494
§. VI. *Des Opuſcules XI, & XII.* 498
§. VII. *Des Opuſcules XIII, & XIV.* 501
§. VIII. *De l' Opuſcule XV.* 507
§. IX. *Des derniers trois Opuſcules de ce Volume.* 512

OPUSCULUM I.

De verificatione divisionum quadrantis muralis.

1. HOC Opusculum conscriptum est occasione examinis divisionum quadrantis muralis collocati in astronomica specula Mediolanensi Collegii Braydensis habentis radium sex pedum. Methodus omnium tutissima est illa, quæ adhibet mensuram actualem accuratissimam distantiæ cujuspiam horizontalis satis longæ, ad cujus caput alterum collocatur centrum quadrantis ipsius, circa quod convertitur alidada ferens telescopium, & ex altero extremo puncto ejusdem distantiæ ducitur filo tenui satis longo recta linea itidem horizontalis, quæ cum ipsa illa distantia contineat angulum accuratissime rectum: secus hoc filum promovetur regula habens divisiones notas in partibus, in quibus innotescit mensura distantiæ illius ejusdem. Hujus regulæ distantia ab ipso illo angulo recto cum partibus in ea notatis, ad quas dirigitur telescopium, & longitudo primæ distantiæ illius a centro quadrantis collocato in ejus initio, quæ longitudo gerit vices radii, exhibet tangentes angulorum, quos continet prima ipsa distantia cum hujus axe: eosdem angulos determinat ipsa alidada in limbo quadrantis, & ipsorum valor habetur ex tangentibus. Hac methodo possunt per ejusmodi actualem mensuram haberi valores arcuum limbi etiam usque ad 45 gradus, vel saltem usque ad 30, quorum differentia ab iis, quos exhibent divisiones limbi, ostendit errores corrigendos in observationibus instituendis quadrante eodem. Habitis autem erroribus priorum 45, vel 30 graduum, haberi possunt errores sequentium 45, vel 30, con-

verso horizontaliter quadrante ipso ita, ut, alidadâ notante finem arcus verificati, axis telescopii habeat positionem ejusdem illius primæ distantiæ : tum enim eodem pacto verificantur valores secundi semiquadrantis, vel secundi trientis, post quem eodem pacto verificatur tertius triens. Hæc methodus est omnium tutissima, sed admodum difficulter reducitur ad praxim, & si quadrans sit ingens, ut sunt quadrantes murales, vix ulla spes haberi potest rem eo pacto bene gerendi.

2. Methodus multo facilior est illa altera, quæ confert radium quadrantis cum chordis, quæ nimirum sunt distantiæ primi puncti a singulis punctis divisionum : sed ad eam rem præter virgam habentem binas cuspides ipsi perpendiculares, alteram fixam, alteram mobilem, cujus ope distantia centri a primo puncto divisionum, ac distantia ipsius a singulis punctis harum transfertur in regulam habentem divisiones ipsi insculptas : sed ad adhibendam eam methodum oportet habere ejusmodi regulam, de cujus accurata divisione jam constet, qua caret Astronomus quadrantem coemptum collocaturus in sua specula. Proponam hic methodum, quam tum adhibui, quæ adhiberi potest in ipsa aula speculæ per instrumenta, quæ vel aliunde in speculis haberi solent, vel facile parari possunt ab artificibus etiam communibus.

3. In hac methodo obtinentur errores omnes per solam mensuram differentiæ earum magnitudinum, quæ deberent esse æquales, quæ differentiæ cum sint exiguæ, multo facilius accuratissime deprehendi possunt. Primo quidem obtinetur error arcus graduum 60 per comparationem chordæ ipsius cum primo radio : tum quæritur differentia, quam habet chorda primi ejus dimidii graduum 30 a chorda secundi, & a chorda reliqui arcus 30 graduum, qui habetur a gradu sexagesimo usque ad finem ; singulorum ejusmodi arcuum dimidia, quæ deberent esse graduum 15, deberent esse æqualia inter se : eorum chordæ comparantur invicem ad habendam differentiam ipsorum arcuum per methodum exponendam : deinde comparantur inter se chordæ quinorum graduum, qui sunt trientes præcedentium, tum chordæ graduum singulorum, & ex differentiis chordarum deducuntur in singulis ejusmodi operationibus dif-

feren-

ferentiæ arcuum, ac ex differentiis horum errores singulorum methodo, quam jam exponam: tum demum obtinetur error arcus totius computati ab initio divisionum usque ad quemvis numerum graduum.

4. Sed prius indicabo methodum, qua in ipsas ejusmodi differentias inquisivi: id autem præstiti duplici modo: Paravi regulam ferream aliquanto longiorem pedibus sex: ipsi ad angulos rectos curavi afferruminandam alteram: huic adnectebantur binæ machinulæ ita, ut collocato quadrante in positione horizontali, & impositâ ipsi priore regulâ, posterioris faciebus latitudinalibus verticaliter erectis, plana inferiora ipsarum machinularum extantium ad latus accederent ad faciem limbi, & lamella vitrea affixa basi utriusque machinulæ, cuique sua, habens insculptam lineolam rectam perpendicularem longitudini regularum, applicaretur accurate plano ejusdem faciei limbi. Poterant autem ope cochleæ prementis applicari parti cujuis longitudinis regulæ verticalis, & ea pars alterius machinulæ, cui affigebatur lamella vitrea, poterat promoveri antrorsum, retrorsum ope cochleæ motu eodem, qui adhibetur in micrometris, cujus generis unum, quod jam habebatur in specula, aptatum est ad eum usum, binis indicibus denotantibus quantitatem motus, altero per numerum revolutionum, altero per partes unius revolutionis.

5. Applicatâ hoc pacto primâ regulâ horizontali, & adductâ priore machinulâ ad alteram e divisionibus limbi terminantibus eum arcum, poterat facile adduci altera ad locum, in quo lineola suæ lamellæ vitreæ remaneret prope divisionem extremam alteram ejusdem arcus, ut ope micrometri adduceretur ad accuratam congruentiam cum ipsa, quo pacto obtinebatur distantia inter lineolas binarum lamellarum vitrearum pertinentium ad binas machinulas accurate æqualis chordæ arcus ipsius. Translatâ regulâ duplici ad alterum e binis arcubus comparandis, & ita applicatâ, ut ea lineola lamellæ vitreæ, quæ non erat mobilis, accurate congrueret cum prima e binis divisionibus terminantibus arcum ipsum, notabatur distantia lineolæ insculptæ in altera lamella mobili a secunda ex iis divisionibus: ea distantia erat differentia binarum

chordarum quæſita, quæ obtinebatur, promotâ lineolâ mobili usque ad congruentiam cum diviſione ipſa.

6. Porro valor particularum micrometri facile obtinebatur. Promotâ laminâ vitreâ mobili ita, ut ejus lineola percurreret unam ex exiguis partibus arcus circularis, ad quam diviſiones terminabantur, ut arcum minutorum decem, habebatur numerus converſionum integrarum, & partium unius converſionis, adeoque numerus earum partium reſpondentium illi arcui: hinc eruebatur ſcala, quæ exhiberet numerum ſecundorum, & ejus partium decimarum, qui reſpondebat dato cuivis numero partium ipſius micrometri. Nec error diviſionum quadrantis oberat ei determinationi, ubi agebatur de differentia inter chordas, quæ erat utique perquam exigua: nam is error reſpectu ejus intervalli minutorum 10 in quadrante, ſi minus accuratiſſime, non omnino oſcitanter, diviſo debebat eſſe ſatis exiguus, adeoque applicatus ad differentiam chordarum tanto minorem debebat evadere prorſus inſenſibilis. Accedit, quod ad eam rem adhiberi poterant multi ex arcubus minutorum 10, quorum alii ſi eſſent tantillo majores juſto, alii debebant eſſe minores, & aſſumendo medium inter determinationes exhibitas a multis, evitabatur omne periculum erroris in eruendo valore earum partium micrometri.

7. In inſtrumentis habentibus puncta pro diviſionibus res multo tutius accurate perficitur: nam lineola paullo tenuior puncto ipſo, quod ope microſcopii apparet quidam circellus non ita exiguus, facile adducitur ad poſitionem, in qua extent bina ſegmenta ejus circelli hinc, & inde a linea vitrea ad ſenſum æqualia: minimus ejus motus æquivalens uni decimæ parti unius ſecundi inducit in longitudinem chordarum, quæ ſunt eorum ſegmentorum baſes, inæqualitatem, quæ ope microſcopii ipſius evidentiſſime perſpicitur. In eo quadrante diviſiones habebantur per lineolas tranſverſales non obliquas, ſed, ut moris eſt, perpendiculares arcui circuli. Ibi obtinetur exiguum quadratum habens tria latera, quorum unum eſt limbus exterior ſulci illius, qui efformatur in delineando arcu eodem, & alia bina ſunt limbi ſulci lineolæ perpendicularis efformantis diviſionem, qui procurrit

currit usque ad limbum illum exteriorem sulci arcus circularis. Satis bene tum etiam adducebatur lineola vitri mobilis ad centrum ejus quadrati aucti per microscopium. Sed præferendæ omnino essent divisiones per puncta, quamvis, ubi nonii adhibentur pro mensuris, fieri soleant ipsæ divisiones per lineolas perpendiculares arcui circuli, & nonii.

8. Debuisset hoc instrumento comparari primus radius cum chorda arcus graduum 60 intercepti ab initio divisionum usque ad 60, sed cum id initium esset minus *nitidum*, facta est potius prima compar*atio* arcus a 30 ad 90: sed ad eam rem oportebat habere accuratam positionem centri ad hoc, ut posset collocari accurate supra ipsum *lineola lamellæ immobilis*. Id centrum tegitur ab alidada ferente telescopium: sed in centro *ipso* habebatur lamina metallica cum foramine cylindrico, cui immittebatur cylindrus solidus perpendicularis plano ejusdem alidadæ ipsi affixus: *hujus conversione* intra id foramen circumferebatur telescopium per *totum* quadrantem. Sublata alidada cum telescopio, immissus est in id foramen *alter cylindrus* solidus habens superficiem circularem *in eodem plano cum lamina perforata*, & in centro *ejus superficiei punctum tenue*: hic cylindrus *moveri poterat circa* proprium axem: applicatum est superficiei ipsius *laminæ perforatæ* filum tenue, in directione radii tendentis ab eo centro ad divisionem notantem finem quadrantis, nimirum gradus 90, transiens per id punctum notatum in superficie ejus cylindri pro centro. Hoc gyrante, id punctum debuisset remanere immotum respectu ejus fili: verum detectus est ejus motus sane exiguus, sed admodum sensibilis ope microscopii. Notata est positio maximæ elongationis ejus puncti ab eo filo: in ea positione collocatus est is cylindrus. Facile patet, distantiam puncti notati pro centro a circulo limbi continente divisiones esse in ea positione æqualem illi, quam centrum ipsum conversionis alidadæ habebat ab eodem circulo, quæ distantia est ipse postremus radius ejusdem circuli.

9. *Cylindro ita disposito*, applicata est regula illa hujus instrumenti ad laminam centri, & ad limbum prope finem quadrantis, & ita promota, ut lineola lamellæ vitreæ immobilis transiret

per

per medium puncti notati pro centro : lineola autem lamellæ mobilis adducta est ope micrometri ad circulum limbi ita, ut sulcum ipsius secaret bifariam . Tum eâdem regulâ adductâ ad positionem chordæ graduum 60 , a 30 ad 90 , ac repetitâ pluribus vicibus eâdem operatione , inventum est discrimen secundorum jam 4, jam $3\frac{1}{2}$, sed multo sæpius 4, chordâ ejus arcus deficiente a longitudine ejus radii .

10. Quantitas absoluta erroris ejus arcus eruitur e sequenti theoremate , quod pertinet ad elementa exiguarum differentiarum, demonstratur autem admodum facile : *Differentia chordæ ad differentiam exiguam arcus circularis est , ut cosinus dimidii arcus ipsius ad radium* , quæ est eadem ac ratio radii ad secantem ejusdem arcus . Porro secans arcus graduum 60 est = 1,155 . Quare error arcus illius postremi intercepti inter 30 , & 60 erat $- 4'' \times 1,155 = - 4'',62$.

11. Habito hoc errore , quæsita est ope instrumenti ejusdem modo exposito differentia chordarum trium arcuum graduum 30, deinde arcuum trium pro iis singulis continentium gradus 10 , & pro horum singulis binorum continentium gradus 5 . Tum ego quidem non sum progressus ultra gradus quinos , relictâ successoribus curâ perficiendi verificationem ipsam : hic pergam proponere continuationem methodi adhibendæ . Comparatio singulorum graduum haberi poterat facilius per solam machinulam habentem lamellam mobilem promovendo ejus lineolam ope earundem revolutionum micrometri per singulos gradus . Sed & singulorum graduum errores , & subdivisionum earundem multo facilius , ac etiam tutius haberi poterant ope telescopii mobilis cum alidada , directo ipso in objectum terrestre ita remotum , ut ibidem collocari posset regula ejus longitudinis , quæ subtenderet angulum paullo majorem uno gradu , divisa in partes æquales : eâ ibi positâ in directione determinata (omnium aptissima est illa , quæ sit ad sensum perpendicularis rectæ tendenti ab ipsa ad centrum quadrantis) facile ope distantiæ bene determinatæ , ac positionis , & divisionum ipsius regulæ , deprehenditur , quot partes respondeant uni ejus gradui , ac ejus partibus continentibus numerum minuto-

rum

rum quemvis exhibitum a subdivisionibus limbi. Motus *alidadæ* per limbum ipsum cum motu axis telescopii per subdivisiones regulæ exhibebit valorem subdivisionis cujuscumque ejus partis limbi. Potest autem ita collocari quadrans, ut initio operationis axis telescopii directi in initium regulæ respondeat initio gradus cujuscumque.

12. *Verum* ipsa etiam comparatio majorum arcuum, quam obtinueram ope prioris methodi expositæ, poterat obtineri ope ipsius telescopii, & *alterius* generis *micrometri* externi applicati ad ipsius *alidadam*, quod & *præstiti* usque ad gradus quinos: en paucis eandem *methodum*. Paravi instrumentum, quod affigi posset ipsi alidadæ, & *telescopio*, continebat *autem tam hinc* quam inde a medio ipsis affixas binas fasciolas circulares ejusdem curvaturæ cum limbo connexas inter se in fine, & habentes intervallum liberum vacuum ab illo medio usque ad illum nexum finalem *per* totam longitudinem, quo pacto obtinebatur utrinque species *quædam limbi* perforati mobilis connexi cum ipsa alidada, & excurrentis supra plan*um limbi quadrantis* habentis divisiones suas in illo medio *relicto vacuo inter ipsas fascias*, *quæ per earum* intervallum *transpiciebantur*. *Hæc* erant *duo quædam veluti brachia* excurrentia hinc, & inde ab *illo* medio affixo alidadæ, & *telescopio*. Pro comparandis inter se arcubus longioribus, ut graduum 30, applicabantur inferne fasciolis singulorum *brachiorum* singulæ lamellæ vitreæ habentes lineolam insculptam in directione ad sensum perpendiculari ad ductum fasciolarum ipsarum, & limbi quadrantis ita, ut plana inferiora lamellarum vitrearum congruerent accurate cum plano limbi ipsius, quod facile præstatur affigendo eas ope ceræ, ut premendo adducerentur ad eam congruentiam planorum, & impellendo in latus ad eam positionem, in qua intervallum ejusmodi lamellarum vitrearum pertinentium ad bina brachia interciperet arcum, quem quis vellet, congruentibus ipsis lineolis vitreis ad sensum cum divisionibus limbi terminantibus ipsum arcum.

13. Iis ita dispositis, ut interciperent postremum arcum graduum *60*, adducebatur alidada per cochleam externam, quæ promo-

movendo ipsam efformabat quandam speciem micrometri externi, ad eam positionem, in qua lineola primæ lamellæ vitreæ congrueret cum primo termino ejus arcus accuratissime, teste microscopio. Secunda lineola poterat adduci ope lateralis impulsionis, cera cedente impulsui levi, ad secundum limitem ita, ut accurate cum eo congrueret, teste itidem microscopio: sed satis erat ipsam collocasse ad sensum in distantia illa debita a lineola prioris lamellæ vitreæ: tum enim, si lineola secunda non congruebat accurate cum altera divisione, quod nunquam accidit casu fortuito, promovebatur alidada per micrometrum externum usque ad eam congruentiam, notando numerum partium micrometri ipsius, qui exhibebat differentiam ejus arcus, ab eo, qui haberet eandem distantiam earum lineolarum pro chorda. Applicatâ eodem modo regulâ compositâ ad alterum arcum comparandum cum illo priore, obtinebatur ejus differentia ab illo alio eodem, qui haberet eam distantiam pro chorda, unde profluebat differentia arcus secundi a primo. Pro comparatione partium arcus minoris inter se affigebatur utraque lamella vitrea eidem brachio. Ita obtinebantur comparationes mutuæ inter se arcuum omnium tam majorum ope utriusque brachii, quam minorum ope alterius solius, qui deberent esse æquales inter se.

14. Porro circumducto telescopio per totum quadrantem, limbus alidadæ semper accurate congruens cum circulo habente divisiones ostendit, totum arcum esse accuratissime circularem, quod semper accidit, ubi ipsius circuli arcus designatur in superficie limbi per tenuem cuspidem connexam cum alidada, cujus cuspidis distantia a centro conversionis remanet semper eadem. Ubi divisiones fiunt per puncta insculpta in ipso limbo, fieri utique potest, ut centra foraminulorum, quæ sine microscopio apparent ut puncta, trans microscopium ut circelli, non cadant penitus in eandem distantiam a centro motus, circa quod ducitur prius tenuissimus arcus circularis, ut puncta notentur in ipso profundiora, deleto deinde eo circulo, ut puncta ipsa visa per microscopium appareant circelli accurati: admodum difficile est id efficere, ut puncta notata ope cuspidis percussæ accurate cadant in medium,

utut

utut tenuem, sulcum illius arcus circularis. Tum oportet inquirere in ipsam differentiam radiorum terminatorum ad ea puncta: ea differentia semper admodum exigua induxit exiguum errorem in angulum, quem metitur arcus interceptus inter ipsa, & definitus per eorum distantias habitas pro chordis: sed is error est multo minor, etiam ubi agitur de magnis arcubus: in exiguis est prorsus insensibilis, adeoque in his omnino negligendus: sed de eo errore occurret sermo in alio Opusculo. Interea tota vis harum methodorum sita est in eo, ut res perficiatur per mensuras accuratas non ingentium intervallorum, sed exiguarum differentiarum, quæ iis methodis obtineri possunt sine ullo errore sensibili, & facile adhibentur in usu per formulas simplicissimas differentiales.

15. Habitis differentiis chordarum, obtinentur differentiæ arcuum, & ex his derivantur errores absoluti arcuum singulorum, tum ex horum summis errores singulorum arcuum incipientium a zero usque ad quemvis numerum expressum in limbo quadrantis. In primis ex differentia binarum chordarum pertinentium ad binos arcus, qui deberent esse æquales, & non sunt, eruitur differentia arcuum per illud idem theorema enunciatum numero 10; multiplicando nimirum exiguam illam differentiam chordarum per secantem dimidii arcus, quod fit admodum facile: nam arcus, cujus secans assumi debet pro solo arcu illo primo = 60, erit graduum 30, cujus secans 1,155 addit radio unam partem decimam cum 55 millesimis: in comparatione binorum arcuum habentium gradus 30, secans ejus dimidii = 15° est = 1,035: quare ibi satis erit multiplicare exiguam differentiam chordarum per illum excessum 1,035, & addere productum illi ipsi differentiæ, ubi etiam negligi potest nota 5 partium millesimarum. Ubi comparantur bini arcus = 20, qui sunt trientes arcus illius maximi, cujus error inventus est per ipsius comparationem cum radio, debebit assumi secans graduum 10 = 1,015, & ea relinquit pro multiplicatore solam fractionem 0,015 ita exiguam, ut itidem omnino contemni possit. Maximus ex reliquis, qui possint occurrere, est 7°. 30′ in comparatione binorum 15, qui sunt dimidia arcuum continentium gradus 30, & ejus secans non addit nisi 0,0086,

quod exhibet augmentum exiguæ differentiæ arcuum omnino negligendum, & multo magis negligendi ſunt exceſſus ſecantis ſupra radium pertinentes ad omnes arcus, quorum uſus poſſit occurrere, qui ſunt multo minores.

16. Solus primus arcus graduum 60 habet pro errore ſuo abſoluto differentiam ſuæ chordæ a radio auctam producto ex ipſius multiplicatione per 0,155. Pro binis e reliquis inter ſe comparandis habebuntur ſequentes regulæ: differentia chordarum multiplicanda eſt pro arcubus graduum 30 per 0,035, pro 20° per 0,015, pro 15° per 0,009: & productum addendum eidem differentiæ multiplicatæ: pro inferioribus aſſumatur ipſa differentia chordarum pro differentia arcuum.

17. Ubi agetur de inveniendo errore arcus cujuſvis, is componetur e binis, quorum alterum appello derivatum, alterum proprium. Hic poſterior pertinebit ſemper ad aliquam ſubdiviſionem arcus cujuſpiam, cujus partes comparantur inter ſe, & *quarum* ſumma eſt is arcus ipſe. Si eæ partes eſſent æquales inter ſe, ſed erroneus arcus, *cujus ipſæ ſunt partes*, error ipſius diviſus per numerum *partium eſſet ipſarum error*, *quem voco derivatum*, quia provenit non ab erronea diviſione, ſed a *vitio illius totius*, cujus eæ *ſunt* partes, & is error derivatus ſingularum eſt error ille ipſe ejus totius diviſus per numerum partium. Sed ſi partes ipſæ ob erroneam ſubdiviſionem ſint inæquales, differentia ſingularum earum partium ab eo valore, quem haberent, ſi omnes eſſent æquales inter ſe, eſt error is, quem appello proprium: error autem ejuſdem arcus abſolutus erit ſumma binorum, derivati, & proprii: is nimirum erit differentia ejus arcus ab eo, qui haberetur, ſi primus ille arcus graduum 60 fuiſſet ſine errore, & nullus acceſſiſſet error in ulla ex diviſionibus, & ſubdiviſionibus.

18. Vidimus, errorem derivatum haberi, diviſo errore abſoluto totius per numerum partium: pro errore proprio habebitur hujuſmodi regula. Aſſumatur exceſſus primæ e partibus ſupra ſecundam, qui dicatur *a*, ſupra tertiam *b*, ſupra quartam *c*, & ita porro, ſi fuerint plures, ut erunt quinque, ubi arcus gra-

duum

duum quinque subdividitur in gradus singulos : *habebuntur ibi* excessus quatuor a, b, c, d. Voco excessum, qui erit *talis* reipsa, si prima pars inventa fuerit major sequentibus omnibus : sed si ea fuerit minor aliquâ ex ipsis, habebitur defectus pro excessu, & tunc valor ipsi respondens erit negativus, ac differentiæ inventæ præmittendum erit signum negativum, præmisso positivo iis differentiis, quæ habebuntur per verum excessum partis primæ supra illam e sequentibus. Assumptis hoc pacto valoribus omnibus a, b, c, &c., eorum summa divisa per numerum partium erit error proprius primæ partis. Ab eo errore subtrahantur singuli valores a, b, c &c., & habebitur error partis secundæ, tertiæ &c. signum relictum post eam subtractionem, habitâ ratione signorum, quæ pertinent ad valores singulos, ostendet, illam partem esse majorem, vel minorem eâ, quæ obtineretur per divisionem æqualem arcus, cujus eæ sunt partes, adeoque ejus errorem proprium esse positivum, vel negativum.

Quod pertinet ad errorem partis primæ, sic facile demonstratur. Ejus valor dicatur m, error ipsius e: erit valor partis secundæ $m - a$, valor tertiæ $m - b$, quartæ $m - c$, &c.: adeoque si earum partium numerus sit n, summa omnium erit $= mn - a - b - c$, &c. Hæc summa erit æqualis arcui totali, adeoque si pars proveniens e divisione æquali dicatur r, erit $r = m - \frac{a + b + c, \&c.}{n}$, & $m - r = \frac{a + b + c, \&c.}{n}$, qui erit error e proprius partis primæ positivus, vel negativus, prout summa valorum omnium a, b, c &c. fuerit positiva, vel negativa; unde patet regula tradita pro errore partis primæ. Erit autem $m - r = e$, adeoque $m = e + r$, & pars secunda $= m - a$, erit $e - a + r$, cujus excessus supra valorem r erit $= e - a$, excessus autem tertiæ $= e - b$, quartæ $= e - c$, & ita porro. Patet igitur etiam regula pro erroribus omnium reliquarum post primam.

19. En igitur ordinem, qui servandus erit in hujusmodi verificationibus, ubi aliqua ratio particularis non suadeat aliquam mutationem, ut in eo quadrante defectus illius puncti, cui re-

spondet zero, tum quidem aliquantisper confusi effecit, ut verificationem inceperim non ab initio, sed a fine quadrantis.

Collato radio cum chordâ arcus a zero ad *60*, inveniatur error ejus arcus pertinens ad divisionem, cui adscriptus est numerus *60*.

Conferatur chorda arcus a zero ad 30 cum chorda a 30 ad *60*, & inventâ differentiâ ipsarum chordarum, ac per ipsam differentiâ arcuum, sumatur dimidium hujus differentiæ pro errore proprio utriusque arcus graduum 30, qui erit positivus pro eo, cujus chorda fuerit major: hi errores ipsis adscribantur: addatur utrique dimidium erroris inventi pro gradibus *60*, habendo rationem signorum de more: summa erit error totalis utriusque arcus.

Conferatur eadem cum chorda a *60* ad *90*: differentia chordæ ejus arcus a chorda primi 30 exhibebit differentiam *ejus arcus* ab eo arcu, quæ collata cum errore totali ipsius primi exhibebit errorem ejus postremi.

Conferantur chordæ trium partium singulorum ex iis arcubus continentes gradus 10, & *differentia* ipsarum, haberi poterit pro differentia arcuum: *jam habebatur excessus primi supra* reliquos duos *trientes*, *positivus*, *vel negativus*: *binorum excessuum summa divisa per* 3 *adscribatur primæ parti* pro ejus errore proprio: ab eo errore proprio subtrahatur excessus primæ partis supra secundam, tum supra tertiam, ut habeatur error proprius utriusque: error derivatus erit idem pro omnibus tribus pars tertia erroris ejus arcus graduum 30, de cujus partibus agitur: summa eorum binorum errorum, proprii, & derivati adscribatur singulis pro earum errore totali. Eâ operatione institutâ pro omnibus tribus arcubus graduum 30, habebuntur jam 9 arcus scribendi ordine suo 0...10; 10...20; 20...30 &c, quibus singulis adscribetur suus error totalis inventus.

Conferentur chordæ binæ graduum 5 pro quolibet graduum 10, & habebuntur eorum arcuum errores proprii, quibus adscripto errore derivato, qui est dimidius erroris totalis sui arcus graduum 10, summa exhibebit errorem totalem. Eo pacto habebuntur ordine suo dispositi arcus 18 cum suis erroribus totalibus.

Col-

Collatio quinque graduum singulorum pro quovis gradu arcuum continentium quinos facta methodo superius exposità exhibebit errores graduum singulorum proprios cum derivatis adscriptis, & totalibus provenientibus ab eorum summis.

20. His ita dispositis oportebit ordinare catalogum omnium arcuum totalium a zero ad 1, 2, 3 &c. usque ad 90. Si pro errore totali horum fieret summa errorum omnium pertinentium ad gradus præcedentes singulos, summæ evaderent admodum erroneæ ex accumulatione errorum commissorum in tanta eorum sigulorum multitudine: verum subduci poterunt summæ hoc alio ordine.

21. Adscribetur error suus totalis arcui primo graduum 60: tum arcui primo 30 suus, summa erroris arcus 60 cum errore tertii graduum 30 exhibebit errorem arcus 90: ii duo posteriores errores erunt compositi e binis, & obnoxii binis errorum erroribus singuli.

22. Primo arcui 10 adscribetur error totalis suus, arcui 20 summa primi, & secundi graduum 10, arcus 30 jam habebit suum, cui addetur error sequentis arcus graduum 10 pro 40, & error alterius sequentis auferetur ab errore 60 pro 50: primi graduum 10 error addetur errori arcus 60 ad habendum pro arcu 70, secundi error auferetur ab errore 90 ad habendum pro 80.

23. Eodem pacto ut habeantur errores graduum compositorum e quinis habebuntur jam errores pro arcubus compositis e denis, quibus singulis addetur primus tantum compositi e quinis. Iis autem, qui sunt compositi e quinis, addetur prius error primi e sequentibus quinque, tum & alter, deinde duo eorum postremi auferentur a sequenti jam composito e quinis, ac deinde auferetur postremus, ut habeatur error pertinens ad quemvis e quatuor intermediis inter præcedentem compositum e quinis, & sequentem.

24. Re peractâ hoc ordine, arcus e 60 non habebit nisi unicum erroris adscripti errorem: arcubus compositis e continentibus 30 non poterit accedere nisi alter unicus, compositis e denis non nisi tertius, compositis e quinis non nisi quartus, compositis e singulis non nisi duo alii novi: adeoque non poterunt haberi nisi sex

erro-

errorum conjunctorum errores, cum in compositione ex omnium singulorum summa arcus graduum 89 haberet totidem errorum errores simul conjunctos. Quare si repetitâ operatione pluribus vicibus cum summa diligentia perveniatur ad habendas differentias chordarum usque ad decimas partes unius secundi; non habebitur error ne unius quidem secundi in summis, sive in quovis arcu a zero usque ad numerum quemcunque, atque id etiam si omnes errores conspirent, quod nunquam accidit.

25. Potest autem institui divisio alio etiam pacto, dividendo nimirum arcum 60 in ternos arcuum 20, tum hos in binos graduum 10, vel dividendo arcus 30 prius in duos graduum 15, tum in tres graduum 5. Labor verificationis imminuitur plurimum, si habeatur regula accuratissime divisa in partes æquales, in quam transferantur chordæ a zero usque ad divisiones singulas ope instrumenti hìc superius propositi, quod admittit illum usum microscopii: nam translatio per circinum constantem virgis habentibus cuspides sibi perpendiculares non permittit eam adeo accuratam applicationem ipsius microscopii, nec unquam satis distincte videri potest, an cuspis accurate cadat in punctum divisionis cujuspiam. Verum æqualitas accurata divisionum longioris regulæ difficultatem habet suam, & Astronomus plerumque eâ caret, ac si velit non aliis fidere, sed ipse per se rem cognoscere, debebit methodo aliqua analoga hìc propositæ inquirere prius in æqualitatem ipsam divisionum ejusdem regulæ, verificatio etiam per comparationem arcuum exigui numeri graduum cum arcu ferente nonium accumulat numerum errorum in summis.

26. Hìc illud conatus sum, ut proponerem methodum, qua Astronomus in sua specula possit per se ipse videre omnia, & cognoscere vim instrumentorum suorum: alii hæc ipsa ad alia transferent divisionum genera, & faciliores reddent methodos hìc propositas, quæ inventioni promovendæ non inutilia fore confido. Hæc erit, ut cognitio idiomatis adhibiti in loco, ad quem homo ejus ignarus adveniat, qui donec ipsum addiscat, nihil intelligit eorum quæ audit. Sic Astronomus nihil certo scit eorum, quæ videt, nisi noverit, suum quadrantem, exempli gratiâ, præ-

bere

bere ejus oculis gradus 50, cum revera ibi habeat 50°. 0'. 10''. Verificatione autem institutâ instrumentum habens divisiones admodum erroneas æquivalet optimis, in quibus semper remanent errorculi. Si divisiones sint nitidæ, ut distincte exhibeatur id, quod exhibetur, & instrumentum ita solidum, ut semper exhibeat id, quod semel exhibuit, nihil refert prorsus, exigui sint errores, an multo majores: observatio erit æque accurata, & æque facilis correctio, sive 30 secunda addenda sint divisioni insculptæ, sive duo, vel tria. Labor verificationis est sane ingens, sed is institutus semel repetitionem non exigit, nec unquam censendus est nimius is, qui solus ad evidentiam possit perducere, suscipi autem potest ab Astronomo speculæ sibi ignotæ destinato, & vigente ætate, ac viribus. Verificatio plurium ex instrumentis, de quibus agemus in hoc Volumine, erit minus operosa; sed in multis labor impendendus est satis magnus, ut deveniatur ad eam certitudinem, & evidentiam, quarum est capax humana conditio. Illud homini est datum, ut minus erret, non ut omnino non erret.

OPU-

OPUSCULUM II.

De Examine plani quadrantis.

1. UBI quadrans habet radium ingentem cum lamina centrali, & limbo circulari, non ita facile explorari potest, an ipse limbus sit totus in eodem plano transeunte per centrum, cum incurvo illi limbo applicari non possit regula, nisi per exiguum tractum, quæ idcirco non ostendet recessum totius limbi a plano, ut possit determinari. Inveni methodum, quâ id obtinerem tam quadrante posito in situ verticali, quam ipso collocato in situ horizontali. Ad eum usum adhibui cuneum, quem appello micrometricum, a cujus descriptione ordiar.

2. Eum cuneum exhibet figura 1 (Tab. I): ABCD est ejus superficies superior rectangula: GF, FE sunt bini margines superficiei inferioris: ADFG est ejus sectio verticalis versus cuspidem, in quam accurate non desinit: DFEC est superficies lateralis, in qua crassitudo maxima EC, minima DF: reliquæ crassitudines indicantur lineolis incisis in prima superficie prope rectam DC in denas particulas cum earum dimidiis pro quinis, & numeri adscripti indicant earum numerum. Ubi habetur 100, ibi crassitudo est $\frac{1}{100}$ pedis, sive 100 decimarum millessimarum unius pedis: easdem particulas indicant 50, & 150, ex quibus & reliquæ decades statim innotescunt, ac dimidia decadum indicantur a lineolis minoribus: particulæ in quovis quinario facili æstimatione obtinentur. Si binæ quinarii partes sint quidem inæquales, sed non nimis inæquales, altera habenda erit pro 2, altera pro 3. Si inæqualitas sit ingens ita, ut pars altera sit perquam exigua; ea erit = 1, reliqua = 4.

3. Deberet curari, ut facies ABCD, GFE sint bene planæ, quod cum admodum difficulter obtineri possit usque ad cuspidem te-

tenuissimam, idcirco curavi cuneum ita truncatum, ut desint circiter 20 particulæ prope ipsam. Si facies non sint accuratissime planæ, adhuc is defectus nihil oberit, si pro divisione adhibeatur methodus, quam hic proponam. Longitudo est arbitraria, sed quo, pari crassitudine, fuerit longior, eo magis sensibilis erit scala particularum exhibita a cunei facie: meus est circiter pedis unius, & habet crassitudinem maximam particularum 160: ejus divisionem obtinui accuratissimam sequenti methodo: paravi lamellam ejus crassitudinis, ut accurate congrueret cum binis lineis pedis parisiensis, quæ continent $\frac{1}{72}$ ipsius pedis, quæ nimirum, factis 72 : 1 : : 10000 : 138 $\frac{8}{9}$, continet particulas decimas millesimas quam proxime 139. Aperto angulo ACB (fig. 2) circini proportionis affabre constructi, applicui latus ipsius lamellæ propius centro C ei puncto E lateris CB, quod respondet num. 139 partium æqualium, tum angulum ita conclusi, ut punctum D responderet simili puncto lateris CA, ac ipsius circini crura ita adstrixi in AB tenaci forcipe, ut angulus ACB nec augeri posset, nec minui: summotâ lamellâ DE, immisi intra aperturam anguli ipsius cuneum micrometricum impellendo ipsum versus C, & elevando ac deprimendo, donec congrueret ejus crassitudo cum apertura ipsius anguli respondente numeris partium æqualium 20, tum 30, 40, 50, & in singulis positionibus notabatur in latere CD figuræ 1 divisio exprimenda iisdem numeris: eo pacto obtinui crassitudines respondentes particulis 20, 30, 40, 50 iis ipsis, quarum 10000 continet unus pes, ac singulæ decades bifariam sectæ, exhibuerunt quinaria. Ea ratione cunei micrometrici divisio obtinetur accuratissima, quem deinde adhibui ad plures perquisitiones, inter quas una e præcipuis fuit verificatio, & correctio plani quadrantis muralis, quam pro positione verticali institui methodo sequenti.

4. Posito ipso quadrante in situ proxime verticali, applicui ipsi filum sericum DE (fig. 3) crassitudinis uniformis, qualia inveniuntur satis opportuna ex materia nondum cocta, qualis e folliculis extrahitur, quod tetendi satis magna vi. Sustinebatur id a binis ferreis virgis IHD, KLE flexis ad angulum in H, & L,

quarum caput I, & K desinebat in furcam, ut exprimit fig. 4, quæ inserebatur regulæ laterali quadrantis, & ipsi adstringebatur ope cochleæ prementis M. Alteri ut D advolvebatur id filum sericum, & alligabatur utcunque: in altera, ut E, habebatur cylindrus cum cochlea, qui posset converti circa proprium axem, cui itidem advolutum, & alligatum filum ipsum distendebatur, quantum libebat, ejus conversione, ac poterat effici, ut remaneret propius puncto L, vel ab ipso remotius ipsum admovendo, vel removendo vi digito illata, dum fiebat cylindri conversio. Sed id facilius fieri potest ope machinulæ figuræ 5: ibi cochlea NT cogit cursorem RQ accedere ad L, vel ab eo recedere, quantum libet: filum advolvitur cylindrulo inserto ipsi cursori, qui dum convertitur ope manubrii S, distendit filum ipsum, quantum libet.

5. In centro C figuræ 3 aderat, ut fieri solet, foramen exiguum cylindricum, cui inseri solet cylindrus convexus, qui adnexus alidadæ deferenti telescopium converti possit intra ipsum, vel circa quem ipsa alidada convertitur. In id foramen immisi cylindrum convexum ligneum crassitudinis ejusdem, in cujus centro defixa erat acus metallica, cum capite crassiore proximo ejus plano: inducebatur ipsi laqueolus, in quem desinebat filum sericum tenuissimum satis longum, quod, ipso laqueolo gyrante circa eandem acum, poterat circumduci, & acquirere positionem cujusvis radii sphæræ, sed ita, ut ibi eandem semper haberet distantiam a plano ipsius cylindri solidi, cui erat infixa acus: ipse autem cylindrus poterat non nihil protrudi ultra planum laminæ centri, in quâ illud foramen cylindricum fuerat excavatum.

6. His ita positis, & aptato tam cylindro in C, quam filo transversali DE, tetendi vi mediocri filum illud sericum tenuissimum mobile CF, cujus alterum extremum applicui limbo ipsi versus F ita agglutinatum cerâ interpositâ, ut filum fixum contingeret: immisso inter ipsum & laminam centri cuneo micrometrico, & promoto usque ad contactum cum eodem filo mobili, obtinui accuratissime ejus distantiam a plano ipsius laminæ, in quo jacet quadrantis centrum. In ea mensura determinanda vix poterat du-

bita-

bitari de una, vel altera particula ejus cunei, nimirum decima millesima unius pedis.

7. Hoc intervallo invento, & accuratissime determinato, notavi hanc, quæ dici poterit distantia fili mobilis a plano centri: tum ejusdem fili mobilis caput F adduxi prius ad initium divisionum zero, & applicui ipsi limbo tenens manu ita ibi applicatum, vel ita agglutinans cerâ post ipsum limbum a tergo, ut remaneret fixum, & bene tensum. In eo statu id intorquebat filum transversale DE introrsum; sed ipsum statim liberabam ab eo flexu inserendo inter planum limbi, & filum mobile prope F in ipso situ divisionum cuneum micrometricum, & promovendo ita, ut succedentibus perpetuo partibus crassioribus, demum ipsum filum mobile CF desereret filum transversale DE, quod ita remanebat liberum in eo statu, quem requirebat tensio, fere rectilineo: incurvabatur id quidem non nihil ob suum ipsius pondus, & induebat formam arcus lineæ funariæ, sive catenariæ incurvi quidem non nihil, sed parum admodum, & curvaturâ, quæ ipsum non poterat removere a plano quodam verticali, sed incurvare tantummodo in eo plano versus pavimentum: tum paullatim subducebam cuneum ita, ut succederent partes minus crassæ, donec filum mobile CF, quod interea accedebat ad transversale DE in G, ipsum ibi contingeret: notabam autem crassitudinem ipsius cunei, quâ efficiebatur primo is contactus, deinde promovebam punctum F ad punctum graduum 10, tum ad 20, 30, & ita porro, vel etiam ad quinos gradus, notando semper eum numerum particularum distantiæ a plano limbi determinatæ a filo fixo, qui habebatur, ubi primo ipsum filum mobile appellebat ad contactum cum eodem fixo in G. Porro contactum indicabat umbra fili mobilis CF projecta in transversale DE a lumine fenestræ non nihil obliquo, vel occlusis fenestris a flammula candelæ, quæ umbra satis evidenter incipiebat apparere in ipso fixo, ubi jam proximum ipsi evaserat filum mobile, & oculo oblique posito perspiciebatur evidentissime distantia ipsius fili mobilis ab illa suâ umbrâ, donec se in ipso contactu conjungerent. Hoc pacto obtinui accuratissime in locis singulis distantiam plani limbi a filo

ipso mobili bene tenso, & adducto ad primum contactum cum filo fixo.

8. Porro filum mobile motu suo circa punctum immobile, in quo perpetuo contingit filum fixum, describit utique planum quoddam. Id quidem esset accuratissime planum, si utrumque filum haberet directionem prorsus rectilineam: utrumque habebit curvaturam exiguam inductam a suo pondere; sed ea curvatura fiet in plano quodam verticali, in quo cum jaceat vel accurate, vel satis proxime illud ipsum punctum immobile C, descriptio plani cujusdam nihil inde ad sensum turbari potest.

9. Hoc pacto habebatur pro omnibus punctis limbi, ad quæ filum mobile fuerat adductum, distantia a plano quodam, cujus plani habebatur etiam distantia a centro illa ipsa, quæ determinata fuerat, determinando (num. 6) distantiam fili mobilis a lamina centrali. Si hæc dematur a reliquis, habebuntur distantiæ eorundem punctorum ab alio plano transeunte per centrum, quibus datis invenietur facile singulorum distantia a plano alio, quod concipiatur transiens per centrum, & extrema puncta limbi. Considerentur tria plana: primum sit illud, quod describit filum mobile: secundum aliud ipsi parallelum transiens per centrum quadrantis: tertium illud aliud transiens per ipsum centrum, & bina extrema limbi. Ad primum pertinent distantiæ punctorum limbi exhibitæ a cuneo micrometrico per immediatam observationem: ad secundum distantiæ ipsæ curtatæ per substractionem ejus, quam filum mobile habet a lamina centrali. Quæremus distantias a tertio, quæ haberi possunt pro erroribus plani quadrantis; si enim id esset planum, transiret per centrum, & per omnia puncta limbi, adeoque etiam per illa extrema, quo casu eæ distantiæ punctorum reliquorum ab eo tertio plano nullæ haberentur.

10. Si distantia fili mobilis a plano laminæ centri fuerit æqualis distantiæ ipsius ab utroque extremo limbi; illud ipsum secundum planum erit idem, ac tertium quæsitum, & inventio errorum omnium erit expeditissima. Ablatâ ab omnibus reliquis distantiis distantiâ pertinente ad centrum, remanebit zero pro punctis limbi primo, & ultimo: si pro reliquis omnibus remaneat

itidem

itidem zero ; erunt omnia in illo plano eodem : quod ſi pro puncto quopiam remaneat numerus poſitivus , ibi limbus erit cavus : ſi remaneat numerus negativus , e contrario limbus ibi erit convexus ; quia in priore caſu diſtantia ab illo plano parallelo erit major , in ſecundo minor , quam eſſe deberet ad hoc , ut ea puncta jacerent in eodem plano cum illis tribus.

11. Æqualitas diſtantiarum fili mobilis a centro , & binis extremis limbi nunquam sanè habebitur caſu . Obtinebitur utique , ſi alligato altero capite *fili fixi in D*, *alterum caput in* E admoveatur *puncto* L, *vel ab ipſo removeatur juxta num.* 5 vel manu libera , vel ope curſoris RQ *figuræ* 5 , donec deprehendatur diſtantia fili mobilis *a limbo* in A , & B eadem : tum *cylindrus* inſertus centro C protrahatur , vel retrahatur , donec & ibi diſtantia fili mobilis a plano centri deprehendatur æqualis diſtantiæ ipſius ab alterutro extremo limbi , qua æqualitate habita , habe*bitur ſimul* etiam æqualis diſtantia ab altero .

12. *Verum ea poſitio fili fixi* , & cylindruli centralis obtineri *non* poteſt , *niſi per iteratam* , & *moleſtam* attentationem , etiam ubi *habeatur ipſe curſor figuræ 5 . Hinc ego quidem ſine eo curſore , & ſine ulla attentatione alligabam filum fixum binis normis ferreis ſimplicibus* IHD , KLE *bene tenſum , ſed temere ,* cavendo tantummodo , ne filum ipſum nimis diſtaret a plano limbi , vel *nimis* eſſet ipſi proximum , & *cylindrulum temere protrudebam* in C , ita tamen , ut filum mobile advolutum acui nec *diſtaret* a plano laminæ centralis plus craſſitudine maxima cunei micrometrici , nec minus minima : id ipſum cavebam itidem in collocatione *fili* fixi ; nimirum ne uſpiam filum mobile deberet diſtare a limbo plus maxima craſſitudine , vel minus minima cunei ipſius. Determinatis hoc pacto diſtantiis a plano primo , nimirum ab eo , quod *filum* mobile deſcribebat , ac reductis ad diſtantias a plano ſecundo *ipſi* parallelo tranſeunte per centrum ope ſubtractionis diſtantiæ *pertinentis* ad ipſum centrum *juxta num.* 9 , determinabam hujus ſecundi poſitionem reſpectu illius tertii tranſeuntis per ipſum centrum , & bina extrema , ac diſtantias ab eodem tertio ſequenti methodo.

13. *Sint (fig. 6)* A, B bina extrema puncta limbi, C centrum, *a*C*b* planum illud secundum parallelum plano descripto a filo mobili, A*a*, B*b* distantiæ punctorum A, B ab ipso indicatæ a cuneo micrometrico, sed imminutæ per subtractionem (num. 9) distantiæ fili mobilis a centro, O*d* sit distantia pertinens ad quodvis aliud punctum O limbi, cujus puncti oporteat determinare distantiam OD a plano tertio ejusdem numeri 9 transeunte per puncta A, C, B. Concipiantur rectæ BA, *ba*, quæ productæ sibi invicem occurrant in E, & erit ECF intersectio planorum ACB, *a*C*b* secundi, & tertii, cum nimirum puncta E, C *jaceant in* utroque. Ea recta determinatur, determinato puncto E, quod habetur, factis *Bb* — *Aa* : *Aa* :: BA : AE. Verum positio ejus rectæ *determinatur facilius, si concipiatur* AK *ipsi parallela terminata* ad radium CB. Patet enim, fore BC : CK :: BE : EA :: B*b* : A*a*, quæ ratio cum detur ob datas B*b*, A*a*, & detur radius CB, dabitur CK tangens anguli CAK = ACE, cujus *mensura* est arcus AL productio arcus BA *usque ad* ipsam rectam quæsitam CE. Porro ipsa CK *habebitur ducendo* A*a* in radium, & dividendo *per Bb : addendo autem arcui huic constanti* AL arcum quemvis AD, invenitur quivis arcus LD, *ut &, addito quadrante* AB, arcus LB.

14. Concipiantur jam per rectas A*a*, D*d*, B*b* plana AH*a*, DI*d*, BG*b* perpendicularia rectæ EF: erunt anguli ad H, I, G æquales inter se, metientes nimirum inclinationem planorum ACB, *a*C*b*. Quare erit ut BG, vel AH ad DI, ita B*b*, vel A*a* ad D*d*, qui valor facile invenietur ob datas BG, AH, DI sinus arcuum inventorum LB, LA, LD, & quidem ducendo constantem valorem $\frac{Bb}{BG}$, vel $\frac{Aa}{AH}$ in quemvis sinum DI. Demptâ observata O*d* ab inventa D*d*, habebitur quæsita distantia OD.

15. Sine calculo trigonometrico, & sinuum usu *res hoc* pacto facilius expedietur per constructionem. Centro C (*fig. 7*), radio quovis (satis est etiam radius pollicum trium) *fiat* arcus circuli ADB, in quo assumatur arcus AQ *graduum* 60 centro A radio AC, quo arcu secto *bifariam habebitur* punctum 30°, & *gradi-*

bus

bus 30 tranſlatis in QB habebitur quadrans AB : *facile fiet ſubdiviſio* in gradus denos, & quinos, quæ, ut & integer quadrans AB, habebitur facilius immediate ex circino proportionis: neque enim eſt hìc neceſſaria exactitudo : ſufficit determinatio non nimium abludens a vera. Aptetur jam radius AC inter rectas partium æqualium ejuſdem circini ad numerum reſpondentem particulis *diſtantiæ* puncti B, nimirum particulis B*b* figuræ *6*, & ex eodem circino capiatur in fig. 7 CK reſpondens numero particularum ejuſdem figuræ *6* : *ducatur* AK, *tum per* C recta ECF ipſi parallela : *capiatur circino communi diſtantia* BG puncti B ab eadem recta, quæ *facile habetur*, applicatâ ad B alterâ cuſpide circini ejuſdem, & eo diducto, donec *altera cuſpis radat ipſam* EG, ac ea transferatur inter lineas partium æqualium *ejuſdem circini* proportionis aperti ita, ut ipſa aptetur numero illi eidem partium B*b* figuræ *6*, cui prius aptabatur AC. Debebit in fig. 7 diſtantia AH puncti A ab eadem, reſpondere numero earumdem partium *æqualium*, *qui habebatur* in fig. 6 in A, ut etiam quævis *diſtantia* DI capta in *fig. 7 ab eadem recta*, & tranſlata in ipſum circulum *proportionis exhibebit numerum quæſitum particularum* D*d* *fig. 6*.

16. Ratio conſtructionis eſt manifeſta : patet enim, *fore in* fig. 7 BC ad CK, ut eſt in fig. *6* B*b* ad A*a*, tum in fig. 7 BC ad DI, ut in ſig. *6* B*b* ad D*d*, ut oportebat. *Verum melius erit* pro punctis A, B aſſumere non zero, & *90°*, ſed puncta extrema *limbi*, qui ſolet excurrere aliquot gradibus ultra utrumque limitem : ſic *habebitur* ſtatus totius limbi reſpectu plani tranſeuntis per centrum, & puncta ipſius extrema. Sed pro calculo oportebit invenire in fig. *6* angulum CAK ex dato angulo ACK, & lateribus AC, CK aſſumptis tot particularum, quot ſunt *diſtantiæ* A*a*, B*b*. *Ipſi erit* æqualis alternus LCA, cujus *menſuræ* LA addendus *erit* arcus ab A *ad* zero ad habendum arcum ab L ad zero, cui ſemper addendus *erit* numerus pertinens ad punctum D, qui exhibet arcum a zero ad ipſum D, *ut habeatur* LD, & D*d* per ejus ſinum DI.

17. Ex omnibus D*d* ablatis omnibus O*d* inventis num. 13 habe-

bebuntur omnes OD, nimirum omnes errores plani limbi, qui sunt distantiæ punctorum O a plano ACB, in quo debebant esse. Si divisio nondum sit facta, & errores sint exigui, ac lamina limbi satis crassa, & prominens ultra illud planum; possent abradi a limbo ubique tot particulæ, quot exhibet error ibidem inventus, & limbus totus erit reductus ad idem planum transiens per centrum, & bina extrema: verum si divisiones jam sint factæ, oportet inire rationem aliquam, qua limbi ipsius partes per exiguum motum ipsi impressum deveniant ad planum aliquod transiens per centrum.

18. In ingentibus quadrantibus, ut in eo, in cujus planum inquirebam, qui radium habebat pedum sex, habetur sæpe compages regularum metallicarum, quæ procurrunt usque ad locum limbi, & ibi sustinent mensulas quasdam: eæ excipiunt limbum sibi affixum per cochleas. Ibi non possunt partes limbi propelli versus compagem ipsam, sed possunt educi extrorsum interpositis lamellis metallicis inter mensulas, & ipsum limbum. Si inveniatur in superficie exteriore limbi cavitas ita, ut punctum O jaceat introrsum versus compagem citra D, & sit *d*O major, quam D*d*, nimirum distantia DO negativa; tum lamellæ possunt interseri in singulis punctis ejus cavitatis, quæ si fiant crassitudinis æqualis errori invento, adducent ea puncta ad planum ACB. Sed si inveniatur convexitas, ut ego inveni in eo quadrante, qui licet constructus Parisiis a Caniveto, prominebat in medio plus quam per unam lineam, ut patebit in exemplo proponendo infra, tum debent removeri a mensulis extrema omnia, & arcus intermedii ita, ut deveniatur ad aliquod planum transiens per C. Si removeatur ubique a mensulis per distantias O*d* curtatas juxta num. 9, adducentur ad planum secundum parallelum plano primo descripto a filo mobili, quo casu inutilis esset omnis illa errorum determinatio facta per calculum, vel constructionem. Sed eæ remotiones possent evadere multo majores, quam necesse sit, quod accidit fere semper, præterquam quod, si filum mobile nimis distet a plano centri, reductio per subtractionem posset relinquere distantias a secundo plano negativas, punctis limbi aliquibus extantibus etiam ul-

tra ſecundum planum. Quærendum igitur, quantum ubique removeri debeat a menſulis limbus ita, ut reducatur ad planum quoddam tranſiens per centrum cum ea conditione, ut remotio maxima evadat minima earum, quæ cum reliquis conditionibus haberi poſſint.

19. Ad id præſtandum concipiatur in fig. 8 planum ACB idem, quod in fig. *6*: ſit autem limbus erroneus AOVB protuberans ultra illud planum. Facile percipitur, ad habendam correctionem debere converti planum ACB circa rectam EF parallelam chordæ AB, donec ita deveniat ad planum novum *aCb*, ut radat alicubi in V limbum ipſum AVB convexum, quin ultra ipſum procurrat, & quin relinquat punctum ullum limbi ejuſdem ultra ſe ipſum: ita enim patet, fore limbi remotionem in punctis extremis A, & B utrobique eandem: ſi convertendo circa aliam quampiam rectam ipſa evaderet minor in altero extremo; deberet evadere in altero major quam prius. Oportebit autem removere limbum in quovis ſuo puncto O ita, ut deveniat ad id planum in *o*. Concipiantur per AOVB plana AH*a*, DI*o*, PQV, BG*b* perpendicularia ad rectam EF, aſſumpto pro V puncto ex inventis remotiſſimo a plano ACB: erit ut PQ ad DI, ita PV ad D*o*, unde ablatâ parte DO, relinquetur O*o* pro motu ejus partis limbi.

20. Porro facile habebuntur PQ, DI per tabulas ſinuum. Si enim arcus BA occurrat rectæ EF in L; innoteſcet arcus AL menſura anguli ACL, qui cum debeat eſſe æqualis alterno CAB, & angulus CAB ad baſim trianguli iſoſcelii ſit complementum dimidii anguli ACB, erit complementum dimidii arcus AB. Si huic arcui conſtanti addantur arcus AP, AD; habebuntur arcus LP, LD, quorum ſinus ſunt PQ, DI. Satis autem erit & hic valorem conſtantem $\frac{VP}{PQ}$ multiplicare per omnes DI ad habendas omnes D*o*, quibus inventis, habebuntur omnes O*o*, ac eodem pacto inveniuntur etiam remotiones A*a*, B*b* reſpondentes ipſis punctis extremis.

21. Res per conſtructionem facile expedietur. Applicatâ PQ ad numeros circini proportionum reſpondentes numero particularum PV, quærendi erunt ibi numeri, quibus aptetur DI, & ii exhibebunt numeros D*o*, ut per ſe patet.

22. Posset autem accidere, ut alicubi inveniretur Do minor, quam DO: fieri enim potest, ut angulus, quem DI continet cum recta, quæ concipiatur ab I ducta ad O (ea concipi debet, licet vitandæ confusionis causa non exprimatur in schemate), sit alicubi major, quam PQV, licet DO sit ubique minor, quam PV; quod quidem potest accidere ob distantiam DI minorem, quam PQ in ratione adhuc minore, quam sit ratio DO ad PV. Angulus DI*o*, qui est æqualis angulo PQV, esset minor angulo DIO, adeoque D*o* minor quam DO, & valor O*o* negativus. In eo casu id punctum assumendum esset pro V. Nimirum initio assumi possunt plures errores DO circa maximum, & divisis singulis per suas distantias DI a recta EF; seligendus erit pro PV is error, qui exhibebit quotum omnium maximum: ibi enim planum *a*C*b* ita continget curvam limbi erronei AVB, ut nullum ejus punctum relinquat ultra se, quæ erat conditio problematis. Verum is quotus maximus habebitur cum angulo maximo ibi prope locum, in quo error ipse sit maximus: idcirco proposui, ut is adhibeatur pro PV; quæ positio si fuerit falsa; invenietur falsitas ipsa ob valorem quempiam obvenientem cum signo negativo pro O*o*, & facile restitui poterit calculus, & obtineri, id, quod ad solutionem problematis requirebatur.

23. Superest, ut methodum illustrem exemplo. Id habebitur in sequenti tabella, pro qua adhibui constructionem graphicam, non calculum trigonometricum (*).

1	C	—6	—5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95	98
2	41	109	107	103	91	82	70	66	60	57	58	58	56	58	54	53	53	58	67	81	88	104	109	125
3		68	66	62	50	41	29	25	19	16	17	17	15	17	13	12	12	17	26	40	47	63	68	84
4		68	70	79	87	95	101	108	113	117	121	123	125	125	125	123	121	118	114	108	103	97	89	84
5		0	4	17	37	54	72	83	94	101	104	106	110	108	112	111	109	101	88	68	56	34	21	0
6		71	73	79	87	93	99	104	108	111	113	115	116	115	114	111	109	105	101	96	90	82	75	71
7		71	69	62	50	39	27	21	14	10	9	9	6	7	2	0	0	4	13	28	34	48	54	71

(*) Si quis forte error superest vel calculi, vel scriptionis, is non nocebit. Errores nocent in formulis applicandis ad alios casus: hìc satis est perspicere rationem ordinandi calculum in casu simili, si quis occurrat. Adhùc spero, non multos errores hìc deprehensum iri in hisce calculis numericis, quorum multos revocavi ad trutinam etiam paullo ante impressionem.

24. Pri-

24. Prima columna in hac tabella exhibet numeros, quibus designatur ordo eorum, quæ continentur in reliquis. Secunda per litteram C indicat centrum, sub qua habetur e regione numeri 2 columnæ primæ distantia observata fili mobilis ab ipso centro, reliquæ e regione numeri 1 habent punctum limbi expressum per numerum graduum, pro quo puncto acceptæ sunt distantiæ: eæ incipiunt ab arcu — *6*, cum quadrans, de quo agebatur, haberet *6* gradus citra zero, tum per 5, 0, 5, 10 procedunt usque ad *98*, quod erat *ibi* alterum *extremum*. *E regione* numeri 2 columnæ 1 *habetur distantia* determinata per cuneum micrometricum pro quovis ex *ipsis*. E regione 3 habetur idem imminutus per subtractionem *illius* distantiæ centri = 41, quæ *habetur* in columna secunda: sic in tertia habetur *68* = 109 — 41, in quarta *66* = 107 — 41, & ita porro. E regione 4 habetur distantia punctorum plani secundi a plano tertio, nimirum valor rectæ O*d* *figuræ 6 inventus* methodo numeri 15. Idcirco in tertia, & postrema *columna* repetitur *quarto* loco idem numerus, qui habebatur tertio, quia *nimirum planum tertium transit* per puncta A, B, ad *quæ pertinent illæ columnæ*, *secundum* autem *per a*, *b*, *adeoque abeunte D in* A, vel B, abit D*d* in A*a*, vel B*b*. E regione 5 habetur differentia præcedentium binorum numerorum, sive valor D*d*, nimirum error quæsitus. Hinc necessario in columna tertia, & postrema habetur 0, quia nimirum abeunte D in A, vel B, evanescit DO, at in columna quarta est 4 = 70 — *66*, in quinta 17 = *79* — *62*, & ita porro. E regione *6* habetur valor lineæ D*o* figuræ 8 inventus methodo numeri 20, & 21. E regione numeri 7 habetur differentia præcedentium binorum, sive valor lineæ O*o*, nimirum elevatio limbi in eo loco *necessaria* ad hoc, ut is reducatur totus ad planum *a*C*b*. Hinc in *columna* tertia, & postrema debet obvenire hic postremus numerus *æqualis præcedenti*, quia nimirum abeunte D in A, vel B, abit O*o* in A*a*, vel B*b*. Hic numerus postremus columnæ cujusvis exhibet crassitudinem *lamellæ* interserendæ ad hoc, ut omnia limbi puncta abeant in locum sibi debitum.

25. Porro pro fig. *6* est e regione numeri 3 in columna tertia

$Aa = 68$ pertinens ad $-6°$ primæ lineæ, & in poſtrema $Bb = 84$ pertinens ad $98°$. Hinc ſi libeat adhibere calculum trigonometricum; ratio laterum AC, CK in triangulo ACK eſt 84 ad 68 ſive 21 ad 17, angulus autem ACB $= 98° + 6° = 104°$, ex quibus innoteſcit angulus CAK $=$ ACL, ſive arcus AL $= 33°. 18'$, cui ſi addatur $6°$; habebitur arcus ab L ad zero $= 39°. 18'$: ipſi eſt addendus numerus graduum pertinens ad D, ut habeatur arcus LD. Sic erit LB $= 39°. 18' + 98 = 137°. 18'$. Dividendo $Bb = 84$ per ejus ſinum 0,6782, habebitur numerus conſtans 123,9, per quem multiplicandus erit *ſinus cujusvis alterius* LD, ut habeatur *diſtantia quæſita a ſecundo plano ponenda in quavis columna* e regione numeri 4 *columnæ primæ*. Pro gradibus 60 arcus LD evadit $99°. 18'$, cujus arcus ſinus 0,9869, adeoque diſtantia quæſita 122: ea per unicam unitatem differt ab inventa per conſtructionem 123, quæ occurrit quarto loco *in* columna habente in vertice 60; ad quam præciſionem *ne* obſervatio quidem immediata pertingit, & quæ nullius eſt *momenti* in hac perquiſitione, in qua, *ut patebit inferius*, error 4 particularum vix *inducit errorem unius ſecundi*.

26. Pro conſtructione ipſa aperto circino proportionis ita, ut radius CB (fig. 7) aptetur numeris 84 lineæ utriusque partium æqualium, ex ea apertura aſſumantur partes 68 pro CK (*): tum ductâ AK, & ipſi parallelâ EF, applicetur diſtantia perpendicularis BG ad ipſos numeros 84, & diſtantiæ DI translatæ in eam aperturam exhibebunt numeros particularum quæſitos.

27. Jam vero pro figura 8 cum ſit ACB $= 6° + 98° = 104°$, erit ſumma angulorum CAB, CBA ejus ſupplementum $= 76$: hujus dimidio CAB cum ſit æqualis angulus alternus ACL, erit hic $= 38°$, cui ſi addatur 6, habebitur $44°$ pro arcu ab L ad zero. Porro error maximus e regione numeri 6 occurrit in columna 16 pertinente ad gradus 55, ubi habetur 112. Aſſumptâ eâ pro puncto P, erit LP $= 44° + 55° = 99°$, cujus ſinus 0,9877. Diviſo per hunc 112, obtinetur 113,4. Sed quoniam columna proxime

(*) Eſt enim (num. 25) AC : CK :: 84 : 68.

xime ſequens, quæ pertinet ad *60°*, adeóque habet arcum ab L = 104°, & *ſinum 0, 9693*, habet errorem 111, qui diviſus per ipſum ſinum exhibet valorem 114,5 majorem priore 123,4; adhibendum eſſet potius hoc punctum pro P, niſi in ſequenti columna haberentur numeri, qui quotum adhuc tantillo majorem exhiberent. Ibi *arcus evadit 109°*, cujus ſinus 0,9455: per ipſum dividendo errorem 109 obtinetur quotus 115,3. Hic jam eſt maximus, nam ſequens columna pertinens ad 70 jam habet errorem 101 multo *minorem cum arcu 114°, per cujus* ſinum 0,9135 ſi dividatur *ille* error, *obvenit* quotus 110,*6* minor priore, & primo intuitu conſtat, *reliquos* fore adhuc minores. Hinc pro puncto P aſſumi debet *65°*, & quotus ei *reſpondens* 115,*3 adhibendus* erit pro numero conſtanti *multiplicando* per *ſinum* arcuum terminatorum ab L ad reliqua puncta pro eruendis numeris, qui reſpondent in quavis columna numero *6* columnæ primæ. Pro *primo puncto* habetur — 6°.. adeoque ejus arcus 44° — *6°* = 38°, *& ejus ſinus* 0,*6157* ductus in 114,3 exhibet 70,4, pro quo ibi in columna tertia *constructio* exhibet *71*.

28. *Calculus exhibet valores magis exactos, ſed conſtructio cum circulo etiam exiguo ita proximos, ut cum ipſa ſit multo* expeditior, præferenda omnino videatur. Vix unquam, ſi mediocris in ea adhibeatur diligentia, occurret error duarum particularum, qui quidem adhibito circulo paulo *majore* evaneſceret etiam ipſe. Porro radius pedum *6* continet earum particularum *60000*. Pro radio partium 1000000 arcus unius minuti eſt *291*. Factis ut 1000000 ad *60000* ita *291* ad quartum, prodeunt particulæ 17,5. Porro ibi agitur de appulſu ad meridianum æſtimando a tempore, ubi ſi aſtrum ſit in æquatore, uni minuto arcus reſpondent 4 ſecunda temporis, adeoque ibi requiritur error particularum 4,4 ad committendum errorem unius ſecundi in tempore. *In fixis* polo propioribus plura ſecunda temporis reſpondent uni minuto *circuli* maximi. Non habebuntur ſecunda 17,4, niſi prope diſtantiam a *polo* graduum 13, adeoque error unius particulæ relictus in plano quadrantis *producet* in tempore appulſus errorem minorem uno ſecundo in omnibus aſtris habentibus diſtan-

tiam

tiam a polo majorem gradibus 13, ac proinde is error nusquam adesse poterit in quadrante murali directo ad meridiem, ut fere solent esse, & erat is, de quo agebatur, ad quem non appellunt nisi astra magis remota a polo, quam sit complementum altitudinis poli imminutum per illos *6* gradus, quibus arcus excurrit citra zero.

29. Sed nec in quadrante directo in Boream is error quidquam oberit accurationi observationis, si deinde verificetur positio quadrantis in plurimis *suis punctis per altitudines* correspondentes. Eam ob causam posset *relinqui planum incorrectum*. Sed ego coactus sum illum corrigere a plano *nonii adjuncti* telescopio, quod quando *congruebat* cum plano *limbi* in *ejus initio* non poterat ipsi congruere *in fine* & vice versa ob illam diversam positionem superficiei limbi ortam a convexitate, unde oriebatur *notabilis parallaxis*. Is hiatus in parte limbi inter planum nonii, & ipsius superficiem me monuit de errore plani, & coegit omnem *hanc* perquisitionem suscipere: is autem evanescit ad sensum *omnis*, etiam si aliquis *supersit errorculus* exiguus. Eâ susceptâ inveni errores, qui in *tabella occurrunt e regione numeri* 5 columnæ 1, ac correctiones *adhibendas*, quæ habentur in fine columnæ *cujusvis* e regione postremi numeri 7, & obtinentur juxta num. 24 subtrahendo a penultimo numero cujusvis columnæ numerum præcedentem, *nimirum errorem* illum.

30. Correctiones inventas adhibui, pro quibus jussi parari lamellas ejus crassitudinis, quæ respondebat loco, cui singulæ in limbo debebant aptari, eruendo ipsas ex serie numerorum, qui habentur in fine columnarum omnium. Exempli gratiâ quæ debebat respondere numero 10°, vel 15°, debebat habere crassitudinem *39*, vel 27 respondentem iis numeris graduum in fine columnæ septimæ, vel octavæ. Si interserenda erat in puncto respondente gradibus $11\frac{1}{2}$; per interpolationem more solito *tabularum* inveniebatur numerus debitus ei loco factis ut gradus $15 - 10 = 5$ ad $11\frac{1}{2} - 10 = 1\frac{1}{2}$, *ita particulæ* $39 - 27 = 12$ ad 3,*6*, sive 4, quo addito ad 27, obtinebatur 31. Ad habendam in lamella eam crassitudinem adhibui ipsam illam methodum aperturæ *circi-*

ni

hi proportionis expositam num. 3 pro divisione cunei micrometrici reddendo fixam aperturam ibi inventam methodo ibidem expositam, tum inserendo lamellam aperturæ ipsi, & si opus esset limando, donec congrueret numero partium ipsius circini debito crassitudini inventæ. Eam methodum adhibere potest admodum facile quivis mediocris artifex.

31. Interpositis ita lamellis potest iterum observatio institui ope filorum fixi, & mobilis, ut prius, ad videndum, an errores ulli supersint, & si qui superfuerint, ad eos corrigendos, attenuando lamellas, vel adhibendo alias crassiores. Verum illud commodum accidit, quod vis aliquanto major, vel minor illata cochleis ita validius, vel minus valide apprimebat limbum ad mensulam, ut eâ ratione per eandem lamellam corrigi posset error aliquot particulis major, vel minor.

32. Porro ut artifex ipse per positionem fili mobilis posset cognoscere, an errores essent accurate correcti, & totus limbus redactus ad planum idem cum centro; adhibui sequentem methodum, quæ supponit jam inventum locum correctionis maximæ: ita tetendi filum fixum DE (fig. 3), ut filum mobile temere prius collocatum in centro exhiberet in punctis extremis limbi ipsius ope cunei micrometrici eandem distantiam quamcunque, quod obtinebatur admovendo non nihil caput fili fixi E ad L, vel ipsum inde removendo, donec ea æqualitas obtineretur: tum applicato filo mobili ad locum correctionis maximæ inventum in gradu 65 (num. 27), ita paullatim promovi, & retraxi cylindrum centralem in C, ut cuneus micrometricus exhiberet distantiam quandam eandem ipsius fili mobilis in ipso centro, & ibidem in limbo.

33. His ita comparatis, & filo mobili circumacto, adduxi omnia puncta limbi per lamellas interpositas ad distantiam ab ipso ubique eandem, nimirum illam inventam pro centro, & loco, qui debeat carere correctione. Si alicubi inveniatur multo major, vel minor post interpositam lamellam (quod ipsum potest accidere ob diversam vim illatam ipsi machinamento, dum infertur vis limbo, si is ipse non sit accurate planus in brevioribus suis partibus)

tibus) *mutari debet lamella*, substituendo aliam totidem particulis crassiorem, vel tenuiorem, quot particularum superérat discrimen in illa distantia a distantia inventa in céntro: si vero discrimen inventum sit exiguum, apprimendo paullo magis, vel minus per *motum cochleæ*, *debet reduci limbus* ad positionem debitam *ita*, *ut in* ea positione *fili fixi habeat* ubique *filum mobile distantiam* a limbo eandem, quam a centro.

34. Patet, hoc pacto collocari limbum totum in eodem plano cum ipso centro, *nimirum in eo*, *qui sit parallelus* plano descripto a *filo*, & *transeat par idem centrum*. *Obtinui* eo pacto illud ipsum planum *a*C*b* figuræ 8: *locus* P *erat ille* graduum 65, in quo *nulla adhibita* est *correctio*: *correctiones autem* in punctis *extremis* A*a*, B*b erant æquales*, *quia filum fixum* ita *fuerat* aptatum, ut *in illo primo* statu *distantiæ centralis haberet filum* mobile a punctis *extremis distantias* æquales, quæ æqualitas nihil ad sensum turbari potuit ab illa exigua protrusione vel *retractione* cylindruli centralis. Quoniam autem in P *limbus remanet* immotus; satis patet, *novum planum ita contingere* superficiem convexam AOB *in* V, *ut transeat per centrum*, & *correctiones* extremæ A*a*, B*b habeantur* æquales, quod *erat faciendum*.

35. *Si filum fixum* haberet positionem aliam quamcunque, & distantiam etiam arbitrariam quamvis, ac distantia assumpta fuisset quævis *pro filo mobili* in centro; adhuc obtineretur planum transiens per centrum; dummodo nusquam distantia fili mobilis a limbo occurreret minor, quam in centro, adducendo limbum ad eam distantiam a filo mobili, quæ habetur in ipso centro: sed tunc, ut monui num. 18, obvenire possent correctiones *majores*, quam necesse sit, efficiendo nimirum, ut planum novum *a*C*b* nusquam tangat positionem convexam, sed ab ea distet, ac etiam, ut eo inclinato versus alterum extremum ut A, decrescat quidem ibi correctio A*a*, sed crescat nimis correctio B*b*, quod præstat evitare, ut correctio *maxima evadat minima* earum, quæ haberi possunt. *Sic potuisset relinqui filum fixum*, & *mobile* in eo fortuito statu, *in quo erat*, *cum instituta* est observatio, quæ prodidit numeros tabellæ positos e regione numeri 2 columnæ *1*:

obten-

obtentum fuisset planum transiens per centrum, *adhibitis lamellis* crassitudinis, quæ ibidem habetur e regione numeri 3, & *est ipsa* distantia curtata per distantiam centri. Sed comparando eos numeros cum numeris, qui habentur in fine cujusvis columnæ, patebit, correctionem maximam futuram fuisse majorem: nam in postrema columna occurrit ibi 84 *in* quarta linea pro 71, quod habetur in tertia; præter quam quod nullus relinquitur ibi locus sine correctione, dum in fine columnarum occurrit bis zero, & hinc 2, inde 4, quibus mederi potest sola *cochlearum pressio imminuta*.

36. Correctio poterat obvenire etiam multo major, & obvenisset, nisi filum fixum fuisset in eâ observatione collocatum ita, ut extrema puncta limbi haberent distantias parum *inæquales*, cujusmodi sunt 109, & 125 in tertia, & postrema columna e regione numeri 2 columnæ 1, & cylindrulus centralis ita promotus, ut distantia ibi particularum 40 esset parum diversa a distantia limbi 53 in situ maximæ prominentiæ in puncto graduum 65. Eam collocationem filorum parum abludentem a postrema, ad quam demum deveni, adhibueram post alia tentamina, quæ per *alias præcedentes observationes statum ipsius limbi exhibuerant vero proximum*. Notandum autem & *illud: si ob minus* accuratam determinationem primam distantiarum, vel ob aliam rationem quamcumque filum fixum non esset ita collocatum, ut correctionis maximæ magnitudo non esset minima, & ut nullum punctum esset sine correctione; adhuc id non obesset reductioni limbi ad quoddam planum, qui est præcipuus totius hujusce perquisitionis scopus. Id semper habebitur, si distantia fili mobilis ab omnibus punctis limbi fuerit æqualis distantiæ a centro, ut patet. Verum adhuc præstat determinare methodis expositis illud minimum in primis, ne ob nimiam crassitudinem lamellarum reddantur inutiles cochleæ priores, & debeant cum impensa majori comparari novæ.

37. Mirari quispiam poterit, cur in omnibus hisce observationibus cylindrulus *ille centralis* ita protrusus sit, ut filum ibi distaret a plano centri; cum videatur satius fore, si id prodeat immediate e centro ipso. Verum ratio præcipua est, quia ita oc-

currunt adhibendæ ubique partes crassiores cunei micrometrici, qui, ut monuimus, in accuratum angulum non desinit, sed est in fine truncatus, quia methodo exposita, qua sum usus, ipsius cras-situdines nimis exiguæ prope cuspidem obtineri non potuissent, cum crura circini proportionis necessario impedita sint prope centrum ita, ut latera interna ejus crurum non habeant facies rect-lineas continuatas usque ad ipsum centrum: deinde cuspis anguli exigui multo minus evaderet firma, & facies ad sensum plenas multo difficilius ibi acquireret, ubi ab exigua illata vi flecteretur: reductio autem distantiarum ab illo plano fili mobilis distante ad planum transiens per centrum est expeditissima per subtractionem continuam distantiæ centralis semper ejusdem: accedit quod illa ipsa lamina centralis plana, in qua habetur foramen circulare, non erat ita accurate posita, ut ejus planum respiceret ipsum limbum: id autem turbasset motum fili mobilis, si id debuisset ipsum illud planum perradere.

38. Redacto limbo ad planum accuratum oportuit inclinare non nihil illam ipsam laminam per interpositionem tenuium lamellarum ita, ut demum ejus superficies extima plana remaneret accurate in plano limbi, quod patuit ope ipsius cunei micrometrici: tendebatur enim filum affixum limbo, sed elevatum non nihil supra ipsum in initio, & in fine quadrantis, quod elevatum tantumdem supra planum ipsum ejus laminæ debebat in utroque ejus extremo distare æque ab ipso filo: planum illud hoc pacto continuatum transibat per duo extrema limbi puncta, adeoque erat cum iis in eodem plano. Habetur ibi planum affixum telescopio, quod debet congruere cum plano ejus laminæ sine ullo hiatu in omni statu telescopii per quadrantem: ante correctionem positionis ejus plani apparebat utique exiguus, sed satis sensibilis hiatus ita, ut se ea plana solum in uno marginis puncto contingerent; qui quidem hiatus post eam correctionem evanuit. Ille limbus in motu circulari fuisset paullatim abrasus per continuum attritum plusquam reliquæ partes, unde multa incommoda profluxissent, inter quæ illud, quod verificatio positionis facta ante ejusmodi attritum debuerit evadere inutilis postea, mutata nimirum

pla-

planorum positione respectiva. Correctio adhibita illi etiam plano occurrit, & ei incommodo.

39. Expositâ hoc pacto fusè omni hac mea methodo deprehendendi errorem plani, & corrigendi, addam illud, posse filum fixum DE figuræ 3 affigi etiam fulcris positis extra ipsum quadrantem, ut clavis infixis parietibus circumjacentibus atque ita, ut vel totum, vel pars ipsius jaceat ultra totum limbum, ut exhibet figura 9. Tum vero filum mobile potest in G circumvolvi fixo bis, vel ter, adjecto exiguo ponduscula P, ut globulo e cera molli, quod ponduscululum deprimit non nihil ipsum filum fixum in angulum quemdam, sed non removet a plano verticali: ad evitandam eam etiam flexionem potest idem filum mobile longius productum motu lentissimo adduci ad fixum ab aliquo adjutore, qui interea manum habeat innixam fulcro cuipiam, vel sellæ, vel pavimento, ut nimirum sine tremore adveniat ad contactum cum ipso filo fixo, quin ei ullam vim inferat, & in ea positione perstet, dum cuneus adhibetur. In ea positione fili mobilis promovetur in F cuneus inter filum CG, & limbum, donec ipsum illud filum contingat, & exhibeat ejus distantiam a limbo, qui contactus determinatur adhuc evidentius per imaginem fili ipsius, quam exhibet polita cunei superficies: nam ea imago in ipso contactu coujungitur cum eodem filo. Eam etiam methodum adhibui consentientibus observationibus.

40. Quæ diximus huc usque, pertinent ad verificationem quadrantis positi in situ verticali. Idem examen ego prius institueram collocato eodem in positione proxime horizontali: & primo quidem tentavi examen per filum fixum, & mobile; sed statim vidi, nihil inde satis accurati erui posse, cum nimirum filum ipsum utcumque magna vi tensum habeat semper curvaturam aliquam, quod etiam disrumpitur, si tendatur majore vi: fila autem metallica præter exiguam curvaturam, quam accipiunt a pondere, sæpe ex ipsa contorsione, quam acquirunt dum agglomerantur, ut transferri possint, vel ex pressione fortuita, conservant curvaturam, vel flexum ita, ut nulla vi ad positionem satis rectilineam adduci possint. Consideravi, quid obtineri posset

 per

per regulas ligneas, quarum altera esset fixa, altera *mobilis*: sed tantæ magnitudinis debebant esse, ut earum tractatio esset perquam incommoda, & accuratæ rectitudini in tantâ longitudine fidendum non esse videretur. Hinc demum illud menti incidit, ut instituerem comparationem cum plano accurate horizontali, quale obtinere poteram ope superficiei *aquæ se componentis* ad libellam, quod mihi quidem optime successit sequenti methodo.

41. Imposui ipsum *quadrantem tribus fulcris bene solidis*, quæ collocaveram versus *centrum*, *prope initium zero*, & *prope 60°*: in posterioribus binis aderat *tigillum*, quod ope *cochlearum* crassiorum elevari posset non nihil, ac deprimi. Paraveram autem canalem *ligneum*, qui *superficie* sua *interiore circumibat* exteriorem limbi, tum *rectilineus* pergebat ad latus centri, qualem in fig. 10 videre est, in DEFG: id pice obductum bene aquam continebat: ipsi imposui cimbulam (fig. 11) AB, e cujus medio prodibat filum ferreum EF tanquam malus quidam, *quod deinde incurvatum* descendebat ad latus in G desinens in cuspidem: immissâ cymbulâ *in canalem semiplenum aquâ*, adducebam cuspidem G ad *limbum ita, ut ab eo distaret non nihil, sed minus*, quam *pro maxima crassitudine cunei micrometrici: ut autem ubique i*dem cuneus usui esse posset, ita movebam ope cochlearum planum ipsum quadrantis, ut acquireret positionem quam proxime horizontalem, elevando, vel deprimendo ibi, ubi fili ferrei cuspis tangebat limbum, vel ab eo distabat nimis: nam elevatione minuitur altitudo aquæ, depressione augetur. Promotâ cymbâ per totum canalem, cuspis fili ferrei describebat semper planum accurate horizontale: cuneus autem micrometricus innixus limbo, & lente promotus, donec superior ejus superficies contingeret cuspidem, exhibebat distantias centri, & singulorum punctorum limbi ab illo plano. Cætera omnia peragebantur, ut supra, per distantias a filo mobili, nam tota methodus reducitur ad comparationem centri, & limbi cum plano quocumque, ex qua deducatur comparatio cum plano transeunte per centrum, & bina puncta ipsius limbi ad arbitrium selecta.

42. Porro cymbula eandem ubique positionem habet *accurate*,

dum

dum libere in aqua innatat, adeoque cuspis fili ferrei semper accurate eandem habet depressionem infra superficiem aquæ utique horizontalem, & proinde semper est in eodem quodam plano horizontali. At si ipsa cymbula contingat latus canalis, tum vero ob curvaturam superficiei aquæ prope latera, & ob aliquam cymbulæ, & laterum scabritiem facile admodum intorquetur non nihil, & observatorem fallit. Ea de causa e binis veluti transtris CC, C'C' eduxeram teretes bacillos CD veluti alios quosdam malos: in canali autem erexeram (fig. 12) e spondis AA', BB' regulas ED, E'D' verticales per intervalla, quæ sustinerent alias regulas ligneas horizontales DD' procurrentes ex parte interna supra superficiem aquæ ita, ut remaneret spatium inter ipsas pro malis cymbulæ paulo majus quam pro distantia malorum. Eo pacto cymbula semper progrediebatur prope medium canalem, quin posset applicari ad spondas; sed erat admodum libera ejus positio, & sibi semper conformis: filum autem ferreum altius iis horizontalibus regulis, & supra ipsas incurvatum in morem fornicis cujusdam, nullum ab ipsis habebat impedimentum.

43. Eo pacto obtinui distantias, & errores satis conformes, repetitis observationibus post variatam etiam per cochleas inclinationem plani quadrantis, & quantitatem aquæ in canali; sed variationibus pluribus institutis, inveni demum, me oleum, & operam perdidisse. Licet machinamentum videretur firmum, & quadrans ferreus, qualis a Domino de La-Lande describitur in sua Astronomia, esset munitus bene latis, & satis crassis regulis transversalibus, ac a Caniveto constructus, adhuc tamen ob ingentem, ut credo, cochlearum numerum, quæ regulas conjungebant, suo ponderi cedebat ita, ut posteaquam fulcrorum ipsorum mutavi loca, invenerim limbum non nihil concavum ibi, ubi prius erat convexus. Hinc omisso consilio verificationis in plano horizontali, suscepi aliam, quam hic superius fuse exposui, in plano verticali, suspendendo ipsum quadrantem in ea positione e furca erecta in medio conclavi. Inveni errores, & correxi: tum ipsum quadrantem applicavi ad murum, in eo ipso loco, in quo debet adhiberi pro observationibus, & aptatis ibi iterum filis fixo, &

mo-

mobili, inveni nullum jam superesse errorem binarum particularum *in* plano limbi.

44. Adhuc canalis, & *cymbulæ* mihi usui sunt cum cuneo micrometrico, sed canalis rectilineus, pro examine plani lineæ meridianæ, *cujus* ope inveni altitudinem *poli* prorsus consentientem cum ea, quam exhibent observationes *fixarum* habitæ sextante pedum sex. Cuneum micrometricum adhibui etiam pro examine plani, & positionis axium *sextantis*, adhibita *non* ineleganti, & utilissima *methodo, quæ occurret in Opusculo* VII.

OPU-

OPUSCULUM III.

DE ERRORIBUS COLLOCATIONIS QUADRANTIS MURALIS DEPREHENDENDIS, ET CORRIGENDIS.

LEMMA (*). Si in triangulo sphærico aPb (Tab. II fig. 1), bina latera Pa, Pb sint proxima quadrantibus PA, PB; invenietur facile relatio inter eorum complementa Aa, Bb, & complementa angulorum ad basim ab. Fiant latera ipsa $Pa = z$, $Pb = y$, anguli autem Pba, Pab ipsis oppositi dicantur r, q, ac basis ab sit $= x$: priorum quatuor complementa designentur litterâ d ita, ut sit $Aa = dz$, $Bb = dy$, qui valores censeantur positivi, ubi latus, vel angulus deficit a $90°$. Sit angulus AaE rectus, occurrente arcu aE arcui PB in E, arcui AB producto, si opus sit, in C; eritque $baE = dq$.

2. Patet, ob angulos CAa, CaA rectos fore CA, Ca quadrantes, adeoque EC erit complementum aE, sive quam proxime complementum ab. Est autem tam $sin.Ca$ ad $sin.Aa$, quam $sin.CE$ ad $sin.EB$, ut radius ad $sin.Ca$, ob angulos ad A, & B rectos. Hinc posito 1 pro $sin.Ca$, & dz, EB pro sinubus exiguorum arcuum Aa, EB, ac $cos.x$ pro $sin.CE$, erit $1 : cos.x :: dz : dz\,cos.x = BE$. Tum $sin.aEB = 1$ (cum nimirum is angulus debeat esse proximus recto) : $sin.EAb = dq :: sin.ab = sin.x : sin.Eb = Eb = dq\,sin.x$. Hinc $BE + Eb = dz\,cos.x + dq\,sin.x = Bb = dy$: nimirum 1°. $dy - dz\,cos.x - dq\,sin.x = 0$.

3. Con-

(*) Integra theoria pertinens ad nexum, quem habent inter se exiguæ differentiæ terminorum pertinentium ad triangula, habetur in alio Opusculo, quod erit hujus Voluminis XV, cum pluribus applicationibus. Hic proponuntur ea sola, quæ pertinent ad hoc argumentum cum demonstrationibus theorematum adhibitorum in hoc Opusculo.

3. *Constat* autem, in Trigonometria sphærica mutari latera in angulos, & viceversa, si substituantur utrisque ipsorum supplementa. Porro defectus a quadrante in uno arcu, est excessus in supplemento, adeoque dy, dz, dq, abeunt in $-dq$, $-dr$, $-dy$; arcus autem ab, qui est proximus arcui AB, migrat in angulum, qui erit ejus supplementum, eritque $sin.x$ ejusdem valoris etiam post eam mutationem, at $cos.x$ migrabit in $-cos.x$ ob cosinum suplementi alterius negativum respectu cosinus alterius. Quare erit $dr\,cos.x - dy\,sin.x = -dq$, sive 2°. $dq. + dr\,cos.x - dy\,sin.x = 0$.

4. Quod si triangulum aPd sit isosceles, & arcus secans bifariam angulum aPd occurrat basi ad in e, ubi eam secabit bifariam, & ad angulos accurate rectos; poterit aptari formula secunda triangulo Ped rectangulo ad e; in quo sit P$d = y$, P$de = r$, ut prius, sed basis sit $de = \frac{1}{2}x$ pro x, & angulus ad $e = q$, qui cum sit rectus, erit $dq = 0$, adeoque $dr\,cos.\frac{1}{2}x - dy\,sin.\frac{1}{2}x = 0$, sive dividendo per $cos.\frac{1}{2}x$, & ponendo $tan.$ pro $\frac{sin.}{cos.}$, erit $dr - dy\,tan.\frac{1}{2}x = 0$: ea æquatio pertinebit ad triangulum isoscelium aPd, in quo combinatur *complementum* lateris utriuslibet cum anguli utriuslibet complemento (sunt enim æqualia): adeoque si ibi dicatur P$a = z$, & angulus ad $a = q$ oppositus lateri P$d = y$; erit itidem $dq - dz\,tan.\frac{1}{2}x = 0$.

5. *Scholium*. Ponemus tertium theorema primo loco, quod habebit locum in triangulo isoscelio, cujus latera ambo $= z$, ambo anguli $= q$: reliqua pro quovis triangulo, in quo latera y, z, anguli iis oppositi q, r, basis autem utrobique x.

$$\text{I}.\; dq - dz\,tan.\tfrac{1}{2}x = 0$$
$$\text{II}.\; dy - dz\,cos.x - dq\,sin.x = 0$$
$$\text{III}.\; dq + dr\,cos.x - dy\,sin.x = 0.$$

6. Ope horum theorematum connectitur pro *triangulo isoscelio* complementum utriuslibet lateris cum complemento anguli in I, & pro quovis triangulo complementa binorum laterum cum complemento alterius anguli in II, complementum utriusque anguli cum complemento alterius lateris in III. Eorum theorematum usus

occur-

occurrit mihi egregius in verificatione positionis quadrantis *muralis*, ubi constet, ipsius limbum jacere totum in eodem *plano*: eadem habent eundem usum etiam pro verificatione positionis instrumenti, quod appellant gallice *instrument des passages*: quod idcirco hìc appellabimus *instrumentum transituum*: appellari etiam solet *telescopium meridianum*. Et hæc quidem præcipua sunt eo in genere theoremata: habentur autem, & alia eodem spectantia, ut basim esse mensuram anguli sibi oppositi sine errore, qui pertingat ad magnitudinem *exiguam ordinis primi*, & *plura* simpliciora, quæ *fluunt* e *theorematis* II, & III, in quibus supponatur alterum latus quadrans, vel alter angulus rectus: eorum deductionem hìc *omitto*, cum in investigatione *sequenti usum non* habeant.

7. *Schol*. 2. Sit AOB (fig. 2) dimidius horizon, in quo O cardo occidentalis, A australis, B borealis, AZB dimidius *meridianus*, in quo Z zenith, P polus borealis: sint autem S, S', S'' tria astra, quorum sint notæ declinationes, adeoque & distantiæ PS a polo: adveniant *ipsa ad telescopii axem* ita, ut innotescat differentia *temporis inter appulsum ad ipsum telescopium*, ac *appulsum ad meridianum*, *cujus momentum haberi potest per altitudines* correspondentes, vel per collationem cum instrumento transituum jam verificato, vel etiam ex eorum ascensione recta bene *cognita*, & horologio exacto ad *meridianam lineam*, vel ad motum fixæ notæ cujuspiam. Eæ differentiæ conversæ in partes æquatoris exhibebunt angulos ZPS, ZPS', ZPS'', qui anguli dicantur errores observati.

8. Quoniam ii errores erunt exigui, instrumento proxime collocato in situ debito, poterunt pro SS', SS'' assumi differentiæ arcuum PS', PS'' a PS, si eæ differentiæ non sint nimis exiguæ (*eam conditionem requiri* facile demonstrari *potest*), & *anguli* SPS', *PSS'*, *ac* SPS'', PSS'' considerari, ut proportionales *suis sinubus*, adeoque *sinubus SS'*, *PS'*, ac *SS''*, *PS''*.

9. Porro erunt *ipsa illa puncta S*, S', S'' in quodam circulo sphæræ cælestis, qui erit maximus, si axis telescopii fuerit perpendicularis axi conversionis: eo casu angulus sphæricus PSS' erit

 = PSS'',

$=$ PSS'': secus punctum S' jacebit extra arcum SS'' circuli maximi, & illi anguli erunt inæquales.

10. Sit E polus circuli transeuntis per S, S', S'', qui erit in O, si axis conversionis fuerit horizontalis, & perpendicularis lineæ meridianæ, ut deberet: secus demisso ED arcu perpendiculari ad horizontem, erit OD deviatio horizontalis ab eo situ perpendiculari, & DE inclinatio ejusdem axis respectu horizontis.

11. Jam vero satis patet, OP fore quadrantem, OPZ angulum rectum *ob polum meridiani situm in* O, & anguli POB mensuram fore elevationem *poli PB. Erunt autem* arcus ES, ES', ES'' inter se æquales, & *proximi quadranti: hinc triangulis* ESS', ESS'' *aptari poterit theorema* I (num. 5) *habendo* SS', SS'' pro basi: & cum etiam EP debeat esse arcus quadranti proximus, poterit etiam triangulo ESP aptari utrumque e reliquis binis, habendo PS pro basi. Id fiet in solutione sequentis problematis, quo ope earum trium observationum determinabuntur ii *tres errores* instrumenti, nimirum aberratio axis *telescopii* a positione perpendiculari ad *axem conversionis*, *deviatio* hujus axis a cardine *occidentali*, & *deviatio ejusdem a positione horizontali*.

12. *Problema*. *Per observationem trium fixarum appellentium* ad axem telescopii quadrantis muralis, vel *instrumenti transituum*, determinare deviationem ejusdem axis a positione perpendiculari ad axem *conversionis*, & axis conversionis a recta perpendiculari ad lineam meridianam secundum horizontem, ac a plano horizontis ipsius.

13. Fiant PS, PS', PS'' $= c, c', c''$, SS' $= c - c' = x$ (*), SS'' $= c - c'' = x'$, anguli ZPS, ZPS', ZPS'' $= e, e', e''$, ac sit ES $= z$, ESS' $= r$, ESS'' $= r'$. Erit primo $sin.$SS' $= sin.x :$ $sin.$PS' $= sin.c' ::$ SPS' $= e - e'$: PSS' $= \frac{sin.c' \times (e - e')}{sin.x}$,

qui valor si dicatur m, erit pariter PSS'' $= m' = \frac{sin.c'' \times (e - e'')}{sin.x}$.

Qua-

(*) Hic valor est utique cognitus, sed appellatur x correlative ad valores formularum numeri 5, ut & valores z, y assumuntur relate ad easdem formulas, quæ hic applicantur ad casum hujus figuræ.

Quare innotescent eorum angulorum valores m, m', qui si fuerint inæquales, patebit, haberi in positione instrumenti primum e tribus illis erroribus.

14. Magnitudo ejus erroris facile invenietur ope theorematis I: erit enim $dq = dz\tan.\frac{1}{2}x$, $dq' = dz\tan.\frac{1}{2}x'$. Hinc ESS' $= 90° - dq = 90° - dz\tan.\frac{1}{2}x$, & pariter ESS'' $= 90° - dz\tan.\frac{1}{2}x'$, adeoque ESS' — ESS'' $= - dz\tan.\frac{1}{2}x + dz\tan.\frac{1}{2}x'$. Porro itidem ESS' — ESS'' $=$ PSS' — PSS'' $= m - m'$. Quare $dz = \frac{m - m'}{-\tan.\frac{1}{2}x + \tan.\frac{1}{2}x'}$, qui valor datur ob datos valores m, m', x, x'.

15. Jam in triangulo ESP sit ES $= z$, ut prius, tum EP $= y$, EPS $= r$, ESP $= q' = 90° - dq'$, qui valor cum sit ESS' — PSS' $= 90° - dq - m$, erit $dq' = dq + m$. Erit autem ibi basis PS $= c$, quæ in theoremate II, & III $= x$. Hinc ex theor. II erit dy, sive EF $= dz\cos.c + dq'\sin.c = dz\cos.c + (dq + m)\sin.c$.

16. Erit itidem ex III $dr = -\frac{dq'}{\cos.c} + \frac{dy\sin.c}{\cos.c} = -\frac{dq + m}{\cos.c} + dy\tan.c$. Cum igitur sit EPS $= r = 90° - dr$, ZPS $= e$; erit ZPE $= 90° - dr + e$, & ob ZPO $= 90°$ fiet OPE, sive ejus mensura OF $= - dr + e = \frac{dq + m}{\cos.c} - dy\tan.c + e$.

17. Habitis OF, EF, habebitur angulus EOF, cujus cotangens $\frac{\text{OF}}{\text{EF}} = \frac{\frac{dq + m}{\cos.c} + e}{dy} - \tan.c$. Is angulus fiat $= b$, altitudo poli $= a$, & ob angulum POF rectum erit POE $=$ POF — EOF $= 90° - b$, & EOD $=$ POB — POE $= a + b - 90°$, adeoque DEO complementum ipsius $= 180° - (a + b)$, sive supplementum $a + b$.

18. Jam vero ob angulos ad F, D rectos sunt OD, ED sinus, & cosinus anguli DEO, sive $\sin.(a + b)$, & $-\cos.(a + b)$ ad radium EO, ad quem EF $= dy$ est sinus anguli EOF $= b$: cosinui præpositum est signum negativum, cum cosinus supple-

 men-

mentorum habeant signa contraria. Hinc secundus error OD $= \frac{dy\,sin.(a+b)}{sin.b}$, tertius ED $= -\frac{dy\,cos.(a+b)}{sin.b}$. Q. E. Inveniendum.

19. *Schol.* 1. Invento primo errore, reliqui duo inveniri possunt methodo alia simpliciore: eam hic evolvam, tum exhibebo aliam solutionem ejusdem problematis, quibus peractis proponam data, & quæsita cum serie formularum omnium erutarum ope methodi utriusque, ac demum adjiciam methodum, qua corrigi possint ii errores singuli, ubi deprehensi fuerint per observationes institutas, & formulas applicatas observationibus ipsis.

20. Sit AOB idem horizon in fig. 3, qui in 1, AZB idem semimeridianus cum polo P, & zenith Z, eadem loca extremorum astrorum cum arcu SS'' circuli descripti ab axe telescopii, & transeuntis per loca omnium trium astrorum, ac arcus idem ED perpendicularis horizonti. Patet, arcus ES, ES'' productos ad meridianum in M, M'' fore proxime perpendiculares arcubus PS, PS'', quibus essent perpedic ulares accurate, si punctum E congrueret cum O, & ii arcus cum ipso meridiano. Hinc erit ut $sin.PSM = 1$, ad $sin.SPM = sin.e = e$, ita $sin.SP = sin.c$ ad $sin.SM$, nimirum ad ipsum arcum $SM = e\,sin.c$, & pariter erit $S''M'' = e''sin.c''$, quo pacto errores angulares observati reducuntur ad partes circuli maximi. Sit circulus maximus FNG parallelus circulo SS'', qui itidem habebit polum in E. Occurrat is meridiano in N, ac arcubus SM, S''M'' in s, s'': erunt arcus Ss, $S''s''$ æquales primo illi errori invento dz, qui demendus erit ab erroribus SM, S''M'' pertinentibus ad circulum non maximum descriptum ab axe telescopii obliquo respectu axis conversionis ad habendos sM, $s''M''$ errores pertinentes ad circulum maximum, qui describeretur ab eodem axe telescopii correcto, & redacto ad directionem perpendicularem axi conversionis. Dicantur n, n'' ii ipsi valores, & secto bifariam arcu MM'' in Q, sit $NQ = u$: erit MM'' quamproxime $= ss'' = c - c''$, adeoque MQ semidifferentia arcuum NM, NM'' $= \frac{1}{2}(c - c'')$, & QN $= u$ eorum semisumma. Facile autem perspicitur, fore

quam-

quamproxime sinus arcuum ipsorum sM, $s''M''$ ad se invicem, uti sunt sinus sN, $s''N$ ad se invicem, cum illorum sinus ad sinum anguli sNM sint, ut sinus sM, $s''M''$ ad sinum anguli NsM proximum recto. Quare erit $n - n'' : n + n'' :: sin.NM - sin.NM'' : sin.NM + sin.NM'' :: tan.\frac{1}{2}(NM - NM'') = tan.NQ = tan.\frac{1}{2}(c - c'') : tan.\frac{1}{2}(NM + NM'') = tan.u = \frac{(n+n'')tan.\frac{1}{2}(c-c'')}{n-n''}$.

21. Invento NQ habetur $MN = u + \frac{1}{2}(c - c'')$, tum $PQ = c - u - \frac{1}{2}(c-c'') = \frac{1}{2}(c+c'') - u$, ac ejus ope ZN, qui posito PZ complemento elevationis poli $= a'$, erit $\frac{1}{2}(c + c'') - u - a'$: dicatur is r. Quod si arcus polo N intervallo NE, qui debet esse quadrans ob E polum circuli FNG, occurrat arcubus NG, NB in HI; erit & NH quadrans, adeoque $NZ = BI = r$ mensura anguli EOD: tum HI mensura anguli HNI erit æqualis arcui OE ob EH, & OI quadrantes (sunt enim O, E poli circulorum NB, NG), quæ mensura facile invenitur: est enim ut sinus $NM = sin.(u + \frac{1}{2}(c-c''))$ ad sinum anguli MsN quamproxime recti $= 1$, ita sinus sM, sive ipse arcus $sM = n$ ad sinum sNM, sive ad ipsum angulum, vel HNI oppositum ad verticem, nimirum ad ejus mensuram $HI = OE = \frac{n}{sin.(u+\frac{1}{2}(c-c''))}$, qui valor dicatur t. Porro est secundus error $OD = OE \times cos.EOD = t\,cos.r$, tertius $ED = OE \times sin.EOD = t\,sin.r$. Quamobrem datur uterque.

22. *Scholium* 2. En aliam methodum solvendi totum problema, quæ nullo indiget lemmate, sed pendet a solis notissimis Geometriæ, & Trigonometriæ principiis. Sit in fig. 4 ut in 1 AOB semihorizon, AZB semimeridianus cum iisdem punctis S, S', S'', Z, P, E, D, & cum productione arcuum ES usque ad meridianum in M, ut in fig. 3, eruntque, ut num. 20 $SM = e\,sin.c$, $S'M' = e'\,sin.c'$, $S''M'' = e''\,sin.c''$. Polis M, M', M'', quæ omnia puncta distant ab O polo medidiani per quadrantem, sint arcus OI, OI', OI'', qui ab arcubus ME abscindant quadrantes MI, M'I', M''I'', & posito primo errore itidem $= dz$, erit

erit $ES = 90^\circ - dz$, $EM = 90^\circ - dz + e\,sin.c$, $EI = e\,sin.c - dz = n$, & eodem pacto $EI' = e'\,sin.c' - dz = n'$; $EI'' = e''\,sin.c'' - dz = n''$. Demum angulorum MEM', MEM'', M'EM'' mensuræ veris proximæ erunt arcus MM', MM'', M'M'', quæ essent eorum mensuræ accuratæ, si puncta E, O congruerent.

23. Consideretur jam polygonum OII'I''ED, in qua anguli OIE, OI'E, OI''E, ODE sunt recti, adeoque puncta I, I', I'', D erunt in peripheria circuli habentis pro diametro OE. Hinc ea diameter ad quamvis e chordis *II'*, *II''*, *I'I''* *est*, ut *radius ad sinum sui* anguli IEI', IEI'', I'EI'', quem *subtendunt ad peripheriam;* cum nimirum is sit dimidius ejus, quem *eædem chordæ* subtenderent ad centrum, & *sinus dimidii* anguli sit *dimidia chorda totius*, ut radius est *dimidia diameter*. Quare *si* fiat $OE = t$, ut in fig. 3, erunt $II' = t\,sin.(c - c')$, $II'' = t\,sin.(c - c'')$, $I'I'' = t\,sin.(c' - c'')$. In quadrilineo autem II'I''E inscripto in circulo est $II' \times EI'' + I'I'' \times EI = II'' \times EI'$. Quare fiet $t\,sin.(c - c') \times e''\,sin.c'' - tdz\,sin.(c - c') + t\,sin.(c' - c'') \times e\,sin.c - tdz\,sin.(c' - c'') = t\,sin.(c - c'') \times e\,sin.c' - tdz\,sin.(c - c'')$, *translatis terminis*, & abeunte valore t communi *per divisionem*, *relinquetur valor primi* erroris $dz =$

$$\frac{e''\,sin.c''\,sin.(c - c') + e\,sin.c\,sin.(c' - c'') - e'\,sin.c'\,sin.(c - c'')}{sin.(c - c') + sin.(c' - c'') - sin.(c - c'')}.$$

24. Hinc jam innotescent $EI = e\,sin.c - dz = n$, $EI'' = e''\,sin.c'' - dz = n''$, & in triangulo IEI'' præter latera cognita habetur angulus IEI'' $= (c - c'')$, adeoque & summa angulorum ad basim II'' $= 180^\circ - (c - c'')$, & semisumma $= 90^\circ - \frac{1}{2}(c - c'')$. Porro est summa laterum ad differentiam, ut tangens semisummæ ad tangentem semidifferentiæ, adeoque ob cotangentes reciprocas tangentium, si complementum semidifferentiæ dicatur u, erit $n - n'' : n + n'' :: cot.(90^\circ - \frac{1}{2}(c - c''))$ $= tan.\frac{1}{2}(c - c'') : tan.u = \frac{(n + n'')\,tan.\frac{1}{2}(c - c'')}{n - n''}$, valor idem, qui num. 20. Si autem semisummæ $90^\circ - \frac{1}{2}(c - c'')$ addatur semidifferentia $90^\circ - u$, habebitur angulus EI''I oppositus lateri $n = 180^\circ - u - \frac{1}{2}(c - c'')$, cujus supplementum cum sit angulus

gulus EOI oppositus in quadrilineo, erit is $= u + \frac{1}{2}(c - c'')$. Est MOB = MP + PB $= c + a$, & MOI $= 90°$ ob M polum arcus OI: *hinc* erit MOE $= 90° + u + \frac{1}{2}(c - c'')$, qui demptus ab MOB $= c + a$, relinquet EOD, sive $r = c + a - 90° - u - \frac{1}{2} sin.(c - c'')$, ubi ob $a' = 90° - a$, & $\frac{1}{2}(c + c'') = c - \frac{1}{2}(c - c'')$ fiet EOD $= r = \frac{1}{2}(c + c'') - u - a'$ prorsus, ut num. 21.

25. Porro est $sin.$EOI $= sin.(u + \frac{1}{2}(c - c'')) : sin.$EIO $=$ 1 :: EI $= n$: EO $= t = \dfrac{n}{sin.(u + \frac{1}{2}(c - c''))}$, itidem ut ibidem. Hinc & errorum OD, ED secundi, ac tertii redeunt valores iidem $t\,cos.r$, $t\,sin.r$.

26. *Scholium* 3. Apponemus hìc unico intuitu conspiciendos valores datos, cum utroque formularum systemate: in utroque invenitur prius seorsum valor primi erroris, tum valores reliquorum simul ita, ut post inventum illum utrâvis methodo liceat hos deinde determinare utrâvis ad libitum.

VALORES DATI

Altitudo poli cum suo complemento	a, a'
Distantiæ astrorum a polo	c, c', c''
Errores angulares observati (num. 7)	e, e', e''

PRIMUM SYSTEMA

Pro primo errore quæsito.

Num. 13 . . . . $\begin{cases} m = \dfrac{sin.c' \times (e - e')}{sin.(c - c')} \\ m' = \dfrac{sin.c'' \times (e - e'')}{sin.(c - c'')} \end{cases}$

Num. 14. Primus error quæsitus .. $dz = \dfrac{m - m'}{-tan.\frac{1}{2}(c - c') + tan.\frac{1}{2}(c - c'')}$

Pro reliquis binis erroribus

Num. 14 . . . . $dq = dz\,tan.\frac{1}{2}(c - c')$

Num.

Num. 15 . . . . $dy = dz\cos.c + (dq + m)\sin.c$

Num. 17 . . . . $\cot.b = \dfrac{\dfrac{dq+m}{\cos.c} + e}{dy} - \tan.c$

Num. 18 .. Error secundus quæsitus . . . . . $+ \dfrac{dy\sin.(a+b)}{\sin.b}$

Error tertius quæsitus . . . . $- \dfrac{dy\cos.(a+b)}{\sin.b}$

Secundum systema

Pro primo errore quæsito

Num. 23 . Is error . . . .

$$dz = \frac{e''\sin.c''\sin.(c-c') + e\sin.c\sin.(c'-c'') - e'\sin.c'\sin.(c-c'')}{\sin.(c-c') + \sin.(c'-c'') - \sin.(c-c'')}$$

Pro reliquis e num. 20, 21, vel e num. 24, 25

$$n = e\sin.c - dz,\ n'' = e''\sin.c'' - dz,\ \tan.u = \frac{(n+n'')\tan.\frac{1}{2}(c-c'')}{n-n''}$$

$$r = \tfrac{1}{2}(c+c'') - (u+a'),\ t = \frac{n}{\sin.(u+\frac{1}{2}(c-c''))}.$$ Error secundus $t\cos.r$: Error tertius $t\sin.r$.

27. In hisce formulis valores c sunt positivi, si astrum jaceat a polo ad austrum, negativi, si ad boream: valores e sunt positivi, si astrum appellat prius ad meridianum, quam ad instrumentum, negativi, si post. Si valor primi erroris obveniat positivus; axis telescopii productus ultra centrum deflectit a positione perpendiculari debita in orientem, si negativus in occidentem. Si valor secundi fuerit positivus, axis conversionis ex parte orientali deflectit versus boream; si valor tertii obvenerit positivus, idem ex eadem parte elevatur supra horizontem: si fuerint negativi, deflectit versus austrum, & deprimitur infra horizontem.

28. Satis patet, pro primo errore esse magis expeditam formu-

mu-

mulam primi systematis : in ea enim singuli termini numeratoris m, m' constant tribus valoribus, & sunt duo, dum in formula secundi numerator habet tres eodem modo compositos e ternis valoribus singulos : utrobique autem logarithmi æque adhiberi possunt, & quidem sine partibus proportionalibus, cum in valoribus c, c', c'', $c - c'$, $c - c''$, $c' - c''$ secunda contemni possint, & vero etiam aliquot prima, sine notabili errore quantitatum exiguarum, quæ quæruntur. Tantum ubi e logarithmis, qui obtinentur pro singulis terminis, quæruntur ipsi termini, oportet valores ipsorum assumere etiam cum altero, vel binis decimalibus, si ob nimis exiguam distantiam punctorum meridiani, ad quæ appellunt astra, differentia valorum denominatorem constituens obveniat nimis exigua, adeoque numeratorem nimis augeat. Sine ejusmodi attentione bina systemata iisdem datis innixa non exhibebunt eosdem errores. At in casu, in quo ii denominatores sint nimis exigui, valores determinati erunt minus accurati, cum error perquam exiguus in observatione secum trahat errorem nimis magnum in valoribus quæsitis. Quare cavendum maxime, quæ observationes seligendæ sint ad rem bene perficiendam. Pro denominatore satis erit ipsas tangentes, vel sinus assumere e tabulis, cum partium proportionalium nullus futurus sit usus, tum instituere divisionem numeratoris per denominatorem etiam sine logarithmis, cum paucæ admodum notæ in quoto sufficere debeant ob erroris exiguitatem.

29. Pro reliquis erroribus calculus erit brevior, si adhibeantur formulæ secundi systematis, ubi singulæ formulæ, quæ multiplicationem, & divisionem requirunt, sunt simplices unico constantes termino : nam summæ & subtractiones pro nihilo habendæ sunt ob facilitatem operationis.

30. *Scholium* 4. Pro corrigendis his erroribus plures methodi adhiberi possunt : considerabimus autem hic quadrantem tendentem versus austrum, quem exhibent figuræ, posito polo P ad partes oppositas appulsui fixarum respectu zenith Z, facile quæ hic proponuntur transferri poterunt ad alterum, qui adhibeatur tendens ad boream. Primus error consistit in eo, quod illa, quæ in telescopiis dioptricis appellatur linea fiduciæ, & tendit ab in-

tersectione filorum, quæ habetur in foco objectivi, ad *punctum objecti* visum in ea intersectione, non est accurate perpendicularis axi, circa quem alidada convertitur. Ubi vitrum objectivum est, ut vocant, bene centratum, axe ipsius objectivi transeunte per centrum aperturæ, & per intersectionem eandem, quod pertinet ad optimam telescopii constitutionem, *linea fiduciæ* est ipse axis: hinc is error consistit in eo, quod ipse axis telescopii, non continet angulum accurate rectum cum axe conversionis. *Hic axis necessario est perpendicularis plano* quadrantis, & hujus limbo semper *applicetur alidada deferens telescopium* ipsum. Quare si, observationibus *institutis*, & calculo *applicato*, inveniatur *aliquis valor pro* primo errore dz; constabit, axem ipsum *telescopii non esse parallelum* plano *quadrantis*, sed ita *inclinatum*, ut centrum objectivi sit propius plano ipsi, quam intersectio filorum, vel ab eo remotius, prout ipse error obvenerit positivus, vel negativus, quia in primo casu axis telescopii continebit cum axe conversionis producto versus *orientem angulum* acutum, & in secundo *obtusum*, *adeoque in* illo arcus ES (fig. 3) erit minor quam *Es*, *quo casu valorem* dz *appellavimus* positivum.

31. *Hinc in eo casu oportebit vel removere objectivum* a plano quadrantis, vel admovere ipsi *intersectionem filorum*. *Res* esset admodum expedita, si tubus telescopii esset ita adnexus alidadæ, ut ope *cochlearum* posset alterutrum ex ejus capitibus ipsi admoveri, vel ab ea removeri. In casu erroris primi positivi admovendum esset alidadæ caput imum, quod continet ocularem proximam foco, in quo habetur illa intersectio, vel removendum ab ipsa caput summum, quod continet vitrum objectivum. Quod si tubus telescopii est ita affixus alidadæ, ut ex neutra parte possit ad ipsam accedere, vel recedere ab ipsa, adhuc tamen si tubus esset aliquanto amplior, posset ita aptari ipsi theca continens objectivum, ut ope cochlearum *hoc* intra ipsam posset promoveri vel versus planum *quadrantis*, vel ad partem oppositam. Itidem posset aptari tubo ipsi *theca* in foco objectivi continens fila, ut ope cochlearum posset ipsa intersectio filorum affixa laminæ mobili admoveri alidadæ, vel ab ipsa removeri.

32. *Si*

32. Si nullum ejusmodi motum præbuerit artifex aptatum tubo, adhuc poterit removeri non nihil a plano quadrantis alidada versus centrum ab eodem quadrantis plano, affixâ ibi lamellâ plano alidadæ congruenti cum plano limbi, & abradendo aliquid ab ejus crassitudine poterit ipsa admoveri eidem plano. Non licet alidadam ipsam admovere limbo, vel ab eo removere prope focum, cum ibi ea habeat adnexum planum nonii, vel saltem indicem ita, ut applicetur immediate plano limbi ipsius, & denotet in ejus divisionibus angulos. Potest tamen immotis reliquis omnibus admoveri intersectio filorum plano quadrantis, vel removeri ab ipso per motum fili perpendicularis filo horizontali. Fila ipsa solent esse affixa laminæ perforatæ, quæ extrahi possit, ut si forte disrumpantur, possint restitui: locus applicationis mutatus non nihil versus alidadam, vel versus partem oppositam admovebit ipsi intersectionem filorum, vel eam removebit: tum axi telescopii succedet illa linea fiduciæ, quæ erit non nihil inclinata ad axem telescopii: sed si ea inclinatio fuerit exigua; nihil ad sensum officiet exactæ determinationi angulorum.

33. Evitaretur utique hic error primus, si artifex ita præparasset omnia, ut axis telescopii esset accurate parallelus plano alidadæ congruenti in altero extremo cum plano centri quadrantis, & in altero cum plano limbi. Habentur methodi, quæ artificem dirigant, ad obtinendum eum parallelismum, sed eæ admodum difficulter applicantur ingentibus instrumentis: adeoque optimum factu esset, si artifex ipse curaret, ut haberi possent motus indicati, per quos Astronomus possit ipse corrigere id genus erroris deprehensum per formulas hujus Opusculi, & ubi id desit, proposuimus methodos supplendi: sed oportet videre, quo pacto Astronomus ipse possit inducere eam determinatam quantitatem motus, quæ axem telescopii, vel lineam fiduciæ adducat ad eum parallelismum.

34. Id quidem facile præstabitur, si habeatur aliquod objectum terrestre in positione horizontali, vel parum remota ab eadem, & in plano meridiani, ad quod dirigi possit alidada cum telescopio. Potest utique cognosci ejus distantia a loco quadrantis vel

ex *mappa ichonographica* urbis, vel per mensuras trigonometricas more solito. Ibi potest collocari tabella, quæ habeat scalam partium, in qua ope linearum transversalium cognosci possit quantitas motus angularis intersectionis filorum promotæ versus orientem, vel occidentem. Innotescet angulus respondens certo numero partium ejusdem scalæ, si fiat, ut *distantia* ejus loci a loco quadrantis ad intervallum earum partium, ita *radius* ad sinum, vel tangentem ejusdem anguli, qui cum debeat esse exiguus habet sinum ad sensum *æqualem tangenti*. *Inde facile* innotescet numerus *partium ejus scalæ, qui respondeat* errori primo determinato ab applicatione formularum. *Directâ* alidadâ *cum* telescopio in eam tabellam, notabitur punctum *lineæ cujuspiam* horizontalis *ejus scalæ*, ad quod tendit *intersectio* filorum: tum immoto *plano quadrantis debebit* mutari *directio* axis telescopii, vel lineæ fiduciæ per motum respondentem errori invento indicatum a partibus scalæ percursis ab intersectione filorum.

35. Secundus error potest corrigi methodo *simili per* eandem tabellam. Is est in fig. 2 arcus OD, deviatio axis conversionis a plano primi *circuli verticalis perpendicularis plano* meridiani, positivus *si deviatio fiat, ut figura exhibet, versus boream. Ipsi* est *æqualis arcus AF figuræ 3, quo recedit a plano meridiani planum FNG parallelum* plano circuli descripti in superficie sphæræ cælestis a productione axis telescopii, sive lineæ fiduciæ, quod est *parallelum plano quadrantis*, is autem arcus abit versus orientem, ubi secundo errore existente positivo, arcus OD abit versus boream. Quare ad ipsum corrigendum, directâ ut prius alidadâ cum telescopio in eandem tabellam, oportebit movere totum planum quadrantis versus orientem, vel versus occidentem, prout secundus error fuerit positivus, vel negativus. Quantitatem motus necessarii ostendet excursus intersectionis filorum per partes scalæ ejusdem respondentes quantitati ejusdem secundi erroris.

36. Si quadrans est ita affixus muro, ut cum ipso cohæreat, limbo clavis affixo muro ipsi, quod vidi perperam adhibitum in nonnullis astronomicis speculis, & habeatur error in positione muri ipsius; is corrigi non potest, & oportet determinare erroris

ris ipsius effectum pro quavis distantia a zenith, *ut habeatur ejus ratio* in singulis observationibus corrigendis per ipsum eum effectum notatum in tabula ad id constructa. At ego cum novam Mediolanensem astronomicam speculam instituendam curavi, suspendi quadrantem a binis fulcris ferreis crassis, & brevibus, horizontaliter dispositis, quorum utrumque habebat suam cochleam: altera *elevando*, vel deprimendo caput alterum radii horizontalis, ipsum inclinabat, cum motu omnium ejus punctorum in circulis verticalibus, *altera movendo motu horizontali* suum punctum suspensionis *agebat in gyrum totum planum quadrantis*, qui motus erat *idoneus ad obtinendam hanc* secundi erroris correctionem. Habebatur *tertia cochlea in fundo*, cui planum quadrantis *tantummodo* innitebatur, & ea *præbebat* eidem *plano positionem* verticalem.

37. Tertius error expressus in fig. 2 ab arcu DE respondet inclinationi axis conversionis respectu horizontis, in quo is deberet *jacere*, & jaceret omnino, si planum quadrantis, cui is axis necessario respondet, *esset accurate verticale*. Is error est itidem positivus, *cum idem axis est elevatus ex parte orientis supra* planum *horizontale: hinc in eo casu ad ipsum corrigendum debet deflecti planum ipsum: ita, ut pars ejus ima accedat ad murum, nimirum* ut alidadâ verticaliter erectâ, intersectio filorum percurrat *per motum plani* quadrantis arcum circuli maximi perpendicularis meridiano versus orientem, quo pacto punctum E descendet ad D. Ea correctio haberi posset itidem ope ejusdem tabellæ cum illa scala, si posset collocari tabella ipsa in recta verticali continuatione axis telescopii in satis magna distantia. Sed id quidem fieri non potest: potest autem obtineri res eadem hoc alio pacto.

38. Adnexâ in ima parte radii verticalis ipsius quadrantis tabellâ *perpendiculari* ad sensum ejus plano, potest e virga adnexa ejus *machinamento* superiori, & procurrente *suspendi* filum tenue cum pondere, quod illam tabellam perradat: tum ope cochleæ, qua planum *ejusdem* quadrantis *inclinetur* ita juxta numer. 36, ut ad positionem *verticalem* adducatur, potest obtineri inclinatio respondens illi tertio errori, quæ ipsum corrigat. Ad eam rem opor-

oportet vel habere admodum accurate tam motum fili per scalam *tabellæ*, quam motum horizontalem cuspidis, e qua filum suspenditur: sed si suspensio fiat in eadem linea horizontali, in qua jacent superiora illa bina fulcra, is motus cuspidis evadit nullus, quia cochlea tertia movet planum illud circa axem horizontalem transeuntem per illa ipsa fulcra superiora: *hinc* ea positio est omnium aptissima pro suspensione ejus fili, cum eo pondere.

39. *Scholium* 5. Corrigendi sunt & alii errores quadrantis. Ii, de quibus hic egimus, *pertinent ad* ascensionem rectam deducendam a tempore appulsus ad Meridianum: duo sunt alia genera errorum, quæ pertinent ad distantiam a zenith & altitudinem supra horizontem, quæ ab iis reddantur erroneæ: alterum pendet a divisione erronea, alterum a collocatione. Pro primo habetur in Opusculo I hujus Voluminis methodus deprehendendi errores divisionum ita, ut possit eorum haberi ratio: nam communiter in quadrantibus, qui sunt in usu, corrigi non possunt. *Præstaret*, ita curare divisiones quadrantis, ut *essent mobiles ad arbitrium* Astronomi. Id quidem *fieri posset*, *si nimirum* singulæ divisiones constarent *punctulis insculptis lamellis* ex aurichalco arctis, *quas limbo ferreo impositas continerent* ferreæ regulæ *cochleis compressæ*: *relaxatis cochleis* possent promoveri lamellæ quantum requireret accurata æqualitas intervallorum, tum iterum comprimi per easdem *cochleas*. Haberetur autem & illud commodi, quod differentia dilatationis ferri, & aurichalci nihil obesset, quæ nocere non nihil potest, ubi machinamento ferreo adnectitur limbus ex aurichalco perpetuus.

40. Pro secundo errore corrigendo efficiendum, ut nonio, qui est adnexus telescopio, denotante zero, intersectio filorum spectet ipsum zenith. Id vero facile præstabitur, ubi habeatur ingens sextans, ut ibi habebatur, vel sector ingens, qui meo impulsu ad eam rem ipsam constructus fuit in Viennensi *specula* a Clarissimo Liesganigio similis meo descripto in meo Opere de Expeditione Litteraria per Pontificiam ditionem. Ope ejusmodi instrumentorum potest obtineri accurata distantia fixæ cujuspiam a zenith per conversionem. Eâ rite determinatâ, collocandum *est*

tele-

telescopium *ita*, ut nonius indicet illam distantiam : tum eâ fixâ ingressâ telescopium, moveri debet ope cochleæ verticalis totus quadrans in eodem suo plano, donec a filo horizontali eadem secetur accurate bifariam. Id quidem præstari potest, cum saltem tribus minutis intra telescopii campum fixa verticalis moretur. Potest autem pluribus consequenter diebus præstari id ipsum, donec obtineatur omnis ea accuratio, quæ desiderari possit.

41. Si supponatur aliunde nota altitudo poli, & positio fixarum præcipuarum; *facile inducitur directio debita quadranti in ordine ad hunc errorem evitandum, ponendo telescopium ita*, ut *nonius designet distantiam a zenith*, quam habere debet quæpiam ex iis fixis. *Ea distantia est summa*, vel *differentia altitudinis* poli, & *declinationis fixæ*, prout ipsa *declinatio est australis*, vel borealis, sed adhuc demi debet refractio debita ei distantiæ a zenith. Telescopio affixo quadranti in ea positione expectandus est ingressus astri in telescopium, & movendus quadrans in plano verticali ita, ut ipsum a filo micrometri secetur bifariam. Idcirco Mediolanensem *quadrantem non affixi* muro, sed ita suspendi in binis *punctis, ut in eorum altero ope cochleæ* habere posset *motum in plano* verticali, *in altero motum azimuthalem*, *uti & in tertio puncto motum habere posset*, *quo ad positionem* verticalem deducatur. Ubi ille primus motus præstari non potest, determinandus est error, qui deinde erit constanter demendus, vel addendus omnibus observationibus.

42. Potest verificari immediate etiam positio puncti postremi graduum 90, ubi habeatur in distantia non ita exigua objectum aliquod non nihil elevatum supra horizontem. Observando ipsum in aqua per reflexionem, tum directe, invenitur facile error puncti graduum 90; sed si distantia non sit ingens, requiritur correctiuncula, de qua agemus, explicando eam methodum in Opusculo sequenti. In ea enim præcipuum usum habere potest: si enim verificato puncto zero per fixas verticales, & 90° hac methodo non inveniatur error idem; differentia eorum errorum erit aberratio quadrantis a gradibus 90. Eam etiam methodum adhibui in illo quadrante.

43. *Scho-*

43. *Scholium 6*. Methodus, quæ proposita est hic pro corrigendis primis illis tribus erroribus pertinentibus ad tempus appulsus ad meridianum, requirit omnino, ut limbus in eodem plano jaceat totus. Id ibi erat præstitum, juxta Opusculum secundum. Si id non esset præstitum, oporteret habere rationem ipsius. erroribus trium astrorum ibi adhibitis oporteret addere, vel auferre errorem debitum distantiæ puncti limbi respondentis loco astri, a plano transeunte per centrum, & per duo extrema puncta limbi, prout ea *distantia inclinat* axem *telescopii* in partem contrariam ei, in quam vergit error observatus, vel in eandem; quia telescopio adducto ad id planum augeretur error observandus in primo casu, minueretur in secundo.

44. Si in quadrante habeatur error hujusmodi, nec correctus sit limbo ad planum adducto, non posset per collocationis mutationem reduci quadrans ad exhibendum appulsum ad meridianum sine ullo errore: quamobrem eo casu requireretur tabella errorum determinatorum saltem in quinos *gradus*, *ex qua excerpenda* esset correctio *adhibenda singulis observationibus* institutis ope ejus *quadrantis*. *Quanquam ea tabella* fere semper erit opportuna ob *summam difficultatem*, quæ habetur in *corrigendo penitus* accurate *errores collocationis* per quam exiguos. Ubi adhibita fuerit non mediocris diligentia pro corrigenda collocatione ipsa, opportunissimum erit, plurium fixarum, quæ exhibeant seriem punctorum limbi quadrantis, determinare per altitudines correspondentes momenta appulsuum ad meridianum, notare simul momentum, quo eæ appellunt ad intersectionem filorum telescopii, ac notare differentiam: series ejusmodi correctionum inventa per plures observationes ejusdem fixæ cujusvis exhibebit demum correctionum ipsarum tabellam accuratissimam, quæ semel determinata perstabit diu eadem, & vero semper, nisi a causa quapiam externa, ut a terræ motu, vel nimio calore, inducatur quæpiam mutatio.

45. Si planum quadrantis sit accurate planum, ut punctum superficiei cælestis, ad quod dirigitur axis telescopii, vel linea fiduciæ percurrat arcum circuli, utut non maximi ob primum er-

rorem,

rorem, & *inclinati* respectu meridiani ob reliquos *duos potest* e-rui formula, quæ pro quavis distantia a zenith exhibeat quantitatem *erroris* corrigendi constans coefficientibus pendentibus ab illis tribus erroribus, qui evadant cogniti per tres appulsus erroneos, methodo analoga hic adhibitæ, cujus occurret usus, ubi in alio Opusculo agemus singillatim de instrumento transituum, cui *potest applicari* tota theoria hujus, sed ea est multo magis opportuna pro ipso, in quo excursus telescopii pertinet ad totum meridiani *semicirculum*, *dum in quadrante* murali non pervadit nisi per *ipsius dimidii dimidium*. *Dum autem pro* quadrante *murali*, & *pro instrumento transituum* fixo in quapiam specula potest per *altitudines* correspondentes obtineri *accurata*, & permanens errorum *tabula*, quæ semper erit *admodum utilis*; *pro* eodem instrumento portatili, cujus potest *haberi* usus egregius, sæpe oportebit eruere, & adhibere ejusmodi formulam: sed ea de re alibi inferius.

OPUSCULUM IV.

DE VERIFICATIONE PUNCTI POSTREMI QUADRANTIS MURALIS, QUOD INDICAT POSITIONEM HORIZONTALEM.

1. QUADRANS muralis præter gradus 90 solet habere aliquot *alios ultra utrumque limitem*, *uti habebat* ille, de quo *egimus in Opusculo I. Alidadâ* appellente ad alterum limitem eorum *90 graduum*, *deberet axis telescopii dirigi ad zenith*, & quadrante bene *disposito*, distantia alidadæ ab *eo puncto debet exhibere distantias astrorum ab ipso zenith*: alterum extremum *indicaret positionem horizontalem*: distantia alidadæ ab ipso debet indicare altitudines supra horizontem, vel etiam in illo excursu aliquot graduum ultra eum limitem depressiones infra ipsum. Solet apponi utrique *extremo tam zero*, *quam* 90, ut altera ex iis binis *numerationibus* exhibeat immediate distantias a *zenith*, *altera altitudines supra horizontem*: sed hic *in ipso Opusculi titulo juxta priorem numerandi rationem appellamus postremum quadrantis punctum* illud, quod est *destinatum* positioni horizontali.

2. Quadrantis arcu continente gradus 90 accurate, & ita constituto, ut ille prior limes accurate referat positionem axis telescopii verticalem, is posterior indicabit accurate positionem horizontalem: si autem arcus graduum 90 contineat errorem aliquem, ac error innotescat methodo Opusculi primi; illo primo limite indicante accurate positionem verticalem, vel cognito errore collocationis in ordine ad positionem eandem, innotescet pariter, quantus sit error directionis axis telescopii in appulsu alidadæ ad punctum postremum. Vidimus in fine secundi Opusculi, quo pacto per distantiam a zenith alicujus fixæ parum *distantis* ab ipso inventam per instrumentum, quod converti possit circa axem verticalem, collatam cum indicata ab alidada, determinetur error illius primi puncti destinati ad indicandam positionem verticalem:

pro-

proponemus *in hoc* Opusculo methodum, qua possit immediate inquiri in positionem postremi destinati ad indicandam horizontalem, si locus ejus usui sit opportunus. Proderit hæc determinatio ad deducendum etiam errorem illius primi puncti, si desit instrumentum satis magnum, quod converti possit, & conversione sua determinare distantiam veram a zenith fixæ cujuspiam comparandam *cum indicata ab alidada*: ubi vero id instrumentum adsit, ac error primi puncti determinetur ope ipsius; determinato immediate per *methodum hìc proponendam errore hujus postremi*, innotescet error arcus graduum *90 quadrantis ipsius*, comparandus cum invento per *methodum indicatam* Opusculi I, cum quo hìc debet congruere, *quod confirmabit* consensu suo & methodos, & rectam ipsarum applicationem.

3. Hæc methodus exigit objectum terrestre collocatum in plano meridiani transeunte per axem telescopii quadrantis ipsius, vel prope id planum elevato non nihil supra ejus horizontem. Collocato prope centrum quadrantis, circa quod convertitur telescopium cum alidada, ampliore *vase pleno* aquâ, observandum est id objectum *tam directe, quam per reflexionem in* aqua ipsa: Determinatâ *tam elevatione supra horizontem indicatâ in* prima *observatione ab alidada*, quam *depressione in secunda*, *obtinetur methodo* hìc exponenda punctum positionis horizontalis, cujus distantia *a puncto* nonaginta graduum notato in *limbo* quadrantis est error quæsitus.

4. Si objectum sit admodum remotum; punctum positionis horizontalis erit ipsum medium inter ea, quæ determinavit alidada pro elevatione supra horizontem, & depressione infra: sed si adhibeatur objectum non ita remotum, occurrit quædam species parallaxeos, cujus habenda est ratio, & hoc Opusculum destinatum est potissimum determinationi effectus parallaxeos ejusdem. Porro requiritur vas satis amplum, quia prope margines vasis superficies aquæ *incurvatur viribus*, quas exercent particulæ ipsius in se invicem, & cum *parietibus ejusdem vasis*: ultra eam curvaturam habebitur satis ampla superficies plana horizontalis, in qua objectum apparebit regulare, & distinctum.

 5. In

5. *In fig.* 5 (*Tab.* II) D est punctum objecti *elevatum* supra horizontem, quod telescopio quadrantis ABB'A' cernitur per radios DH, DH' reflexos in superficie aquæ contentæ in vase NRR'N' posito ante id telescopium in situ paullo inferiore, & detortos ad superficiem objectivi L, L', unde per refractionem abeunt ad intersectionem F filorum, quæ apponuntur *in foco* objectivi ipsius, ad determinandum punctum objecti, in quod *collineatur*: eorum autem filorum alterum est horizontale, alterum ipsi perpendiculare. Concipiatur recta DE *perpendicularis ad planum HH'* superficiei aquæ productum, *quæ producta tantundem in D' determinabit* punctum illud, in quo apparet *punctum D objecti visum* per reflexionem radii HL, H'L' advenient ad *objectivum*, ac detorquebuntur ad *intersectionem filorum* in F *impedientium* eorum progressum usque ad *oculum positum* in O in productione axis telescopii, quo impedimento efficitur, ut objectum attribuatur directioni FD', quæ in telescopio habente objectivum bene, ut appellant, centratum, & intersectionem filorum in axe transit *per centrum C aperturæ* objectivi ipsius, & est *productio quædam* axis OFC. Si ea intersectio *non sit accurate in ipso axe*, nec *objectivum* prorsus *accurate centratum*; *inter radios digressos a puncto objecti*, & *incidentes directionibus non nihil* diversis in diversa *puncta aperturæ objectivi* habetur semper unus, qui post binas per quam exiguas refractiones habitas in binis objectivi ipsius superficiebus æquales, & contrarias pergit intra tubum per rectam parallelam illi, per quam advenit a puncto, a quo radii divergunt, ita proximam huic, ut earum distantia sensum omnem effugiat, ac ambæ censeantur unica linea: & id quidem fit sine ullo errore sensibili, quam ob causam ea recta dicitur linea fiduciæ: ea theoria felicissime detecta præbuit occasionem applicandi astronomicis instrumentis telescopia substituta veteribus dioptris cum tanto Astronomiæ fructu. Porro ea linea fiduciæ transit per illum objectivi locum, *ubi ejus crassitudo* est maxima binis superficiebus *inter* se *parallelis*, qui locus est satis proximus centro aperturæ, *si telescopium* est saltem mediocriter constructum. *Eam lineam fiduciæ*, quæ gerit vices axis, *si* cum ipso accurate non congruit, appellabimus hic axem:

is

is autem incurrit in quoddam punctum I superficiei aquæ, ubi triangulum DID' est isosceles, ac angulus DIE æqualis angulo D'IE, adeoque & angulo NIC opposito huic ad verticem ita, ut radius delatus a puncto objecti D per rectam DI debeat reflecti per ICF.

6. Dum alidada convertitur cum telescopio, ut hoc abeat a positione directa ad imaginem D' objecti exhibitam ab aqua ad illam, quæ dirigitur ad ipsum punctum objecti D, fit motus circa axem transeuntem per centrum quadrantis, & perpendicularem ejus plano, & axis OFD' ita abit in axem O'F'D, ut perpetuo tangat circulum quendam, cujus centrum est in quodam puncto G axis ipsius: ejus radii GT, GT', qui terminantur ad eos contactus, erunt perpendiculares ad ipsos axes, qui sibi invicem occurrent in quodam puncto P parum admodum remoto a binis contactibus T, T', cum exigua depressio infra horizontem imaginis D' puncti D parum elevati supra ipsum horizontem exigat arcum TT' exiguum.

7. Concipiatur recta PM horizontalis, & si punctum D esset in immensa distantia, rectæ DP, DI habendæ essent pro parallelis, & angulus DPM elevatio vera puncti D supra horizontem esset æqualis angulo DIE, quem ipsa DI continet cum recta IE itidem horizontali, adeoque parallela rectæ PM: cum ipse angulus DIE debeat esse æqualis angulo D'IE, adeoque & angulo D'PM, qui est internus, & huic oppositus in parallelis PM, IE, hic autem postremus sit depressio apparens puncti D infra horizontem; patet, eo casu debere esse elevationem illam supra horizontem æqualem huic depressioni infra ipsum, adeoque in eo casu punctum quadrantis pertinens ad positionem telescopii horizontalem esset accurate intermedium inter duo puncta determinata ab alidada pro illis binis positionibus.

8. Punctum positum in immensa distantia esset fixa aliqua, quæ si remaneret immota in plano meridiani, rem perficeret, visa directe, & per reflexionem in aqua. Ejus motus diurnus, quo ea non nisi momento temporis transit per meridianum, non obstaret, assumeretur enim uno die altitudo supra horizontem ipsius

ipsius visæ directe in transitu per meridianum, & alio die depressio infra horizontem ejusdem visæ in aqua, dum itidem per meridianum transit, & punctum quæsitum respondens positioni horizontali axis telescopii esset fere accuratissime intermedium inter illa duo puncta notata ab alidada in illis binis positionibus. Sed cum arcus quadrantis non excurrat nisi per paucos gradus ultra 90, non posset adhiberi nisi fixa parum elevata supra horizontem in appulsu ad meridianum, ubi refractio est ingens, & variatur ab uno die ad alium multo magis, quam ut eâ methodo acquiri possit determinatio ita accurata, uti exigitur pro determinatione ejus puncti, in qua paucissimorum secundorum error evitari debet, & vero etiam curari, ut evitetur error vel unius etiam secundi.

9. Quamobrem recurrendum est ad objecta terrestria, sed satis remota, ut proximitas non amandet imaginem distinctam per intervallum sensibile ultra positionem intersectionis F filorum, quæ aptantur pro astris positis in immensa distantia: ea elongatio foci a filis redderet confusam imaginem ejus puncti objecti in loco intersectionis ejusdem, quæ elongatio cum sit perquam exigua pro objecto terrestri satis remoto, ejusmodi distinctionem non turbat. Porro objectum distans parum etiam elevatum supra horizontem debet habere altitudinem non nimis exiguam supra planum horizontale observatorii, adeoque usui esse non potest, nisi turris aliqua campanaria, vel tholus forte occurrens in urbe in ea directione.

10. Tum vero rectæ DI, DP non evadunt satis proxime parallelæ inter se, & occurrit angulus PDI, qui est quædam veluti parallaxis objecti D relate ad directiones PD, ID, cujus habenda est ratio ad deprehendendam correctionem determinationis præcedentis respondentem eidem angulo. Ea correctio potest esse prorsus insensibilis respectu objecti etiam in eadem urbe siti: nam sinus anguli quæsiti PDI ad sinum depressionis IPD observatæ infra horizontem est, ut latus PI ad latus DI, quæ in angulis exiguis, uti erunt ii anguli, erit ad sensum eadem, ac ratio ipsorum angulorum. Potest autem collocari vas NN' in distantia exigua a telescopio BB'. Sed quoniam, quo remotius est objectum terrestre, eo major requiritur ipsius altitudo supra planum obser-

servatorii, *ut etiam* dimidio gradu elevetur supra *ejus* horizontem, *inquirendum* est in modum determinandi magnitudinem ejus anguli *etiam* pro objectis aliquanto minus remotis, & in ejus *anguli* effectum relate ad correctionem adhibendam puncto medio inter bina determinata ab alidada.

11. Quod pertinet ad *primum* caput, oportet determinare punctum I, *ad quod tendit axis* FC in ea positione, in qua *tele*scopium adhibetur pro observando puncto D': id fit haud difficulter. Sublatâ *lente oculari*, & *obductâ dimidiâ* apert*urâ* objectivi per chartam, in *cujus margine habeatur linea ducta*, quæ *debeat respondere centro C*, *satis distincte* apparet superficies aquæ NN' transpicienti *ex O per* directionem *FI*, ob *distantiam* exiguam ab objectivo: *hinc potest definiri distantia ipsius puncti* I a puncto P posito prope mediam crassitudinem tubi e regione puncti G: nam error etiam non ita exiguus in ea mensura nullum sensibilem errorem producit in angulum quæsitum IPD, qui *nimirum ob angulorum* occurrentium exiguitatem est ad depressionem exiguam DPI, ut *distantia. ingens* DI ad eum errorem distantiæ determinatæ *PI*. *Eodem pacto error commissus* in determinanda *distantia DI exiguus* respectu *ipsius*, *licet non absolute e*xiguus, *non inducit in eundem angulum quæsitum* nisi errorem prorsus contemnendum. Satis est ad eam rem eruere distantiam loci speculæ, in quo *habetur* centrum quadrantis *muralis*, ab objecto adhibito e mappa urbis ichonographica, vel per notas methodos Trigonometriæ communis, non nimis abludentem a vera. Si accuratione adhuc majore opus esset, ea facile obtineretur, determinando accuratius distantiam PD, & pro habenda DI concipiendo centro D radio DI arcum circuli IK, qui debet æquivalere rectæ perpendiculari ductæ ex puncto I in rectam PD. Assumenda *esset* pro recta PK recta PI ducta in cosinum anguli IPK, qui est *summa* depressionis, & elevationis observatæ, & demenda ab ipsa *distantia PD : sed* ea differentia erit minor respectu *totius* PD, quam *ut inducat* errorem *sensibilem* in angulum quæsitum.

12. Quod pertinet ad effectum *ejus* anguli pro correctione de-

ter-

terminanda, is est expeditissimus. Habetur angulus IPD differentia directionum PI, PD determinata ab alidada motu suo ab altera directione ad alteram; qui dicatur a, & angulus inventus PDI, qui dicatur b, angulus autem DPM, qui est elevatio directionis secundæ supra horizontem dicatur x. Erit angulus IPM $=$ $- x$. Porro is æquatur angulo D'IE dimidio anguli D'ID, & hic æquatur summæ angulorum IPD $= a$, & IDP $= b$ internorum, & oppositorum. Quare erit $a - x = \frac{1}{2}(a+b)$, & $2a - 2x = a + b$, $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b$; unde eruitur hujusmodi regula. *A semisumma elevationis objecti visi directe, & depressionis visi in aqua auferatur dimidium parallaxeos inventæ* PDI: *residuum erit vera elevatio objecti visi directe, cujus differentia indicata a nonio erit error illius puncti postremi quadrantis, qui error quærebatur.*

13. In Mediolanensi specula, in qua hanc methodum adhibui, non habebatur ullum objectum idoneum in eodem prorsus plano meridiani transeuntis per axem telescopii, sed habebatur prope ipsum apex crucis cujusdam, quo usus sum. Si id objectum subeat in motu telescopii campum ipsius non nihil ad latus fili perpendicularis filo horizontali, ea deviatio non nocet, cum omnia puncta ejus fili in exiguo tractu semidiametri ejusdem campi habeant ad sensum eandem elevationem supra horizontem. Si distet paullo magis ad latus alterum extra campum, potest moveri non nihil totum planum quadrantis, deflectendo ipsum in eam partem usque ad congruentiam fili perpendicularis cum eo puncto objecti terrestris, & determinari error postremi puncti in ea positione, tum restitui planum ipsum ad priorem positionem: sed oportet, in mutatione positionis plani nulla fiat deviatio linearum ipsius ejusmodi, qua rectæ, quæ in positione adhibita pro ea perquisitione fuerant accurate verticales, evadant inclinatæ. Id quidem facile præstari potest appenso filo tenui cum pondere cuipiam puncto pertinenti ad latus superius horizontale quadrantis parum remoto a centro per filum tenue, & adducto tenui puncto plani cujuspiam, ut chartæ affigendæ per mollem ceram puncto cuipiam limbi, ad id filum post ipsum: tum enim satis erit in reductione plani ejusdem

dem ad novam positionem, & restitutione ad priorem efficere, ut id filum transeat per idem punctum. Præstabit affigere cuspidem permanentem puncto cuipiam superiori plani quadrantis, ex quo filum tenue cum pondere pendeat semper, & habere in parte inferiore punctum insculptum laminæ metallicæ ita adnexæ parti cuipiam machinamenti quadrantis ejusdem, ut ope cochleæ, promoveri possit non nihil, & si habeatur deviatio quæpiam a positionibus semel verificatis, innotescat per indicem, quantus fuerit motus, ac vel restituendum erit machinamentum in locum pristinum, vel habenda ratio deviationis ipsius: præstat adhuc magis habere binas ejusmodi laminas, alteram paullo, alteram multo inferiorem puncto suspensionis, quarum singulæ habeant suum punctum adducendum ad filum: tum enim ope lentis satis convexæ accuratissime agnoscitur positio, in qua filum transit per medium punctum. Et quidem tria ejusmodi fila cum ponderibus affigi possent tribus cuspidibus cum lamellis habentibus puncta sua ita inclinatis, ut ostenderent motum quemcunque, qui accideret in quavis directione quadrantis. Præstat etiam habere puncta fixa in aliqua distantia ab observatorio: collineando in ea per telescopium adductum per alidadam ad eadem puncta limbi deprehenditur motus, qui supervenerit vel plano quadrantis, vel filis tensis in foco telescopii: licet eo in genere cavendum illud, mutationem refractionum terrestrium impedire, ne eo pacto satis accurate deprehendi possit, nisi sola deflexio a plano meridiani: nam inæqualitas refractionum terrestrium efficit, ut alidadâ denotante certum limbi punctum appareat mutatio altitudinis supra horizontem puncti, ad quod telescopium dirigitur, etiam ubi nulla in quadrante mutatio acciderit, potissimum si punctum ipsum est aliquanto remotius.

14. Ubi objectum est parum elevatum supra horizontem, quod fere semper accidet, tum vas illud debebit apponi parum admodum infra caput telescopii inclinati deorsum, & superficies aquæ ita oblique jacebit respectu telescopii, licet vas sit satis amplum, ut radii reflexi non intercipiant in LL' nisi exiguam partem objectivi. In meo casu centrum quadrantis erat proximum angulo

conclavis, in quo aderat exigua feneſtra *verticalis*, cum exigua apertura horizontali facta in tecto, quæ obtegebatur, neque patebat niſi dum obſervationes cæleſtes inſtituebantur, & ob viciniam centri ipſius *illæ* aperturæ licet parum amplæ relinquebant proſpectum in totum cæli quadrantem poſitum ad meridiem. Vas aptatum eſt in ima parte feneſtræ *verticalis* : impletum eſt penitus uſque ad ſummum verticem laterum *verticalium* ita, ut nihil ex iis extaret ſupra ſuperficiem aquæ, quod nimirum, ob tantam illam *obliquitatem*, *impedivisset* & *progreſſum* radiorum uſque ad eam ſuperficiem, & *regreſſum* versus *teleſcopium* : amplitudo vaſis fuiſſet nimia, ſi ea *debuiſſet præcludere* viam radiis *omnibus*, qui pertinebant ad *alia* objecta urbis poſita in directione *totius amplitudinis* tubi *teleſcopii* : ii pertinentes ad plura ex iis objectis tranſeundo prope latus vaſis exterius adveniebant ad aperturam objectivi ; ſed id nihil oberat obſervationi : habebatur duplex imago in foco teleſcopii, altera pertinens ad hæc objecta depicta ibi per radios *directos*, & *altera ipſi* ſuperpoſita pertinens ad *objectum depictum*, per reflexos ; *ſed* hæc *diſcernebatur facile* ; *erat enim inverſa illius* alterius. Teleſcopio *invertente objecta*, *uti fit in aſtronomicis dioptricis* habentibus *lentem ocularem unicam*, *illa apparebant inverſa*, hoc directum. Ventus utut leviſſimus turbando ſuperficiem aquæ ſæpe obſervationem turbabat, diſparente per ejus agitationem imagine reflexa : ſed inveni plures dies ita tranquillos, ut obſervationem pluribus vicibus potuerim inſtituere, imagine manente tranquillâ, & exitu obſervationum ſatis conformi, quam tranquillo aere licebat ſingulis diebus repetere pluribus vicibus : nam res breviſſimo tempore peragitur.

15. Locus mihi occaſionem præbuit & cogitandi de hac methodo, & eam adhibendi, & idcirco numero 2 addidi, *ſi locus ejus uſui ſit opportunus*. In plurimis aſtronomicis ſpeculis, tam ipſarum poſitio reſpectu urbis, & poſitio quadrantis muralis in conclavi ad id deſtinato, quam defectus objecti ſatis elevati ſupra ſpeculam ipſam in directione parum abludente a plano meridiani, obſervationem impediet, & potiſſimum hic poſtremus defectus,

nisi occurrat prospectus in montem satis altum, & non nimis distantem, ut nimirum ejus vertex appareat non nihil elevatus supra horizontem, quo solo casu haberi potest ejusdem objecti observatio directa comparanda cum altera facta per reflexionem in superficie aquæ. Nec vero in ejusmodi casibus determinatio postremi puncti limbi indicantis positionem horizontalem est inutilis: nulla quidem tum poterit institui observatio astronomica tubo horizontaliter directo: verum ea determinatio non instituitur pro observatione facienda in ipsa directione horizontali indicata ab eo puncto, sed pro habenda determinatione accurata cujuscumque alterius distantiæ a zenith, ac altitudinis supra horizontem, quæ haberi non potest nisi cognitis erroribus divisionum, in quas inquisitum est in Opusculo primo, & cognito errore collocationis quadrantis in ordine vel ad primum punctum verticale, de quo egimus in Opusculo tertio, vel ad postremum horizontale, de quo actum est in hoc quarto. Determinatio autem utriusque prodest plurimum ad obtinendum accuratius, & tutius errorem arcus integri graduum 90, qui accurate continetur inter illa duo puncta. Inventis eorum distantiis a punctis limbi notatis 0, & 90, obtinetur error arcus intercepti inter ea puncta notata in limbo, qui error est differentia earum distantiarum, si ambo errores habeant directionem eandem, & summa, si habeant binas oppositas.

OPUSCULUM V.

De suspensione telescopii quadrantis muralis ope curvæ æquilibrii.

1. IN quadrantibus, quos appellant murales, tubus telescopii metallicus, qui debet revolvi circa centrum quadrantis ipsius, redderet admodum incommodum usum ob pondus ingens, nisi adhiberetur machinamentum aliquod, quod ipsum constitueret proxime in æquilibrio in ipso centro, cui innititur. Solent addere ultra id centrum virgam metallicam, quæ sustineat pondus capax efficiendi æquilibrium: id vero solet esse multo gravius ipso tubi pondere jam ingenti, ne virga adjecta adhiberi debeat nimis longa. Porro sæpe id accidit nimis incommodum, vel etiam omnino præstari non potest, ubi centrum ipsum quadrantis ita collocatur, ut sit proximum muro perpendiculari ad ipsius planum, & tabulato superiori conclavis, vel fornici, ut nimirum exigua apertura utriusque permittat liberum prospectum totius quadrantis meridiani cælestis per telescopium. Præterea illud pondus plusquam duplo majus pondere ipsius tubi prægravat foramen centrale, cui immittitur axiculus ipsi tubo affixus, & cum eo convertendus: inde fit, ut per frictionem eo magis perniciosam, quo illud pondus est gravius, atteratur & ipse axiculus, & foramen, quod post longiorem usum efficit, ut motus evadat demum irregularis foramine jam ampliore, quam ut illum axem accurate contineat.

2. Sunt, qui affigant massam habentem foramen, in quod axis immittitur, non ipsi quadranti, sed parieti posito post ipsum, quod quidem nec impedit frictionis malum ab ingenti illo ponderis additamento auctum, & habet difficultatem eandem in illa collocatione quadrantis prope murum oppositum, & tabulatum superius: & vero etiam accedit difficultas ita collocandi massam ferentem illud foramen separatam a toto quadrantis machinamen-

to,

to , ut centrum ipsius foraminis accurate congruat cum centro quadrantis . Ubi id est in ipsa hujus compage , arcus circulares limbi possunt insculpi in prima ejus constructione per virgam habentem axem , qui ipsi foramini immittatur ad id obtinendum , & ubi quadrans translatus post constructionem collocatur in loco destinato , tubus ipse axiculo in foramen immisso jam sine ullis attentationibus ad præstandam centrorum congruentiam convertitur circa debitum centrum .

3. Cum Mediolanensis observatorii formam animo concepi , & partes construendas disposui , ita disponendum censui conclave destinatum binis quadrantibus muralibus alteri obvertendo versus meridiem , qui jam erat in promptu , alteri versus septentrionem , qui nondum ibi habetur , ut centrum utriusvis haberet indicatam positionem proximam muro opposito , & tabulato , quæ non nisi exiguam verticalem , & horizontalem fenestram requireret recludendam facile tum , cum observatio institui debet , & eâ peractâ occludendam . Hinc aliam inivi viam ad æquilibrium ita præstandum , ut pondus ad id adhibendum haberetur in positione commodissima , nec centrum conversionis aggravaret , sed potius minueret pressionem exercitam ab ipso pondere illius tubi . Jam ab initio hujus sæculi determinata fuerat curva æquilibrii pro elevandis pontibus a positione horizontali ad verticalem ope ponderis descendentis per eam curvam , & ita connexi per funem cum eodem ponte , ut id pondus in suo descensu remaneret in æquilibrio cum ipso in inclinatione quacunque ; licet is eo minorem nisum exerceat ad recidendum , quo magis accedit ad positionem verticalem . Hinc illud mihi animo subiit , posse curvam æquilibrii ei curvæ analogam adhiberi etiam pro parili suspensione telescopii quadrantis .

4. Verum illud statim occurrit , ingens haberi discrimen inter hosce duos casus , nimirum illius pontis , & hujus telescopii . Ascensus pontis fit a positione horizontali , in qua ejus nisus ad descendendum est maximus , qui nisus perpetuo decrescit , & in fine motus per integrum quadrantem evanescit penitus in positione verticali : at hic tubus in initio ascensus habet positionem ver-

tica-

ticalem, in qua nullam exercet vim ad descensum, quæ deinde perpetuo augetur, ac in fine evadit maxima. Hinc in priore casu illud pondus initio sui ascensus debet exercere vim maximam, quæ in progressu perpetuo decrescat, ac in fine evanescat: id vero exigit formam curvæ concavam, in qua inclinatio tangentis accedat semper magis ad positionem horizontelem, ac in eam demum desinat in ima sui parte: at in casu posteriore debet id pondus initio exercere vim nullam, curvâ ibi habente directionem horizontalem, quæ in descensu ab ea recedat perpetuo magis, quod exigit curvam convexam.

5. Sit in fig. 1 CE positio verticalis telescopii, quod elevari debeat per omnes positiones obliquas CF usque ad horizontalem CG; pons autem debeat elevari a positione horizontali CG usque ad verticalem CE'. Pro hoc casu affigitur funis cuipiam ejus puncto G, qui tendit rectà ad cochleam (*) positam in E', inde rectà ad aliam fixam in M', tum iterum rectà usque ad pondus N', quod descendit per curvam concavam M'N'K'. Ut vis pontis ad recidendum perpetuo decrescit, dum punctum F' elevatur oblique per quadrantem GF'E', ac evanescit in E'; ita pondus N', dum descendit per curvam concavam M'N'K', exercet perpetuo minorem vim directione curvæ semper magis accedente ad horizontalem, in quam si desinat arcus ipsius in K' ita, ut habeat ibi tangentem horizontalem, nisus ipse ponderis N' ad descendendum ibidem evanescit. Quæritur autem curva, quæ in omnibus positionibus F', & N' præstet æquilibrium habita ratione tam imminutionis virium in F', & N' ortæ ab obliquitate radii CF', & directionis curvæ, quam ab obliquitate directionis funium E'F', & M'N', qui trahunt oblique.

6. Pro casu telescopii cum pondus N initio sui descensus in M respondeat positioni telescopii verticali CE, debet ibi amittere omnem nisum, adeoque tangens curvæ ibi debet esse horizontalis: tum crescente vi telescopii ipsius ad descendendum, debet curva saltem initio, & sæpe, ut inferius patebit, usque ad finem

(*) Cochleas hic consideramus instar puncti; ut & pondus N.

nem ascensus telescopii ipsius ibi acquirere directionem semper magis accedentem ad verticalem, adeoque debet esse convexa respectu directionis, qua gravitas urget descensum. Videtur primo aspectu nexus inter puncta F, & N haberi non posse nisi per funiculum (pro ponte requiritur funis crassior, vel etiam catena: pro telescopio tanto leviore sufficit funiculus tenuior, qui erit eo aptior, quo fuerit magis plicatilis), qui ab M ad N advolvatur ipsi curvæ acquirens ejus convexitatem, quod quidem imminuit non nihil vim ponderis N, utcumque concipiatur bene levigata ejus superficies. Ea curvatura funiculi ipsius, neglectâ etiam resistentiâ ortâ a frictione, ita elevat naturam curvæ requisitæ ad hoc genus æquilibrii, ut eam reddat transcendentem; dum curva M'N'K' æquilibrii pro ponte jam tum inventa non est nisi quarti gradus.

7. Verum habetur dispositio, in qua punctum N tractum deorsum a pondere constanti affixo ipsi per funiculum descendat per curvam convexam, & tamen funiculus abeat itidem rectâ ab N ad M. Id quidem facile obtinetur, si curva MNK fiat ex virga metallica bene levigata, cui addatur annulus ex filo metallico cylindrico bene levigatus, & paullo amplior crassitudine ipsius virgæ transeuntis per ipsum. Is a pondere Q ipsi affixo per funiculum NQ trahetur deorsum, tanquam si ipsum collectum in N deberet descendere. Verum habeo quidem aliam methodum, quæ exponetur inferius, præstandi idem per canales quosdam incavatos in binis tabulis ligneis conjunctis cum aliis binis, ita, ut illæ conjungantur inter se in parte superiore, habeatur autem quædam distantia in inferiore: binæ rotæ connexæ per axiculum ferreum ita descendunt per eos canales, ut punctum medium axis in descensu ejus velut curriculi describat eam curvam: pondus affigitur per funiculum ei puncto axis ita, ut libere pendeat: is funiculus libere transit per illam aperturam, quæ remanet inter binas tabulas conjunctas in sola sui parte superiore, ut abeat recta tam ad pondus Q, quam ad trochleam M. Quod pertinet ad id machinamentum exponam inferius per figuras idoneas, posteaquam determinavero constructionem, & naturam curvarum huc pertinentium.

8. Et

8. Et quidem pro casu funiculi radentis superficiem convexam, curva est transcendens, ut innui, dum pro casu funiculi rectilinei est algebraica, & constructionis admodum expeditæ. Videtur itidem primo aspectu curva æquilibrii, quam quærimus pro telescopio, debere esse continuatio illius jam inventæ pro parte, quod novam perquisitionem redderet supervacaneam. Dum enim telescopium a positione verticali CE abit motu continuato puncti F usque ad horizontalem CG, si inde debeat ascendere usque ad verticalem oppositam CE'; habetur continuatio motus puncti F per F' in eadem curva continua circulari; adeoque videtur & curva æquilibrii debere esse naturæ ejusdem. Adhuc tamen dum hæc secunda inventa est, *ut diximus*, & ut patebit inferius, gradus quarti, *illam primam invenio* gradus octavi. Ratio ejus discriminis habetur in natura positivorum, & negativorum, quæ in Geometria habent locum per directiones contrarias, æque ac in Arithmetica, & Algebra per signa + & −, in qua *analogia* habet fundamentum tota applicatio *Algebræ ad Geometriam*, qua Cartesius hanc *scientiam usque adeo* promovit, *sed* quæ producta postea ultra *finitam Algebram*, & *applicata* quantitatibus infinitesimis, & exponentibus ita indefinitis, *ut eos* complectatur etiam irrationales, quandoque summos etiam primæ notæ Geometras deduxit ad contentiones veteribus Geometris prorsus incognitas, ubi utraque pars demonstrationibus productis devenit ad conclusiones contradictorias, *ut in* quæstione de *negativarum* quantitatum logarithmis: sed ea huc non pertinent.

9. Hìc habetur illud: dum punctum F motu continuato per G transit in F', arcus GF positivus abit *mutatâ* directione *in* GF' negativum; at vis gravitatis, quæ tendebat directione rectilinea parallela E'CE, & directione circulari E'GE, agit etiam in F' directionibus iisdem non mutatis in oppositas negativas. *Si vis* in F', quæ fuerat gravitas tendens deorsum, abiret *in levitatem*, quæ esset vis negativa respectu gravitatis *habitæ ut* positivæ; punctum F' tenderet *sursum*, & *conaretur abire* directione circulari GF'E', ac ad illud retinendum in æquilibrio oporteret adhibere eandem curvam MNK pondere Q ipsum retrahente deorsum

per

per punctum N, & funiculum NMGF', quantum prius trahebat F sursum. Verum adhuc ibi haberetur alia irregularitas. Quantitas positiva per mutationem continuam nunquam in Geometria abit in negativam, nisi transeundo per nihilum. Hìc quidem arcus GF positivus abiret in negativum GF' per *nihilum*, quod haberetur in G; at nisus gravitatis ad motum circularem non evanescit in G, sed advenit ad suum maximum utique finitum, a quo non potest concipi translatus momento temporis ad æqualem negativum *respondentem levitati*.

10. His itidem præmissis *progrediemur* hìc ad determinandas curvas *pro* telescopio, & *pro ponte*, agentes per funes, vel funiculos rectilineos, considerando singularum constructiones *admodum analogas*, ex quibus orientur æquationes. Deinde gradum faciemus ad naturam curvæ pro *telescopio* respondentem funiculo advoluto lineæ convexæ: ac demum producemus figuras pro illo exiguo veluti curru, cujus ope punctum N connectetur cum trochlea *M per funiculum* rectilineum.

11. *In primis abscindatur GL ex* GE, vel E'L' ex E'G æqualis GF, *vel E'F': chorda curvæ MN*, *vel M'N' erit æqualis* residuo EL vel GL'; cum *enim totus funis FGMN sit idem*, ac EGM, demptâ inde parte *FGM*, *hinc LGM ipsi* æquali, relinquetur MN = EL: eodem pacto auferendo ex æqualibus F'E'M'N', GE'M' *partes* F'E'M', L'E'M' æquales, residua M'N', GL' erunt æqualia.

12. Deinde pro æquilibrio oportet, ut pondus totius massæ, vel telescopii, vel pontis ductum in lineolam æqualem illi, per quam ipsius centrum gravitatis ascenderet, si tempusculo infinitesimo haberetur motus circa centrum C, æquetur ponderi exercenti vim in N ducto in *lineolam* æqualem *illi*, *per* quam descenderet id punctum eodem tempusculo, vel *illi* æqualem. Si F *est ipsum* centrum gravitatis, & id *abeat* motu circulari in *f*, abeunte N *per* arcum curvæ in *n*, concipiantur autem rectæ FI, *fi* perpendiculares *radio* CE, & NR, *nr* rectæ verticali MP; eæ lineolæ erunt I*i*, & R*r*. Quod *si punctum* F *sit* alibi ubicunque in recta, quæ transit per punctum C, & per ipsum gravitatis

centrum; descensus ejusdem centri ad descensum puncti F erit, ut distantia illius ab ipso centro ad rectam CF, adeoque loco producti ex ascensu centri gravitatis, & pondere totius pontis, vel telescopii, poterit assumi productum ex lineola I*i*, & alio pondere minore, vel majore in ratione ejus distantiæ ad eam rectam. Id pondus dicatur *p*, & pondus, quod urget punctum N, dicatur P; eritque quævis lineola R*r*, ad lineolam I*i* sibi respondentem in ratione constanti *p* ad P. Quare in eadem ratione erunt etiam totæ lineæ MR, *EI*, quæ proveniunt ab omnium præcedentium summis. Eadem est demonstratio pro ratione eadem lineolarum R'*r*', I'*i*', si litteris omnibus adhibitis addatur accentus. Sed cum summa omnium I'*i*' sit CI', non E'I'; rectæ M'R', CI' erunt in illa ratione constanti ponderum *p*, P, quæ est origo discriminis inter formas, & æquationes binarum curvarum.

13. Inde autem habetur expeditissima constructio curvæ utriusque per puncta. Assumpto quovis puncto I in radio CE, capiatur MR in recta verticali MP quarta continuæ proportionalis post P, *p*, EI, ducaturque ex R recta ipsi perpendicularis indefinita: centro G, intervallo GF inveniatur in recta GE punctum L: centro M, intervallo EL inveniatur in illa perpendiculari indefinita punctum N. Id erit ad curvam quæsitam; cum nimirum assumpta sit MR habens rationem inventam ad EI, & ostensum sit num. 11, rectam MN debere esse æqualem rectæ EL. Eodem autem pacto assumptâ M'R' quartâ post P, *p*, CI', invenietur punctum N' centro M', intervallo GL'.

14. Figura est aptata casui, in quo adhibeatur pondus P majus pondere *p* in ratione 3 ad 2. Verum constructio evadit multo expeditior, si pondus P adhibeatur æquale ponderi *p*; neque enim erit opus ulla proportione ad inveniendum punctum R, cum sufficiat assumere MR æqualem EI, vel M'R' = CI': facilis autem est inventio puncti L, vel L' centro G, vel E', & intervallo GF, vel E'F', ac inventio puncti N, vel N' centro M, vel M', & intervallo EL, vel GL'; ubi etiam si MP, vel M'P' fiat = CE = CE'; ea erit in hoc casu ultima abscissa, & iis

& iis ipsis erit æqualis ultima ordinata PK, vel P'K' (*). Nam puncto F abeunte in G, abit eodem etiam L, & I abit in C; adeoque MR abiens in MP evadit = EC, & MN abiens in MK evadit = EG. Cum autem quadratum hujus sit duplum quadrati CE, erit & quadratum MK duplum quadrati MP, nimirum bina quadrata MP, PK æqualia simul binis MP, & proinde quadratum PK æquale uni quadrato MP. Eadem autem est demonstratio pro ultima abscissa M'P', in quam ultimò abit M'R' abeunte ultima CI' in CE', & GL' *in* GE', *cui* evadit æqualis ultima M'N' abiens *in* M'K'.

15. *Si pondus P fuerit majus*, vel minus quam *p*, abscissa MP vel M'P' *respondens ultimo puncto quadrantis* G, *vel* E debebit esse minor, vel major radio CE in eadem *ratione inversa*: ordinata autem PK, vel P'K' ipsi respondens, nisi evadat imaginaria, aucto pondere P augebitur, imminuto minuetur, ob MK *semper æqualem* constanti EG, vel GE', & abscissam MP, vel M'P' in *primo casu imminutam*, in secundo auctam. Ea in casu ponderis P majoris *pondere p*, *nec poterit* evadere impossibilis, nec vero evanescere: *at in casu contrario ponderis P minoris evanescet utique*, ubi ratio ipsius ad *p fuerit eadem*, *ac ratio lateris quadrati ad diagonalem*, sive 1 ad $\sqrt{2}$, *ac deinde adhuc magis* imminuto eo pondere, evadet impossibilis. Nam in casu ejus *rationis* evadit MP = EG = MK, evanescente PK, & eadem est demonstratio pro P'K'. Existente autem pondere P adhuc minore, adeoque adhuc aucta MP, ipsa evadet major quam EG, & intervallum huic æquale translatum in M non pertinget ad P. Non erit possibilis nisi arcus MN, cujus abscissa MR minor recta EL sibi respondente excrescat usque ad æqualitatem cum ipsa. Ibi arcus ipse, mutato prius recessu ab axe in accessum, desinet in ipsum; atque arcus circuli EF respondens ei EL erit ultimus *limes*, ad quem possit ascendere *telescopium* cum æquilibrio præstito ab illo pondere. Ubi arcus curvæ mutat recessum ab axe in accessum, convexitas, quæ erat objecta directioni gra-

 vita-

(*) Id quidem non exprimitur a figura, quæ non respondet æqualitati ponderum, sed illi rationi.

vitatis tendentis deorsum, mutatur in concavitatem. Et quidem multo ante, quam pondera deveniant ad rationem 1 ad $\sqrt{2}$, incipiet alicubi is arcus curvæ mutare recessum ab axe in accessum & directionem curvaturæ respectu directionis, qua agit gravitas, licet non deveniat ad ipsum axem, nisi ubi pondera devenerint ad illam rationem, vel ubi pondus P decreverit adhuc magis.

16. Patet inde, pro telescopio adhiberi posse pondus P quodcumque majus pondere *p*, pondus ipsi æquale, & vero etiam pondus minus usque ad rationem 1 ad $\sqrt{2}$. Verum præstabit evitare hunc casum ponderis saltem ita minoris, ut haberi debeat ante ascensum ad finem quadrantis ille regressus cum mutatione curvaturæ, qui non habetur nisi infra æqualitatem, ut facile demonstrari potest, & ex ipsa constructione facile innotescit. Æqualitas ponderum reddit constructionem simpliciorem, ut vidimus, nec producit plus æquo ultimam ordinatam PK, quod præstant pondera majora, & evadit incommodum in ea applicatione curvæ, quam adhibebimus inferius.

17. *In curva pro ponte non solum evadit impossibilis arcus postremus N'K', ubi pondere P depresso respectu p infra rationem 1 ad* $\sqrt{2}$ *evadit abscissa M'K' major, quam tota corda-circuli* E'G, cui deberet esse æqualis chorda curvæ M'N'; verum etiam nisi *pondus P fuerit multo* majus pondere *p*, evadit *impossibilis etiam ipse* arcus initialis M'N'. Cum enim binæ chordæ E'F', GF' simul excedant solum GE', & pars E'L' sit æqualis chordæ E'F'; chorda GF' erit major, quam residuum GL'. Porro accedente puncto F' ad G in infinitum, ex una parte recta CI' accedit in infinitum ad rationem æqualitatis cum chorda GF', & ex altera si concipiatur arcus F'L', qui initio poterit considerari ut recta linea perpendicularis chordæ GE'; angulo L'GF' accedente in infinitum ad semirectum, ratio chordæ GF' ad rectam GL' accedet in infinitum ad rationem $\sqrt{2}$ ad 1. Quare nisi ob augmentum ponderis P respectu *p* usque ad rationem $\sqrt{2}$ ad 1, vel ultra, minuatur ratio M'R' ad CI', quæ est reciproca rationis eorum ponderum, usque ad eum limitem, vel ultra; intervallum GL'

trans-

translatum in M' non pertinget ad R', adeoque *id pondus non poterit incipere esse in* æquilibrio cum ponte, nisi pondus P fuerit ad p ut $\sqrt{2}$ ad 1, vel adhuc majus. Id autem patet etiam idcirco, quod in G pons nititur ad descensum tota vi p agente directe, dum pondus P ope trochlearum trahit oblique directione E'G, cujus nisus ad vim absolutam est, ut CE' ad GE', nimirum ut $\sqrt{2}$ ad 1. Porro vis p in ponte, si is trahatur per funem, vel catenam applicatam margini, est circiter dimidium ponderis pontis totius, *cujus centrum gravitatis est circa medium*. at in telescopio, *cui funiculus adnectatur circa centrum ipsum gravitatis, est circiter æquale toti ponderi telescopii*. Sed iis jam omissis, progrediamur ad eruendam e constructione curvæ ejus æquationem.

18. Fiat CE $=$ CE' $=$ CG $= 1$, unde fiet EG $=$ GE' $= \sqrt{2}$, tum M'R' $= x$, R'N' $= y$; & factâ ratione ponderum $\frac{P}{p} = m$, erit CI' $= mx$, adeoque E'I' $= 1 - mx$, & chorda E'F', quæ est media inter *diametrum* EE', & abscissam E'I', $= \sqrt{(2 - 2mx)} =$ E'L' $=$ GE' $-$ GL' $=$ GE' $-$ M'N' $= \sqrt{2} - \sqrt{(y^2 + x^2)}$, habetur æquatio, quæ quadrando eos binos valores *ejusdem* E'L' evadit $2 - 2mx = 2 + y^2 + x^2 - 2\sqrt{(2y^2 + 2x^2)}$, sive $2\sqrt{(2y^2 + 2x^2)} = y^2 + x^2 + 2mx$. Quadrando iterum, ea demum assurgit ad gradum quartum.

19. At factis CE $=$ CE' $=$ CG $= 1$, adeoque EG $= \sqrt{2}$, MR $= x$, RN $= y$, ratione ponderum $= m$; non CI, sed EI erit $= mx$, & CI $= 1 - mx$. Ductâ FH perpendiculari ad CG, quæ erit $=$ CI $= 1 - mx$, erit CH $= \sqrt{(1 - (1 - mx)^2)} = \sqrt{(2mx - m^2x^2)}$, & GH $= 1 - \sqrt{(2mx - m^2x^2)}$, quæ cum ducta in diametrum $= 2$ æquetur quadrato chordæ GF, sive rectæ GL, erit GL $= \sqrt{(2 - 2\sqrt{(2mx - m^2x^2)})} =$ EG $-$ EL $=$ EG $-$ MN $= \sqrt{2} - \sqrt{(y^2 + x^2)}$. Inde oritur æquatio $2 - 2\sqrt{(2mx - m^2x^2)} = 2 - 2\sqrt{(2y^2 + 2x^2)} + y^2 + x^2$, sive $y^2 + x^2 = 2\sqrt{(2y^2 + 2x^2)} - 2\sqrt{(2mx - m^2x^2)}$. Patet, ad auferendam irrationalitatem oportere post primam elevationem ad quadratum, quæ inducet $y^4 + 2x^2y^2 + x^4$, transferre terminos ratio-

rationales secundi membri in primum, ac iterum quadrare, quod æquationem reddet usque adeo complicatam, & elevatam ad gradum octavum : nec vero æqualitas ponderum prodest quidquam, quæ reddit tantummodo $m = 1$; licet ea reddat constructionem usque adeo magis expeditam.

20. Constructio geometrica multo *melius* ipsis oculis exhibebit *formam* integram ejus curvæ, cujus hic indigemus solo arcu MNK, qui est ejus pars exigua, & *sistet* animo ipsius naturam, quam æquatio usque adeo *complicata*. *Ipsa* autem constructio evadet adhuc *multo magis commoda*, *si pro casu* maximæ simplicitatis ponderum fiat intra *circulum genitori* æqualem sequenti pacto. Capiatur (*fig.* 2) in axe curvæ *describendæ* MC æqualis radio *CE figuræ* 1, & centro C describatur quadrans circuli MFG, ducaturque chorda MG. E quovis puncto R ipsius radii ducatur ordinata RF: centro G, intervallo GF inveniatur in chorda GM punctum L: tum centro M, intervallo ML inveniatur in *ordinata* RF punctum N. Id erit ad curvam *quæsitam*, *quæ desinet* in G, punctis P, K figuræ 1 *abeuntibus hic in* hæc puncta C, G. Erit enim *EI ejusdem figuræ* 1 *æqualis MR hujus* secundæ, ut ibi *illius* MR. *Hinc* RF *hujus* abscindet *arcum circuli* MF æqualem *arcui* EF *illius*, & *chorda* GF, ac *recta* GL *hujus* erunt æquales GF, GL illius, adeoque residuum ML hujus residuo EL illius. *Cumque ibi punctum* N inventum *sit* centro M, eo *intervallo*, *ut hic*, *in recta* RF perpendiculari ad MR; erit punctum N hic idem, ac ibi.

21. Id quidem abunde est pro arcu MNG, qui respondet elevationi telescopii per quadrantem integrum figuræ 1 : verum satis patet, locum geometricum integrum debere habere plura alia puncta in quavis linea perpendiculari ad axem MC. Nam in primis recta illa perpendicularis ducta per R, & indefinite producta, occurrit circulo integro, qui totus continet unum locum geometricum etiam in alio puncto analogo huic F. Hinc habebuntur duo intervalla GF. Horum autem singula exhibebunt in eadem recta MG indefinite producta duo puncta L hinc, & inde a puncto G, quæ jam evadunt quatuor. Demum centro M,

inter-

intervallo cujusvis ex iis quatuor GL, quæ sit *major* abscissa MR, debent inveniri bina puncta N hinc, & inde a puncto R in illa eadem recta perpendiculari, quæ idcirco evadunt 8, & respondent æquationi octavi gradus, cujus generis curvæ secari possunt a recta linea in octo punctis.

22. Patet autem, in curvis respondentibus cuivis rationi ponderum binas rectas RN inventas centro M, & quovis ex iis quatuor intervallis fore æquales inter se, adeoque rectam MC indefinite productam *semper fore axem, qui secabit bifariam*, & *ad angulos rectos omnes chordas jungentes ea punctorum binaria*, ac *habebit bina dimidia totius curvæ hinc*, & *inde æqualia*. Ubi aliqua ex iis quatuor ML fuerit æqualis abscissæ MR, bini arcus MN positi hinc, & inde ab axe abibunt simul in punctum R, evanescente RN $= y$, ubi earum unio requiret tangentem communem, quod exigit natura continuitatis geometricæ. Ea vel debet esse axis ipse, quod accidit, si ibi habeatur cuspis, vel eidem axi perpendicularis, quod in curva pro telescopio habebitur semper in M, *abeuntibus eo simul cum* R binis punctis F, binis e quatuor L, *nimirum singulis e binis*, quæ determinantur per *horum* singula, ac quatuor punctis N. *Ibi nimirum bini arcus pertinentes* ad *eum locum geometricum* contingent rectam perpendicularem axi, quod patet in figura 3 exhibente curvam integram delineatam juxta hanc constructionem. Ibidem videre est binos alios arcus, qui secant axem ad angulos rectos, nimirum in punctis M, M′.

23. Ea puncta omnia inveniuntur ope æquationis numeri 19 facta RN $= y = 0$ juxta num. 15. Obtinetur enim $x^2 = \pm 2x\sqrt{2} - 2\sqrt{(2mx - m^2x^2)}$, nimirum $x^2 \mp 2x\sqrt{2} = -2\sqrt{(2mx - m^2x^2)}$, adeoque $x^4 \pm 4x^3\sqrt{2} + 8x^2 = 8mx - 4m^2x^2$; & $x^4 \pm 4x^3\sqrt{2} + (4m^2 + 8)x^2 - 8mx = 0$. Inde obtinentur tres æquationes sequentes.

$$x = 0$$

$$x^3 + 4x^2\sqrt{2} + (4m^2 + 8)x - 8m = 0$$

$$x^3 - 4x^2\sqrt{2} + (4m^2 + 8)x - 8m = 0.$$

Prima æquatio exhibet pro quavis ratione m ponderum punctum ipsum

ipsum M, *in* quo *habetur* tangens: reliquæ duæ omnino unam radicem realem singulæ, prior minorem in fig. 3, quæ respondet valori $m = 1$, pro abscissa minore MM', posterior majorem MM'': reliquæ binæ radices singularum æquationum gradus tertii debent esse imaginariæ, cum constructio non exhibuerit nisi tria puncta M, M', M'' habentia ordinatam $\pm y = 0$: semper enim habentur binæ æquales directionum oppositarum: & vero in æquatione non habebatur nisi y^2, quo valore facto $= 0$, habetur $\pm y = 0$. *In delineationibus*, *quæ respondent* pluribus aliis valoribus m, *adhibui autem plures ad contem*plandam ipsam indolem transformationum, & *formas multiplices* curvarum inter se admodum *diversarum*, quæ *respondent* iis *diversis* valoribus, inveni *aliquando tria tantummodo ejusmodi* puncta ut hic, aliquando quinque, quod indicat, non semper binas radices in utraque ex iis binis æquationibus gradus tertii esse imaginarias: idem exhibebit calculus substituenti numeros.

24. Pro figura 3 assumptus est circulus totus *MGVg*, & *chorda* MG indefinite *producta*: *tum ductis per* multa puncta R *assumpta in diametro MCV rectis ipsi perpendicularibus*, posita *sunt in singularum occursu cum* circulo puncta *hinc* F, *inde f*: *centro* G, *intervallo quovis GF inventa* sunt *in eadem chorda* puncta, L versus M, & L' ad partes oppositas; ac quovis intervallo *Gf puncta* l, l': *demum centro* M, & quovis *intervallo ML* inventa *sunt in* recta *Ff* indefinita puncta N, N' hinc, & inde ab axe, quovis intervallo ML' puncta N'', N''', quovis Ml puncta n, n', quovis Ml' puncta n'', n'''. Obvenit curva, quæ ibi cernitur, quæ quidem bis transit per G, in quod punctum abit in eo casu postremum punctum K figuræ 1 cum punctis L, N figuræ 2, & hujus; adeoque transit etiam per punctum g diametraliter oppositum. Ejus forma ibi apparet admodum elegans: solus autem ipsius arcus MNG, vel MN'g ipsi æqualis, & *oppositus*, habet usum pro æquilibrio telescopii: *reliqui* exhibent contemplandam Geometriæ *indolem*, multo sane jucundiore exercitatione, quam occurrat in complicatis analyseos sublimis formulis illis paginalibus, quæ sæpe obtundunt mentem potius, quam recreent.

25. Por-

25. Porro ea curva contingit rectam perpendicularem axi MV ductam per V in punctis T, t, in quibus ipsi occurrunt chordæ MG, Mg productæ, ac rectam itidem perpendicularem eidem ductam per M in puncto ipso M, & in aliis binis E, e ad distantias ME, Me æquales rectæ MT. Habet nodum in $MnM'n'M$, *ac ibi arcum* NMN' tangit simul, & secat: ductus *enim continuus totius curvæ habet* sequentem litterarum ordinem $M'n'MNGTn''EN''GM''gN'''en'''tgN'MnM'$. Rectæ perpendiculares *axi, quæ ipsi occurrunt ab M ad M', occurrunt curvæ* in punctis 8; ab M' ad M'' *in punctis 6; ab M'' ad* V in punctis tantummodo 4, *radicibus omnibus* valoris y respondentis datæ x realibus, donec *ipsa est* minor, quam recta MM' *determinata per* primam ex iis binis æquationibus gradus *tertii* : *inde usque ad* valorem $M'M''$ respondentem secundæ evadunt *imaginariæ* binæ : tum usque ad valorem $MV = 2$ fiunt imaginariæ quatuor. Sed *si* assumatur x vel positiva major, quam 2, vel negativa cujuscumque *magnitudinis*; fiunt imaginariæ omnes. Facto $y^2 = z$, valor z habebitur per *æquationem gradus* quarti, cum in illa gradus octavi *non debeant occurrere, nisi* valores y^8, y^6, y^4, y^2. Fiet autem *imaginarius* valor y, vel quia aliqua, *aut aliquæ ex radicibus* z *ejus æquationis*, vel *etiam omnes*, erunt imaginariæ, vel quia erunt valoris negativi, quo casu erit realis valor z, imaginarius *valor* $y = \pm \sqrt{2}$. Verum hæc ipsa reductio æquationis ad gradum quartum pro $z = y^2$ ostendit, binas ordinatas æquales, & contrarias respondere semper cuivis abscissæ, adeoque rectam abscissarum esse axem; quod jam superius constructio ipsa ostenderat.

26. Pro determinandis punctis appulsuum ad axem curvæ æquilibrii pro ponte, facto $y = 0$ in æquatione numeri 18 fiet $\pm 2x\sqrt{2} = x^2 + 2mx$, unde oriuntur tres valores x, nimirum $x = 0$, $x = 2\sqrt{2} - 2m$, $x = -2\sqrt{2} - 2m$, qui præter verticem M, *exhibent* determinatione usque adeo simpliciore bina alia puncta. *Verum in casu, in quo initium* arcus infra verticem M' est *impossibile*, non *habebitur ibi* ullus arcus pertinens *ad* eum locum geometricum, sed punctum unicum, nimirum ipsum

M'. *Sed jam omiſſa* conſideratione ejus curvæ *immorabimur* non nihil in altera pro teleſcopio.

27. Conſtructio pro curva integra etiam extra caſum æqualitatis ponderum fiet facile ope integri circuli, adjecto altero, cujus radius MC' in fig. 4 ad radium prioris MC ſit ut pondus *p* ad P. Inventis eodem modo in recta MG indefinite producta punctis L, L', *l*, *l'* centro G, intervallo GF, & G*f*, producatur MF usque ad novum circulum in F', ac centro M, intervallo MF' inveniatur *in eodem circulo punctum f'; ductâque F'f'* indefinitâ, invenientur in *hac rectâ illa binaria punctorum* N, *n*, eodem priore centro M, & intervallo *ipſius* a *punctis* L, L', *l*, *l'*. Demonſtratio patet ex eo, quod recta *F'f'* *debet* ita occurrere axi *in puncto* R', *ut ſi* MG producta occurrat novo circulo in G', nova abſciſſa MR' ſit ad priorem MR reſpondentem abſciſſæ circulari EI figuræ 1 in ratione chordæ MG ad MG', quæ eſt ratio diametri MV ad MV', ſive radii MC ad MC', nimirum ponderis *p* ad pondus P, ut oportebat, manentibus cæteris *pro inventione* punctorum N, *n per centrum idem M*, *&* eadem intervalla.

28. *Figura reſpondet ponderi P paullo minori pondere p*, quam *ob cauſam diameter MV'* eſt *major* diametro *MV: eſſet minor*, *ſi pondus P eſſet majus. Infinitum eſſet perſequi tranſformationes* omnes curvæ reſpondentis continuo incremento, vel decremento ponderis *P*. *Multa perſecutus* ſum cum jucunda contemplatione *figurarum*, quæ per accuratam, & adhuc facilem delineationem obtinentur: eaſdem facile obtinebit per ſeſe, qui haſce contemplationibus delectetur. Hic ego progrediar ad caſum funiculi advoluti curvæ convexæ, in quo ipſa eſt tranſcendens, ut indicavimus num. 8. In figura 1, manentibus cæteris, recta EL erit æqualis non chordæ, ſed arcui MN, cujus valor non eſt $\surd(x^2+y^2)$, ſed $\int.\surd(dx^2 + dy^2)$, ob N$n = \surd(dx^2 + dy^2)$. Hinc habebitur æquatio ſubſtituendo num. 19 hunc valorem illi, quæ fiet $\surd(2 - 2\surd(2mx - m^2x^2)) = \surd 2 - \int.\surd(dx^2 + dy^2)$. Facto $\surd(2mx - m^2x^2) = z$, fiet $\surd(2-2z) = \surd 2 - \int.\surd dx^2 + dy^2$, adeoque differentiando $\frac{-dz}{\surd(2-2z)} = \surd(dx^2 + dy^2)$,

ſive

sive $dy^2 = \frac{dz^2}{2 - 2z} - dx^2$. Erit autem $dz = \frac{mdx - m^2xdx}{z}$. Quare $dy = dx\sqrt{\left(\frac{(m - m^2x)^2}{2z^2 - 2z^3} - 1\right)}$, ubi cum z detur per x, habetur integratio per series, vel quadraturam curvæ algebraicæ. Sed ea est satis complicata, & aliunde inutilis, cum habeatur alia curva algebraica, & constructionis usque adeo simplicis, ac expeditæ, quæ rem absolvat. Accedit quod omissa est resistentia orta e frictione, quæ *non potest esse nimis* exigua, & cujus consideratio *redderet æquationem curvæ multo magis complicatam*.

29. Reliquum est, ut *videamus*, quomodo appendi possit pondus P illi axi *cujusdam velut* curriculi, quem indicavimus num. *7*, ita ut punctum *suspensionis* descendat *per curvam æquilibrii* convexam, & tamen funiculus sit semper re*ctilineus*. In fig. 5 ADB est quadrans muralis, cujus centrum C, telescopium CD, quod convertitur circa id centrum. Ejus tubus in suo centro gravitatis F *habet* adnexum funiculum tendentem inde ad trochleam G, quæ ad distantiam CG *æqualem* CF ita debet adnecti, ut telescopium addu*ctum ad positionem horizontalem* libere appellat ad ipsam, *vel etiam ipsa cochlea collocanda est paullo superius*; ut nimirum *possit* elevari *punctum D non nihil* supra positionem horizontalem, quod potest habere usum quendam pro verificatione puncti horizontalis quadrantis ipsius per objectum terrestre remotum, & non nihil elevatum supra horizontem, visum & directe, & per reflexionem in aqua, quem usum exposui in Opusculo præcedente. Funiculus ascendit verticaliter usque ad trochleam ampliorem EE affixam muro per virgam ferream QEEQ figuræ *6* inflexam in EE (*). Ejus planum est perpendiculare plano quadrantis, cui advolvitur funiculus in I, tum descendit per rectam itidem verticalem inter quadrantem, & murum; usque ad foramen, quod debet haberi in R in machinamento ligneo HQ constructo ex *pluribus* crassioribus tabulis modo, quem jam exponam, ac descendit usque ad trochleam M affixam intra ipsum machina-

L 2 china-

(*) Virga EE delineata est longior quam in fig. 5 tantummodo ut possit apparere flexio versus murum.

chinamentum, cui trochleæ advolutum abit usque ad punctum N pertinens ad medium axem ejus veluti exigui currus: huic autem, ut itidem mox explicabitur in fig. 7, est adnexum pondus P. Id punctum ope ejusmodi currus descendit per curvam inventam æquilibrii MNK, dum telescopium CD circulari motu ascendit versus positionem horizontalem.

30. Figura 7 exhibet sectionem QRR'Q' verticalem machinamenti HO figuræ 5 factam per ejus punctum N cum ipsius residuo usque ad fundum LOL'. *Id machinamentum continetur binis crassioribus tabulis formæ expressæ in ea figura*. Debet in iis delineari curva æquilibrii MNK: figura exprimit eam, quæ respondet ponderi æquali; posset autem adhiberi etiam ea, quæ respondet paullo majori, vel minori. In observatorio Mediolanensi adhibui pondus tantillo majus, quod reddidit ultimam ordinatam paullo majorem radio. Id autem est minus commodum, quia sic ipsa evadit major etiam dimidio radio quadrantis GC, *adeoque* non solum caput machinamenti O, sed ipsa curva *excurrit* ultra radium CB, qui in positione superius indicata parum distat a muro perpendiculari *illi*, *cui* quadrans *adnectitur*, ne nimirum longior apertura sit necessaria in tabulato superiore, & tecto ad observandas fixas parum remotas a zenith.

31. Latitudo earum tabularum determinatur a binis lineis ductis hinc, & inde ad eandem ubique distantiam ab ipsa linea MNK arbitrariam, sed ejusmodi, ut consulatur firmitati totius operis: procurrit autem utraque hinc ultra verticem M curvæ ipsius in H, inde ultra partem imam K in LOL' ita, ut abeat aliquanto etiam ultra rectam verticalem KK', ut nimirum rotæ exigui currus non impediant appulsum puncti N ad K, & intra intervallum, quod haberi debet inter eas binas tabulas, ut jam videbimus, possit etiam in eo appulsu libere pendere funiculus NP.

32. Binæ tabulæ interiores indicatæ tantummodo in SS' *habebant ibi sulcos*, per quos debebant descendere *binæ* rotæ curriculi: quamobrem eæ debebant esse multo minus *latæ*: erant autem etiam breviores, affixæ per clavos singulæ singulis externis, & habentes formam indicatam in fig. 5 in *abcfed*: terminaban-

bantur singulæ ex parte interiore per curvam *abc* distantem a curva æquilibrii MNK delineata in tabula externa sibi respondente per intervallum tantillo minorem semidiametro rotarum curriculi, æquale nimirum profunditati sulci: eo pacto, superficie rotæ innixâ in fig. 7 superficiei sulci, axiculus respondebat utrinque puncto N curvæ æquilibrii MNK figuræ 5.

33. Altera ex binis tabulis externis, cujus sectio habetur in fig. 7 in Q'R', potest adnecti ipsi muro per clavos: altera expressa ibidem per QR *potest distare ab ipsa per intervallum paullo majus axe curriculi N, qui axis connectit binas rotas ita, ut* permittat *earum motum circularem:* pondus P est affixum medio axi in N, ad quod *tendit* funiculus MN, qui *transit* libere *per* intervallum inter eas *binas* tabulas: intervallum *binorum* pollicum est abunde. Secunda tabula connectitur cum præcedente per tabulam interpositam in utroque excursu machinamenti ultra curvam versus H, & in LOL', ac ad majorem firmitatem etiam per tabulam minus latam interpositam per totum marginem superiorem usque ad aperturam, *quæ debet relinqui supra* locum curvæ MNK pro parte *superiore rotarum. Ejus crassitudo debet esse æqualis ei intervallo: ipsius sectionem indicat figura* 7 in TT'. Porro *præstabit efficere* nexum tabulæ extremæ cum intermedia TT' in T per *cochleas* potius, quam per clavos, ut si quid in *ipso curriculo, vel* in trochlea affigenda in M reparatione indigeat, *possit facile* aperiri machinamentum ad eam rem.

34. In ea tabula intermedia debet haberi foramen verticale in R ad excipiendum *funiculum. Per totum* marginem inferiorem utrinque tabulæ *latioris* debent haberi binæ minus latæ, & minus crassæ in S, & S' cum canali excavato in parte superiore, cui insistant rotæ ita, ut deflecti nequeant in latus: intervallum inter *ipsas* debet esse paullo amplius, quam sit crassitudo funiculi, *cui debet* relinqui transitus prorsus liber. Applicato eo machinamento *in* observatorio Mediolanensi, obtinui quietem telescopii in quavis *positione*, non *obstante* ingente ejus pondere. Æquilibrium utique non *erat* perfectum, quia nec tubus est unica *linea*, nec trochleæ unica puncta, & funiculus ipse resistit non

nihil

nihil *flexioni*: at ea omnia ita compenſabantur a frictionibus axium, & ab ea reſiſtentia funiculi, ut teleſcopium, quod, ſummoto pondere P vix manu ſuſtineri poſſit prope poſitionem horizontalem, ubi vis ejus ad deſcenſum eſt maxima, eo appoſito ſponte quieſceret, & vi perquam tenui manu impreſſa promoveretur in partem utramvis. Illud tantummodo cavendum erat, quod in ponte exigente curvam concavam non accidit, ut ubi punctum N jam eſſet in parte ſuprema curvæ habente directionem horizontalem, *deflexo tubo* per manum applicatam ejus margini inferiori punctum N *non* inciperet *moveri*, *niſi* vi exigua illata funiculo prope N traheretur non nihil in latus uſque ad ſenſibilem inclinationem tangentis.

35. Porro illud obtinebatur ope æquilibrii, quod eſt ejus uſus præcipuus, ut in quavis poſitione teleſcopii cochlea micrometri externi, qua id promovetur ita, ut filum horizontale adducatur ad aſtrum culminans, exerceret ubique vim ad ſenſum eandem, quæ ſine eo auxilio gravaretur multo magis in quadrante *ſummo*, quam in imo, quod redderet *inæqualem* valorem partium micrometri.

OPU-

OPUSCULUM VI.

De collocatione, et verificatione ingentis quadrantis verticalis mobilis circa axem verticalem cum alidada, quæ in ingenti circulo horizontali notet azimutha.

1. IN postremo Opusculo Tomi II ostendi maxima commoda, quæ ab hujus formæ instrumento satis magno *provenire* possunt in universam Astronomiam, ac promisi me in *hoc* hujusce Tomi Opusculo acturum de ipsius collocatione, & verificatione. Ea commoda huc reducuntur.

I. Ope ipsius, & horologii oscillatorii, potest determinari altitudo poli independenter a refractionibus sine ulla suppositione physica præter æquabilitatem motus diurni intra unicam quamvis revolutionem horarum 24, & *actionem* refractionum non excurrentem in latus extra *planum verticale saltem in altitudinibus* supra horizontem *non nimis* exiguis, de quibus binis suppositionibus dubitari *omnino non potest*.

II. Possunt determinari sine ullis aliis suppositionibus physicis *refractiones* omnes, & earum variationes respondentes variationibus barometri, thermometri, & si *libeat* etiam hygrometri.

III. Possunt determinari ascensiones rectæ, & declinationes fixarum quarumcumque etiam independenter a refractionibus, quod multo facilius fieri potest dependenter ab ipsarum refractionum tabulis, & æque tuto, si refractiones ipsæ ope hujusce instrumenti jam fuerint determinatæ.

IV. Potest ope refractionum jam determinatarum haberi per unicam *observationem* momentaneam ascensio recta, & *declinatio* planetæ, *aut cometæ cujusvis*, quod quantæ utilitatis sit, videbit sane quivis *Artronomus*. Binarum horarum intervallo obtineri ita possunt commodissime 20, & fortasse etiam 30 observationes ejusdem astri.

2. Quo

2. Quo pacto ii fructus erui possint, ostendi *ibidem*, demonstrationibus adjectis: illud hic addi potest, id instrumentum gerere vicem tam quadrantis muralis, quam quadrantis portatilis: & quidem in eo habetur quoddam genus quadrantis muralis universalis, qui solitis muralibus quadrantibus in eo præstat, quod adhiberi potest in plano verticali directionis cujuscumque, dum quadrantes murales non adhibentur nisi in solo plano meridiani cum directione australi, vel boreali: idem autem præstat quadranti mobili in eo, quod unum e præcipuis usibus ipsius reddat multo meliorem. Is usus consistit in determinatione altitudinum correspondentium, licet ea obtineri possit etiam per instrumentum quadrante portatili multo simplicius: at ope hujusce instrumenti non solum æque facile capiuntur altitudines correspondentes, sed iis substitui possunt azimutha correspondentia, quæ nihil timent a refractionum variatione, dum hæc, si accidat illo plurium horarum intervallo, quod inter observationes binarum æqualium altitudinum intercedit, erroneam reddat ipsam determinationem inde deductam. Oportet ingerere ideam diversarum partium, quibus constat ipsa machina, ac eorum, quæ adjungi debent ad obtinendos varios ejus usus, & exponere methodum obtinendi divisiones accuratissimas, ac persequi ea, quæ pertinent ad verificationes & ipsarum, & collocationis debitæ.

3. Machina debet habere (Tab. IV fig. 1) axem verticalem MN admodum crassum, qui moveri possit in gyrum circa se ipsum: huic in summo vertice debet in positione transversa adnecti regula ferrea admodum itidem crassa ONP: præstabit eam adnectere ad angulos ad sensum rectos in formam crucis, sed ea non est conditio necessaria: binis hujus punctis O, P, & uni puncto axis R posset adnecti quadrans ACB, uti adnectitur muro: verum præstat in utroque casu non adnectere quadrantem cruci, aut muro, sed suspendere e binis illis punctis superioribus methodo, quam innui num. 36 Opusculi III, ac explicabo inferius, & applicare tantummodo ad cuspidem cochleæ transeuntis per ipsum axem ita, ut limbus e parte sui posteriore, vel regula quævis pertinens ad totam compagem quadrantis, ipsam tangat, & contactu suo determinet positionem verticalem ejus plani, dum cochlea rite ap-

pli-

plicata modo itidem exponendo inferius in loco *alterius* e *binis* superioribus suspensionibus elevando, vel deprimendo ipsum suspensionis punctum, mutet inclinationem omnium linearum pertinentium ad totam eandem compagem motu manente intra idem planum verticale, quo post redactum ad positionem accurate verticalem axem *MN reduci* possit alter e binis radiis extremis quadrantis ipsius ad positionem accurate horizontalem, & alter ad accurate verticalem. Ipsa autem regula OP fulciri potest binis itidem crassis *oblique adnexis in OR, PR*. *Quadrans* ita suspensus in illa *cruce nihil differt a quadrante murali*, *nec ejus* usus ab usu illius. *Crux gerit vices muri cum hoc* solo discrimine, quod hic veluti murus *dirigitur ad* quamcumque *horizontis partem*.

4. Idem axis *debet* habere adnexam *alidadam horizontalem* DE, quæ pertinget usque ad dimidiam latitudinem *fasciæ* horizontalis, analogæ horizonti sphæræ armillaris, sustentatæ in quatuor punctis diametraliter oppositis, quorum bina exhibet figura in H, H. *Hæc fascia sustinebitur* a totidem pilis ferreis IH, innixis binis *trabibus* itidem *ferreis II se intersecantibus* ad angulos rectos in K, quæ *intersectio facta in plano horizontali perpendiculari* ad *sectionem verticalem exhibitam a figura*, *supplenda est per imaginationem*. *Hæ trabes possunt habere superficiem superiorem* in eodem plano cum pavimento speculæ destinatæ pro hoc instrumento: oportet autem innitantur in K fundamento magnæ soliditatis: optimum esset, si id foret intersectio binorum murorum pertinentium ad inferiora conclavia, vel saltem unico muro provenienti a fundamentis totius ædificii. In observatorio Parisiensi (*), in quo summus, & diligentissimus Astronomus Messierius tot observationes egregias instituit, habetur in media scala lapidea ejus turris, cui observatorium est impositum, pro fulcro firmissimo, ei rei maxime opportuno, cylindrus exurgens ex superpositione graduum, qui verticaliter erigitur a fundamentis usque ad observatorium ipsum. Saltem deberet haberi in ipso centro K fornix admodum firmus, qui nimirum deberet sustine-

(*) L' Observatoire de la Marine à l' hôtel de Clugny.

re totum pondus ingentis machinæ, tam id, quod pertinet ad eum limbum, & ejus fulcra, quam id, quod pertinet ad axem, quadrantem, alidadam.

5. Ipsa alidada debet fulciri per regulam ferream obliquam F, & ut minus obnoxia esset flexioni, oporteret ipsi adnectere afferruminatam alteram, cujus facies latæ latis ejus faciebus perpendiculares haberent positionem verticalem: ut etiam, ne nimio suo pondere nimis fortiter apprimeretur ei parti amplioris illius horizontalis circuli, posset ipsi adjungi æquipondium in G, quod hanc machinæ partem contineret in æquilibrio.

6. In centro K ipsi concursui trabium horizontalium II imponenda esset crassior lamina metallica iisdem adnexa habens foveolam concavitatis aptæ ad excipiendam imam superficiem M axis redactam ad sphæricitatem convexitatis paullo majoris, ut nimirum contactus fieret in unico puncto. Posset etiam ibi adnecti ipsi laminæ cylindrus cavus brevis cavitate æquali crassitudini axis, qui intra ipsum immissus inniteretur in unico puncto fundi ipsius habentis superficiem cavam cavitate paullo minore: ejus cylindri latera illa brevia impedirent excursum axis in latus in ipso imo puncto M. Ad imminuendum effectum frictionis, qui in binis superficiebus ex eodem metallo est major, præstaret efformare eam laminam, vel illum cylindrum ex aurichalco, cum axis sit ferreus.

7. Verum posset imminui, & vero etiam impediri penitus omnis effectus frictionis inductæ a gravi pondere axis sustinentis quadrantem, & alidadam hoc alio pacto. Hoc genus instrumenti requirit tectum mobile, in quo habeatur saltem una fenestra, quæ aperta permittat prospectum per telescopium in quadrantem azimuthi cælestis, & vero etiam paullo citra zenith: forma instrumenti permittit, ut apertura fenestræ non pertingat usque ad centrum ipsius tecti mobilis: satis est, si ipsa protendatur ex parte superiore paullo ultra intervallum productionis rectæ BC versus axem, & ex parte inferiore paullo infra productionem radii horizontalis AC. In Mediolanensi specula ego suspendi ipsum tectum innixum cuspidi ferreæ sustentatæ a tribus ferreis perticis affixis

late-

lateribus immobilibus, quibus id imminet: eæ tres perticæ ascendunt verticaliter, tum incurvantur, & conveniunt in summo vertice, ac sustinent tectum, quod circa ipsas immotas movetur in gyrum: eo pacto id movetur facillime levi manu, cum libere innitatur ei cuspidi, dum in observatoriis communibus, in quibus id innititur rotulis gyrantibus intra canalem excavatum in superficie horizontali parietum cylindricorum turris continentis instrumenta, ingenti vi opus est ad movendum tectum ipsum: habentur autem in mea suspensione quædam *trochleæ horizontales*, quæ gyrant circa axes verticales connexos *inferne cum ipsis perticis*, dum in eas incurrunt coni *ipsius latera inferiora*, inclinato axe ob defectum accurati æquilibrii, quod induci non potest in molem *ingentem* unico puncto innixam, vel cito amittitur; eæ *trochleæ impediunt* progressum inclinationis, nec resistentiam pariunt motui circulari ipsius tecti, dum attactæ identidem a lateribus ipsius gyrantibus *gyrant* & ipsæ circa suos axes.

8. *Uni ex iis* perticis, vel nexui omnium trium prope verticem affigi potest trochlea *verticalis T*, *cui* advolvatur funis, qui ex una parte *descendat usque ad verticem N axis*, & *ipsum sustineat*, *ex altera sustineat pondus S paullo levius* pondere axis ipsius, & *ejus* quadrantis, *ac alidadæ*, quod efficiet, ut attritus in M sit per quam exiguus, & motus circularis totius molis admodum *facilis*. Potest funis esse duplex a transitu per foramen, quod fiat in ipso axe in N, usque ad quoddam punctum T parum distans a trochlea, qui sibi invicem advolvetur, ac evolvetur, sine periculo dissolutionis, si conversio instrumenti fiat in partes oppositas ita, ut non procedatur ultra dimidiam conversionem in eandem plagam. Verum etiam sine ejusmodi æquipondio non erit nimis difficilis conversio machinæ incumbentis in M unico puncto superficiei cavæ inferioris, & si timendum sit, ne *longiore tempore* attritus absumat ibi binas superficies, axe descendente non nihil cum alidada, & arcu adnexo, fieri potest, ut lamina inferior *in K innitatur trabibus ferreis II* per cochleas, quarum ope elevari possit per exiguum illud intervallum, quod respondeat superficiei imæ axis in K consumptæ ab attritu.

 9. Ut

9. *Ut axis MN acquirat positionem verticalem*, eam conſervet, & facile recuperet, ſi forte amiſerit, poterit adhiberi quoddam genus veluti fulcri deſtinati non ad ſuſtinendam molem, ſed ad continendam. Quatuor ferreæ columnæ, vel pilæ quadratæ, quarum binas exhibet figura in *ab*, adnexæ horizontalibus illis ferreis trabibus II ſuſtinebunt craſſiorem *laminam* quadratam *bb* ex aurichalco, perforatam in medio per aperturam ſatis magnam: ſuper hac inter duas regulas *horizontales* parallelas affixas ipſi poterit promoveri *ope cochleæ ſecunda itidem perforata* in medio, & ſuper hac *inter alias duas ipſi itidem affixas* in directione perpendiculari prioribus poterit ope *alterius cochleæ* excurrere motu *horizontali tertia*, quæ habebit foramen *circulare* bene tornatum, *cujus diameter ſit* æqualis diametro annuli ex eodem metallo accurate itidem tornati, & adnexi eidem axi ferreo in *cc*: is annulus cum toto axe continebitur in debita poſitione verticali ab ea tertia lamina, Ipſas laminas figura indicat tantummodo; ſed facile eſt mente concipere mechaniſmum, quo ope primæ *cochleæ ſecunda* lamina poſſit excurrere *motu exiguo horizontali* inter binas regulas *primæ*, *exempli gratiâ*, *motu directo a meridie* ad ſeptentrionem, *ac tertia inter regulas ſecundæ motu itidem horizontali* ab oriente in occidentem, & *viceverſa*. *Quo fulcrum ipſum ſit* magis ſolidum, poterunt adhiberi ferreæ virgæ *d*, *d* ſatis craſſæ, quæ *poſitione ſua obliqua firmiores* reddant pilas, vel *columellas ab*. Patet autem, manente puncto contactus M, poſſe ope earum cochlearum corrigi inclinationem ipſius axis: nam motus ejus circularis circa ſeipſum facile prodet quemvis minimum defectum poſitionis relate ad verticalitatem corrigendum per eaſdem cochleas: is & agnoſci, & corrigi poterit, tam ope binorum filorum cum adnexis ponderibus, quam ope unicæ libellæ ex iis, quæ per bullam aeris relicti in cylindro vitreo pleno liquore admodum mobili, indicant poſitionem horizontalem, *quales jam fiunt* ita perfectæ, ut ſenſibilem reddant inclinationem *unius* etiam ſecundi.

10. Pro prima *methodo ſatis eſt* affigere binas cuſpides binis punctis aſſumptis in binis lateribus ipſius axis diſtantibus a ſe *in*vi-

vicem per quadrantem circuli, qui oriretur e sectione horizontali ejus figuræ cylindricæ: in parte inferiori debent iis respondere binæ lamellæ verticales affixæ eidem axi paullo supra annulum *cc*, quarum singulæ habeant suum tenue punctum, per quod filum ipsi respondens debeat transire tum, cum axis obtinet positionem accurate verticalem: oportet autem ita collocare lamellas ipsas, ut possint non nihil promoveri in latus, antequam ad fixitatem reducantur. Adducto per gyrum axis filo altero ad directionem respondentem alteri e binis cochleis, quæ annulum *cc* promovent per alteram e binis laminis, in quam ea agit, debet promoveri lamella ipsa ita, ut ejus punctum tegatur a filo sibi respondente: factâ dimidiâ conversione, si filum non transeat per idem punctum, patebit, haberi inclinationem axis in positione perpendiculari ad diametrum semiconversionis ejusdem: promovebitur lamella ita, ut adducatur id punctum ad distantiam a filo dimidiam intervalli notati, & ope cochleæ perpendicularis illi eidem diametro ita inclinabitur axis, ut id filum transeat per eam novam positionem puncti ejusdem: factâ semiconversione in partem contrariam, filum debebit congruere cum eodem puncto, si illud dimidium assumptum fuerit accuratum: secus, notabitur novus recessus fili a congruentia cum eo puncto, qui erit utique multo minor priore, & facto motu lamellæ per dimidium ejus novi intervalli, ac repetitâ operatione priore, devenietur post duo, vel tria tentamina ad eam positionem axis, & lamellæ, in qua filum in initio, & in fine ejusdem semiconversionis factæ in ea directione congruat accurate cum eodem puncto. Præstitâ eâdem re relate ad filum alterum, patet, axem fore accurate verticalem, & si ambæ laminæ firmentur in ea positione, quotiescumque deinceps axis per eas cochleas reductus fuerit ad congruentiam utriusque fili cum suo puncto, recuperabit suam verticalitatem, quam ob aliquam accidentalem causam amiserit.

11. Pro secunda methodo imponenda erit libella alidadæ, & hac adductâ ad positionem alterius e cochleis inclinantibus axem, basis libellæ erit reducenda ad horizontalitatem ope cochleæ ad id destinatæ: factâ semiconversione, si bulla aeris non redeat ad

locum

locum debitum, *inclinabitur* axis ope cochleæ *respondentis* ei poſitioni *ita*, ut bulla abeat ad dimidium diſtantiæ inventæ, & redactâ baſi libellæ ad horizontalitatem in ea nova poſitione axis, fiet ſemiconverſio, corrigendo iterum, ſi bulla non obtineat poſt ſemiconverſionem locum debitum: poſt pauca tentamina deveni*etur* ad poſitionem axis, in qua *bulla obtineat* locum debitum tam in initio, quam in fine ſemiconverſionis factæ in ea directione: re præſtitâ rela*te* ad ſemiconverſiones reſpondentes alteri cochleæ, *obtinebitur poſitio verticalis quæſita*.

12. Id *fieri poterit*, *licet alidada non ſit accurate perpendicularis* axi: ſi ea habeat aliquam *obliquitatem*, *poterit* baſis libel*læ reduci ad horizontalitatem*, *etiam interpoſitis* cuneis inter i*pſam*, & *ſuperficiem alidadæ ipſius*. *Illud* quod eſt omnino neceſſarium ad eos alidadæ uſus, eſt nexus ipſius cum axe ita firmus, ut, hoc ad verticalitatem redacto, omnia ipſius puncta deſcribant circulos accurate horizontales, quod utique fiet, *ſi juxta* numerum 5 fulciatur alidada ipſa per *regulam obliquam F*, & ei adnectatur ad angulos *rectos regula altera* ſatis lata, cujus longitudo *ſit ipſi horizontaliter applicata*, *latitudo* vero ſit verticalis *ita*, *ut eorum ſuperficies latitudinales ſint ſibi invicem perpendiculares*, *hæc ſecunda impediet* & *curvaturam*, & *tremorem incertum* illius primæ. Tum ope ipſius actæ in gyrum poterit reduci ad *horizontalitatem* accuratam illa faſcia ferrea lata analoga *horizonti ſphæræ armillaris*, quæ debet applicari ſuis quatuor fulcris in punctis H. Explorabitur ope cunei micrometrici deſcripti in Opuſculo II diſtantia punctorum ipſorum H a productione ſuperficiei alidadæ ipſius, quæ facile fiet adnectendo ejus ſuperficiei ſuperiori ope ceræ tabellam planam, quæ excurrat ultra ipſam: iis punctis ab ea æqualiter diſtantibus, erunt eadem accurate poſita in eodem plano horizontali, ac faſcia ipſa, quæ ſit ſatis ſolida, & accurate redacta ad idem aliquod planum, *impoſita* iis fulcris ita redactis acquiret horizontalitatem.

13. Porro ipſa fiet ſolida, ſi ſit ſatis *craſſa*, & multo magis, ſi per totam circumferentiam *fulciatur regulis* verticalibus ſatis latis ipſi verticaliter adnexis: reducetur autem ad ſuperficiem ac-

cura-

curate planam, si ante collocationem super iis fulcris imponatur mensæ ingenti bene complanatæ, cujus planities explorata sit per congruentiam regulæ rectæ satis latæ, ut ejus longitudine dispositâ in situ horizontali, & latitudine verticaliter erectâ, non possit incurvari in medio a suo pondere. Ipsa autem fascia poterit etiam fieri divisa in quatuor partes, quæ affigantur singulæ in binis suis extremis punctis binis fulcris hinc, & inde per cochleas: multo enim facilius tractabuntur, quam integra fascia circularis, & comparabuntur cum mensa bene complanata. Multo adhuc tutius explorabitur, an fascia tota sit in eodem plano horizontali, si adhibeatur canalis ligneus circularis cum cymbula ejus formæ, quæ habetur itidem in Opusculo II (Tab. I fig. 10, 11, 12).

14. Huic fasciæ potest superinduci limbus, qui a perito artifice dividatur eodem pacto, quo dividuntur limbi ingentium quadrantum, & adnecti eodem modo alidadæ nonius, adjectâ pro determinatione arcuum, ut ibidem, cochleâ micrometri externi, quæ promovendo alidadam ipsam motu lentissimo, exhibeat subdivisiones. Fieri potest verificatio earum divisionum per inæqualitates chordarum, eâdem methodo, quam exposui in Opusculo I pro quadrante. Valor absolutus primus ibi habebatur per comparationem chordæ graduum 60 cum radio, hic haberi potest per comparationem quatuor chordarum totidem arcuum, qui debent continere gradus 90. Differentia binarum ex iis chordis, quæ deberent esse æquales inter se, multiplicata per secantem dimidii arcus, nimirum per secantem graduum 45, quæ est = 1,414, exhibebit differentiam arcuum juxta id, quod ibidem est demonstratum, & summa excessuum arcus primi ex illis quatuor supra tres reliquos divisa per 4 exhibebit errorem ejusdem primi: dempto autem ejus excessu supra quemvis alium e tribus reliquis ab ejus errore, habebitur error ejus alterius. Correctio puncti borealis, a quo potest desumi initium azimuthorum computandorum in horizonte, facile obtinebitur sequenti pacto. Correcto plano quadrantis, ut in Opusculo II, & positione ipsius redactâ ad planum meridiani, ut in Opusculo III, notentur azimutha indica-

dicata ab alidadâ in binis, vel ternis poſitionibus quadrantis ipſius parum remotis a poſitione Meridiani æſtimata cum temporibus appulſuum fixæ cujuſpiam ad filum, quod in foco objectivi eſt perpendiculare filo horizontali. Cum innotuerit per altitudines correſpondentes, quo momento temporis ea fixa appulerit ad meridianum, innoteſcet utique, quod punctum circuli horizontalis alidada indicaverat eo momento. Ejus puncti diſtantia a puncto, quod eſt in ipſo horizontali circulo notatum pro initio azimuthorum per zero, erit error puncti ejuſdem male notati addendus omnibus azimuthis, qui deinde ab eadem alidada indicabuntur, vel ab iis demendus.

15. Verum hìc tradam methodum, qua Aſtronomus ope artificis communis poſſit ipſe per ſeſe obtinere diviſionem horizontis accuratiſſimam, & ſine uſu altitudinum correſpondentium obtinere poſitionem primi puncti borealis carentis omni prorſus errore. Adhibebuntur ad eam rem vigintiquatuor lamellæ ex aurichalco, quarum ſingulæ habebunt ſingula punctula notata: earum prima collocabitur accuratiſſime methodo exponendâ in puncto boreali, tum alia in puncto diametraliter oppoſito: binæ in punctis æque diſtantibus ab iis oppoſitis: quatuor in punctis intermediis, quæ jam diſtabunt ab iis per gradus 45: binæ aliæ in ſingulis ex iis intervallis poſitæ ad diſtantias accurate æquales perficient diviſionem circuli horizontalis in 24 arcus graduum quindenorum: eæ cum arcu circulari graduum 15 adnexo alidadæ in E, & quodam genere micrometri, cujus formam, & uſum hìc indicabo, exhibebunt omnia azimutha, & angulos azimuthales. Indicabo, inquam; ſi enim ſingula ſingillatim exponenda eſſent, integrum ſatis magnæ molis opus requirerent. Hinc ego proferam præcipua quædam lineamenta, quæ brevem ideam ingerant totius methodi, maximâ parte, ut ſupra etiam innui, relictâ ingenioſo Aſtronomo ſupplenda ab ipſo, qui artificem dirigat, & induſtrio artifici, qui exequatur.

16. Dimidia latitudo ejus faſciæ horizontalis occupabitur ab arcu adnexo alidadæ, dimidia exterior ab hoc genere limbi immobilis efformati ab iis lamellis, & a regulis ipſas continentibus: ordiar

ciar ab *harum forma*, dispositione, collocatione. *Sit in fig.* 2 AA arcus circuli exterioris ejus fasciæ, BB circuli interioris, EE intermedii inter partem latitudinis occupatam ab arcu affixo alidadæ & *mobili* cum ipsa, qui ei imminebit, & partem reliquam, cui adnectendæ erant laminæ continentes easdem lamellas affixas ipsi fasciæ. Figura exprimit unam ex ipsis lamellis interpositam in I inter *duas laminas* DD, FF, quæ dum comprimunt binas *ejus partes procurrentes* infra supremam earum superficiem versus margines *AA*, *EE*; *illas tegunt*. *Melius apparet* forma tam laminarum *comprimentium*, quam *lamellæ compressæ in figura* 3, quæ exprimit *sectionem verticalem factam* per punctum I directione perpendiculari ad arcus *AA*, EE figuræ 2 per totam crassitudinem tam ipsius lamellæ compressæ, & laminarum *comprimentium*, quam subjectæ fasciæ, in qua apparent etiam positiones cochlearum comprimentium. Toti crassitudini sectæ est æqualis altitudo AA', & EE' sectionis expressæ in figura 3, & AE, A'E' sunt *ibidem æquales intervallo* AE figuræ 2, quæ est dimidia latitudo *fasciæ* destinata hisce *lamellis*, & laminis. MNOPP'O'N'M' est forma lamellæ *compressæ habentis punctum I in media longitudine* MM' *suæ superficiei supremæ directæ versus centrum commune circulorum*, *quod est in axe figuræ* 1. *AQPONM est forma* laminæ comprimentis exterioris, EQ'P'O'N'M' forma interioris, AQQ'E' *est sectio fasciæ subjectæ*. Hujus superficiem lamella compressa contingit in PP': eandem laminæ comprimentes contingunt in QP, Q'P': hæ apprimuntur fasciæ per cochleas DD', FF', & comprimunt lamellam in ON, O'N'. Dum cochleæ adstringuntur per conversionem suam, lamella I remanet immobilis in figura 2; sed iis laxatis non nihil, ea potest vi illatâ per digitos moveri in latus, ut adducatur ad positionem sibi debitam, qua acquisita redditur immobilis per actionem cochlearum.

17. Ad eam positionem ipsas lamellas adducet Astronomus, sed ipse debebit antea dirigere artificem, ut omnia debito loco disponat, & præparet. Notanda sunt crassâ æstimatione puncta ejus horizontis, per quæ transit linea meridiana, & crassâ itidem æstimatione notanda puncta intermedia, quæ ab iis distent per gra-

 dus

dus *90*, *tum ea*, *quæ singulos* quadrantes *secant in partes* sex *circiter æquales :* præparandæ laminæ DD, FF figuræ 2 habentes *longitudinem* plurium graduum, multo majorem errore, qui in ea crassa æstimatione intervallorum committi possit: excavanda in iis foramina pro cochleis, & itidem excavanda duo alia, quæ debent respondere ipsis in fascia subjecta *hinc*, & inde a puncto quovis ejusdem crassæ divisionis ad *distantias circiter æquales*, ut *nimirum* possit deinde lamella ipsa adduci ad positionem *debitam* puncto I *inveniendam ab ipso Astronomo : tum enim ea positio ita cadet inter cochleas D, D, & F, F, ut iis laxatis possit* ad eam ab ipso Astronomo *adduci lamella*. *His ita dispositis*, & collocatis lamellis, ac laminis, *reducenda sunt* omnia ad idem *planum horizontale*, *saltem facies lamellarum*, quæ debent continere *puncta I*, ope *fili ferrei* cymbulæ innatantis in canali, & cunei micrometrici, abradendo per limam quidquid extet supra ejusmodi planum, qua re peractâ debebunt tum demum *insculpi* punctula I cuspide tenui, ac bene rotanda, *quæ possunt adhuc accuratius* rotundari circumductâ *cuspide* eadem circa se ipsam.

18. Pro earum 24 *lamellarum collocatione* debita incipiendum ab *illa*, *quæ debet exhibere punctum boreale*. *Ad eam* rem obtinendam *poterit adnecti superiori superficiei alidadæ lamella* metallica, vel etiam *tabella tantummodo lignea*, & nexu facto tantummodo ope ceræ, procurrens ultra *ipsam*, & habens in eo procursu *aperturam*, per quam transpici possit lamella figuræ 3 cum ipsius puncto I: hujus tabellæ superficies inferior continget superficiem laminarum DD, FF figuræ 2 : contingeret etiam superficiem lamellæ I, nisi ipsi responderet apertura. Huic aperturæ applicabitur in ima sui parte filum tenue in directione tendente ad centrum axis ita, ut id filum fere contingat superficiem ipsam I, vel potius adnectetur vitrum planum politum, cujus superficies inferior sit in contactu cum superficie eadem I, & *habeat insculptam* tenuem lineam directionis *ejusdem*. Tum *alidada* motu circulari adduci poterit ad concursum *ejus lineæ* cum puncto I ita, ut teste microscopio, quo *ipsum apparebit ut* circellus, transeat per medium ipsum circellum. Usus tabellæ pro collocatione singula-

gularum *lamellarum* erit brevis ; quod permittit, ut ipsa tabella sit etiam lignea, & non applicetur alidadæ nisi per ceram, nec ipsi applicetur ea lamella vitrea, nisi itidem ope ceræ.

19. Rite præparatis iis omnibus, diriget Astronomus suum quadrantem versus aliquam fixam circumpolarem notabilem non ita parum distantem a polo, jam proximam maximæ elongationi a plano meridiani vel orientalem, vel occidentalem, & illam comitabitur usque ad ipsam elongationem maximam : in ea positione quadrantis assumet unam e lamellis jam præparatis detractam ex uno e 24 locis, in quibus aptatæ fuerant ad complanandas superficies omnes, & reducendas ad planum horizontale, & adducet ad locum alidadæ, ac sub ipsam propellet ita, ut filum tabellæ adnexæ alidadæ ipsi, vel linea illa superficiei vitri transeat accurate per ejus punctum, ac in eo situ adnectet lamellam ipsam superficiei fasciæ horizontalis ope ceræ. Idem præstabit ex parte opposita in appulsu ejusdem fixæ ad alteram elongationem maximam. Iis præstitis collocanda supererit inter eas lamellas tertia cum suo puncto ita, ut hoc habeat distantiam accurate æqualem a punctis præcedentium binarum : patet enim, tam id punctum fore accurate in puncto boreali fasciæ horizontalis. Porro hæc tertia jam invenietur collocata in loco, quod jam innotuerat esse proximum debito, in quo jam fuerat collocata cum laminis ipsam comprimentibus, quarum cochleis laxatis non nihil, ea poterit propelli in latus, quantum oportebit ad obtinendam æqualitatem earum distantiarum.

20. Ad inducendam eam æqualitatem oportebit adnectere axi alteram alidadam, quæ cum non debeat habere usum, nisi pro sola prima collocatione singularum e 24 lamellis in locis debitis, poterit esse etiam lignea : ejus formam indicat figura 4 in ABCFHIKL. Ipsius superficies AB, LK, CF, IH sunt horizontales, BC, HF verticales, ut licet discedat a punctis axis AL positis infra locum D prioris alidadæ, elevetur ad eandem altitudinem cum ipsa, & sua superficie IH innitatur parti interiori latitudinis fasciæ (fig. 2) EBBE, ac sustineat hic in O tabellam perforatam habentem suum filum, vel laminam vitream habentem suam lineam insculptam, quæ juxta num. 18 contingat facie sua inferiore super-

 ficiem

ficiem superiorem lamellæ, ad cujus punctum I debeat applicari id filum, vel ea linea. Ea alidada debet ita adnecti in AL axi, ut eo gyrante comitetur ejus motum, & contineat constanter cum priore alidada angulum eundem nexu satis firmo, ne descendat secus longitudinem axis ipsius versus M, nec per simplicem motum ejus circularem mutet positionem respectu ipsius, adhuc tamen possit vi illata ab Astronomo mutare angulum, quem continet cum priore alidada, qui debebit illam aliquando dirigere etiam ad partes diametraliter oppositas directioni alidadæ prioris, tum ad angulos plures cum ipsa, quorum minimus erit graduum 15: ad nimis exiguos adduci non poterit, quia pars postrema CF habens eandem elevationem cum alidada priore in ipsam incurreret: sed cum angulis minoribus angulo graduum 15 non sit futurum opus, illa elevatio non oberit positionibus, quibus indigebimus. Nullam determinatam methodum hic exprimo in figura: plures haud difficulter concipi poterunt, quæ rem perficiant ope armillarum constantium, pluribus frustis conjungendis ope cochlearum in unicam circularem integram circumducendam axi jam etiam collocato, & habenti suum quadrantem, & suam priorem alidadam: verum in usu hujus secundæ alidadæ pro determinandis positionibus lamellarum indigebit Astronomus adjutore, qui axem teneat immotum cum priore alidada, dum imprimitur motus circularis secundæ ad obtinendam hujus inclinationem respectu illius, qua opus erit ad operationes, quæ proponentur.

21. Habebuntur pro hac prima operatione binæ lamellæ collocatæ in locis binarum maximarum elongationum, quæ debebunt remanere immotæ, dum quæritur collocatio accurata tertiæ collocandæ in medio, quæ, ut diximus, ita jam erit collocata, ut non multum distet a loco accurate intermedio, possit autem vi illatâ moveri in latus ob laxatas cochleas, quibus comprimebatur. Adducetur altera alidada, ut prima, ad congruentiam accuratam cum puncto alterius e binis lamellis fixis, ut lamellæ occidentalis: tum hac immotâ cum axe adducatur alidada secunda ad congruentiam cum puncto lamellæ intermediæ: convertatur axis donec secunda alidada adveniat ad accuratam congruentiam cum puncto lamellæ

orien-

orientalis, & *si binæ* distantiæ lamellæ intermediæ *ab extremis* non fuerint accurate æquales, ut nunquam erunt primo casu fortuito, *linea alidadæ* primæ non erit accurate congruens cum puncto *lamellæ* intermediæ. Notetur distantia, & moveatur lamella intermedia in latus per dimidium intervalli notati, ut ejus punctum adducatur ad distantiam eandem a binis extremis, quæ erit jam accurata positio, si illud dimidium fuerit accuratum: sed ut certo constet, an acceptum sit accuratum dimidium intervalli notati, & si tale non fuerit, fiat nova correctio, adducatur per motum axis *iterum prima alidada ad punctum occidentale*, & axe immoto *secunda* ad *punctum lamellæ* intermediæ: tum per motum axis eadem *secunda ad* punctum orientale, & *jam linea primæ alidadæ* vel congruet accurate cum puncto *lamellæ* intermediæ, vel distabit ab ipsa multo minus quam primâ vice. In hoc secundo casu moveatur iterum secunda lamella per dimidium novi *hujusce* minoris intervalli, & repetitâ priore operatione devenietur *post pauca tentamina* ad æqualitatem accuratissimam binarum *distantiarum* lamellæ *intermediæ ab extremis*.

22. Si prima *alidada jam habuerit suum micrometrum externum* cum *cochlea*, *quæ ipsi imprimat motus lentissimos*, & *exhibeat ope indicis quantitatem motus ipsius; multo facilior erit accurata* determinatio intervalli inventi in prima operatione, cujus dimidio *accurate assumpto pro* motu laterali lamellæ *intermediæ*, remanebit *accurate* correcta ejus positio post ipsam primam *operationem*, nec jam supererunt alia tentamina iteranda. Habitâ autem hac vel per primam operationem, vel per plures, poterit reddi fortiter fixa ipsa lamella intermedia ope cochlearum adstringentium ipsi laminas DD, FF figuræ 2, nisi forte Astronomus velit confirmationem majorem suæ determinationis, adhibitis binis *maximis* elongationibus plurium fixarum habentium diversas distantias a polo, quarum *omnium* determinationes si consentiant; id erit argumento etiam *plani quadrantis* accurate talis, & accurate verticalis, ac axis telescopii *accurate* paralleli axi conversionis, quæ conditiones si desint, vel *etiam* una ex iis, *determinationes* habitæ per diversas fixas erunt inter se discrepantes. Fixatâ hoc pacto po-

49876

poſitione ejus lamellæ, debebunt removeri *illæ binæ*, *quæ* fuerant *adnexæ per* ceram.

23. Habitâ accuratâ poſitione primæ lamellæ *borealis*, jam erit facilis determinatio oppoſitæ auſtralis. Adductâ primâ *alidadâ* per converſionem axis ad eam primam lamellam, & *poſitâ* ſecundâ in loco auſtrali proxime cognito, adducetur ad *ipſum* alidada ſecunda: fiet dimidia converſio adducendo alidadam *ſecundam* ad lamellam primam, & ſi prima alidada non congruat accurate cum lamella ſecunda *auſtrali*, *moveatur hæc in latús per* dimidium *intervalli notati: adducatur iterum alidada prima* ad primam lamellam per motum axis: *hoc immoto* adducatur alidada mobilis ad novam poſitionem lamellæ ſecundæ: *tum* alidada ſecunda per motum axis ad lamellam primam, & ſi alidada prima nondum congruet cum ſecunda lamella, repetitâ operatione devenietur ad æqualitatem binorum ſemicirculorum eodem pacto, quo deventum eſt ad æqualitatem binarum diſtantiarum lamellæ primæ *ab illis binis*, quæ fuerant determinatæ a binis elongat*ionibus maximis ejuſdem* fixæ in orientem, & in *occidentem*.

24. Eodem *pacto collocabuntur*, *ſingulæ ad* diſtantias æquales a *binis jam collocatis*, *binæ aliæ lamellæ*, *altera orientalis*, & altera *occidentalis: tum inter binas quaſque e quatuor jam* collocatis ſingulæ diſtantes ab iis per gradus 45: collocandæ ſupererunt inter binas quaſque jam collocatas binæ aliæ ita, ut tres diſtantiæ evadant æquales: id jam requiret longiorem attentationem, ſi nullum adhuc habeatur præſidium, quo accurate obtineri poſſit exacta menſura motus circularis exigui, qui imprimatur alidadæ primæ, quæ debet remanere conſtanter, & firmiſſime connexa cum axe, & adhiberi in omnibus aſtronomicis obſervationibus ad determinandos angulos azimuthales. Adhibetur in omnibus inſtrumentis deſtinatis ad menſuram angulorum cochlea ita collocata, ut lento motu promoveat alidadam, ut in quadrantibus, & ſextantibus: ei cochleæ poteſt adjungi index, qui in circulo perpendiculari ad ipſum axem exhibeat partes *cujuſque* revolutionis, numeratis integris revolutionibus, *dum* ea adhibetur ad præſtandum ejuſmodi motum exiguum, niſi addatur alter index promotus a

ſin-

singulis *revolutionibus* per intervalla æqualia *indicata a lineolis insculptis* secus motum indicis ipsius, qui duo indices constituunt micrometrum, quod superius numero 22 appellavi externum, ad discrimen ab eo, qui metitur motum fili interni excurrentis in foco objectivi per imaginem objecti ibi depictam.

25. Ope hujusmodi micrometri externi res facile perficitur etiam sine ulla attentatione: collocentur binæ lamellæ inserendæ inter illas duas jam positas in locis proxime cognitis, quæ ipsis debentur, & jam notata esse diximus per crassam æstimationem cum foraminibus præparatis pro cochleis, quæ laminas comprimentes debent adstringere, & operatione absolutâ firmiter adjungere lamellas ipsas fasciæ horizontali. Quatuor lamellæ terminabunt hasce tres distantias, quæ debent esse æquales, quarum binæ extremæ jam sunt collocatæ, & firmiter adnexæ, binæ intermediæ erunt adducendæ ad loca sibi debita distantiarum accurate æqualium: appellatâ utrâvis ex extremis primâ, adducatur alidada prima ad hanc primam per motum ipsius connexum cum axe; tum eâ immotâ adducatur alidada secunda motu impresso ipsi soli ad secundam lamellam ita, ut ejus filum, seu linea vitrea congruat accurate cum ipsius lamellæ puncto, quod semper intelligi debet, ubi præscribitur, ut alidada adducatur ad lamellam: alidada prima motu suo connexo cum motu axis adducatur ad secundam lamellam; & si secunda alidada non congruat accurate cum lamella tertia, imprimatur ope micrometri externi motus primæ connexus cum motu axis usque ad congruentiam accuratam secundæ alidadæ cum eadem tertia lamella, & notetur numerus particularum ejus motus, qui indicabit differentiam arcuum interceptorum inter lamellam primam, & secundam, ac secundam, & tertiam: eodem pacto invenietur differentia arcuum, qui intercipiuntur inter primam lamellam, & secundam, ac inter tertiam, & quartam: habitis iis differentiis invenitur error absolutus primi ex iis tribus arcubus methodo proposita, & demonstrata in Opusculo primo pro quovis numero partium, quæ deberent esse æquales, & non sunt, quam methodum applicavimus hic numero 14 ad divisionem circumferentiæ integræ in quatuor quadrantes. Fiat

sum-

summa binorum excessuum primi ex iis tribus arcubus supra secundum, & ejusdem supra tertium, habitâ differentiâ pro negativâ, si ipse primus arcus evaserit minor obveniente defectu pro excessu: triens ejus summæ erit error absolutus quæsitus primi arcus: is corrigetur reductâ primâ alidadâ ad primam lamellam, tum secunda ad secundam, promotâ primâ per numerum particularum micrometri externi respondentem errori invento, quo motu jam secunda alidada non congruet cum secunda lamella: hæc lamella promovebitur usque ad congruentiam cum secunda alidada, & habebitur accurata positio secundæ lamellæ. Ad habendam positionem tertiæ reducatur prima alidada ad congruentiam cum prima: tum secunda alidada per motum suum immotâ primâ ad congruentiam cum secunda lamella: deinde prima alidada ad secundam lamellam, & immotis alidadis tertia lamella ad congruentiam cum alidada secunda, quæ debebit esse ejus positio accurata. An reapse sit, videbitur adductâ per motum axis primâ alidadâ ad tertiam lamellam: secunda debebit accurate congruere cum lamella quarta. Si non congruat, triens intervalli inter lineam alidadæ secundæ, & punctum lamellæ quartæ erit residuus error singulorum e præcedentibus binis arcubus, qui deberent esse æquales inter se, & cum tertio: is corrigetur per motum secundæ lamellæ respondentem ei errori, qui corrigetur facile eâdem methodo, adhibendo motum primæ alidadæ cum axe, & secundæ immoto axe: & verificabuntur correctiones, videndo, an cum eadem positione respectiva binarum alidadarum congruant singuli e tribus arcubus interceptis inter lamellas proximas. Peractâ omni hac operatione, summovenda est alidada secunda, quæ fuerat apposita tantummodo in ejus gratiam.

26. Jam vero arcus affixus alidadæ primæ permanenti indicatur in fig. 2 per quadrilineum GHHG adnexum ipsi in L, cujus extremum est ML: id imminet parti interiori EBBE fasciæ horizontalis: habet arcum *ab* divisum in gradus 15 per puncta: quoniam vero unus gradus circuli habens radium pedum sex est longior uno pollice, & multo magis gradus circuli habentis radium pedum octo, possunt facile haberi subdivisiones in quina etiam mi-

nu-

nuta: multo autem facilius est habere arcum 15 graduum accurate divisum, & ipsius divisiones multo minore labore verificantur. Fieri autem potest micrometrum, cujus ope promoveatur filum habens directionem tendentem ad centrum eorum circulorum, quod micrometrum applicetur per cochleam prementem laminæ metallicæ habenti flexum circularem conformem parti OHHO superficiei arcus adnexi, cui ea debet ita adnecti, ut ipsius plano perpendiculariter insistat ejus latitudo. Id micrometrum habebit laminam horizontalem perforatam cum filo ipsi affixo in directione tendente ad centrum eorum circulorum, vel laminam vitream cum linea recta insculpta, quæ eam directionem habeat. Ipsa micrometri machinula applicari poterit cuivis parti totius longitudinis OHHO promota secundum ipsam, & firmiter adnexa ubicumque libuerit: lamina autem ita intra machinulam ipsam erit aptata, uti fit in micrometris, quæ solent applicari telescopiis pro promovendo filo perpendiculari in eorum foco, ut filum illud, sive illa vitri linea per motum communicatum ipsi vitro progrediatur motu lentissimo inducto a cochlea, cujus motus perquam exigui exhibeantur a duplici indice, altero denotante numerum revolutionum de more, altero partes revolutionis cujusvis.

27. Cum alidada habeat arcum graduum 15, & in singulos quindenos gradus habeantur lamellæ I, patet, post quamvis observationem peractam debere aliquod ex iis punctis respondere ei arcui. Adducto illuc micrometro, & ita aptato, ut filum sit proximum ei puncto, poterit ope cochleæ micrometricæ adduci id filum ad accuratam congruentiam cum puncto eodem, adhibito etiam microscopio, si libeat, cujus applicatio ad eum usum est admodum facilis: si idem filum transeat per aliquod e punctis divisionis *ab*, numerus graduum, & minutorum contentorum ab initio divisionum *a* usque ad filum ipsum addendus erit numero respondenti illi puncto I ad habendum azimuthum: si nullum punctum ejus divisionis accurate respondeat ei filo, vel lineæ, promovebitur ope cochleæ filum ipsum usque ad congruentiam, & partes micrometri exhibebunt valorem intervalli addendi ad habendam accuratam determinationem azimuthi.

28. *Idea aliqua* methodi, qua adnecti possit *micrometrum alidadæ per laminam* verticaliter inhærentem superficiei OHHO figuræ 2, habebitur in fig. 5, quæ exprimit sectionem verticalem totius machinamenti factam per medium micrometri ipsius, perpendicularem directioni arcuum circularium: *hinc* superficies chartæ *exprimit in* figura 2 planum horizont*ale*, *in figura* 5 verticale ipsi *insistens*, cujus longitudines sunt perpendiculares longitudinibus illius, & æquales *ejus latitudinibus*, *latitudines* autem hujus æquales *crassitudinibus illius*. *AA'B'B est sectio totius* fasciæ figuræ 2, cujus *sectionis latitudo* AA' *in fig.* 5 *est eadem*, ac in fig. 2 crassitudo fasciæ ipsius, *longitudo autem* AB *hic* eadem ac ibi *latitudo* AB *ejusdem* fasciæ: BDCO *est sectio laminæ verticalis insistentis superficiei* OHHO figuræ 2, cujus latitudo OB est hic eadem, ac ibi crassitudo illius OH: OO'P'P est hic sectio machinulæ micrometri, quæ est quædam capsula, in cujus latere verticali parallelo ei sectioni expressæ a figura habetur *circulus hic* non expressus, per cujus centrum transit *cochlea perpendicularis* sectioni eidem, adeoque *horizontalis*, *denotans* per suum indicem in eo *circulo partes cujusvis suæ revolutionis*. *Si ipsi* capsulæ in *medio lateris perpendicularis huic sectioni adnectatur norma* O'KLNQC *satis crassa ad habendam in medio suæ ipsius* crassitudinis cochleam FG: eâ premente latus BD laminæ ipsius, applicabitur *facies* OO' *ejusdem* capsulæ perpendicularis *sectioni* ad latus *alterum* OC laminæ *ejusdem* ita, ut ipsi firmissime adhæreat. Laxatâ autem cochleâ FG, poterit capsula jam libera ab ea pressione cum norma sibi adhærente promoveri secundum totam longitudinem ejus laminæ, nimirum secundum totam longitudinem arcus OO figuræ 2, ut filum, quod intra ipsam promovètur in ejus fundo, respondeat tam cuivis e divisionibus arcus *ab* figuræ ejusdem, quod in observatione inveniatur e regione puncti I, quam huic ipsi puncto.

29. Laminam perforatam, quæ habet id *filum*, exhibet figura 6 in ABB'A': ejus apertura est *abb'a'*, quæ debet esse ita longa in directione *ab* parallela rectæ AB figuræ 5, & perpendiculari ad arcus circulares figuræ 2, ut filum EF hujus ipsius figuræ 6 per-

pertingat hinc ad puncta arcus *ab* figuræ 2, & inde ad ejus punctum I. Multo complicatiorem figuram, & longiorem explicationem requireret mechanismus, quo hæc lamina promoveri possit intra capsulam ita, ut sit semper in ejus fundo, & filum ei adnexum perradat superficiem figuræ 2, vel si lamina vitrea adhibeatur, hujus superficies, quæ lineam habet insculptam, contingat semper superficiem ejusdem figuræ ad evitandam oculi parallaxim, licet cochlea sit multo superior in medio latere verticali capsulæ ipsius, quod est omnino necessarium, ut ea sit in medio circuli micrometrici, circa cujus centrum debet revolvi index, ut designet partes revolutionum. Id præstari potest pluribus modis: omnium tutissimus, quamvis minus simplex, esset is, qui haberetur includendo intra capsulam exteriorem alteram interiorem æque latam, & altam, sed minus longam, quæ secunda promoveretur intra illam priorem immotam a cochlea: prima exterior careret fundo: secunda interior haberet fundo suo adnexam laminam ABB'A' figuræ *6*, quæ promoveretur cum ipsa motu determinato a lateribus primæ capsulæ sine ulla deviatione, aut titubatione. Modos plures rem ipsam obtinendi excogitabit ingeniosus Astronomus, & artifex industrius, multo adhuc simpliciores.

30. Hic addam illud tantummodo, posse aptari plura fila EE', quotcumque libuerit, efficiendo capsulam longiorem secundum directionem *aa'*, & omnium aptissimæ essent plures lineæ insculptæ in superficie laminæ vitreæ ad distantias inter se æquales, quæ fieri possunt ita proximæ inter se, ut nonnisi per microscopium satis distinctæ appareant earum distantiæ a se invicem, & exhibeant subdivisiones intervalli inter rectam transeuntem per punctum I figuræ 2, & puncta arcus *ab* ita minutas, ut vix quidquam relinquant determinandum a cochlea, quo pacto deveniri posset ad exiguas etiam fractiones unius secundi. Plurium ejusmodi linearum usus esset egregius tam pro verificandis divisionibus arcus *ab*, quam pro verificanda etiam æqualitate tam integrarum revolutionum cochleæ micrometricæ, quam partium quarumcumque unius revolutionis.

 31. Uni-

31. *Unica etiam linea sufficit ad videndum, an arcus ab contineat accuratissime gradus 15.* Adductâ alidadâ ad positionem, in qua punctum *a* respondeat proxime uni e punctis I, & promoto micrometro usque ad finem arcus HH, promoveretur ea linea laminæ vitreæ, vel id filum laminæ perforatæ usque ad congruentiam accuratam cum puncto *a* visam per microscopium: tum alidadâ per suum micrometrum externum promoveretur usque ad congruentiam ejusdem lineæ cum puncto I. Immotâ alidadâ adduceretur micrometrum ad alterum extremum ejusdem arcus HH usque ad congruentiam ejusdem fili cum puncto *b*. Si arcus *ab* est accurate æqualis gradibus 15, debet tum eadem linea transire per illud alterum punctum I, cum jam certo innotescat inter radios transeuntes per bina puncta I proxime succedentia contineri accuratissime arcum graduum 15. Si non habeatur ea congruentia accurata; poterit per motum lineæ factum a micrometro usque ad congruentiam haberi quantitas erroris, cujus facile haberi potest deinde effectus corrigendus in omnibus observationibus. Valor autem partium micrometri reducendarum ad partes unius secundi facile obtinetur determinando numerum illarum, quæ respondent motui inducto ab ipso micrometro, dum linea ab una e divisionibus arcus *ab* abit ad aliam distantem 10, vel 5 minutis: nam error, si quis habeatur in divisione ejus arcus, exiguus inducet errorem prorsus insensibilem in numerum particularum micrometri ipsius, qui erit semper exiguus. Eâ verificatione factâ progrediendum erit ad verificationem subdivisionum ipsarum arcus *ab* faciendam methodo sequenti, qui est alter usus egregius multiplicitatis earum linearum insculptarum in superficie laminæ vitreæ, & est analogus methodo adhibitæ pro verificatione divisionum in Opusculo I.

32. Pro hoc usu si capsula micrometrica sit satis longa, ut intervallum primæ lineæ superficiei vitreæ a postrema pertingat ad gradus 5, & ultra ipsos, poterit adduci micrometrum ipsum eo, ubi primâ ejus lineâ congruente cum puncto *a*, habeatur aliqua e postremis tam proximis inter se parum admodum distans a puncto gradus quinti: notabitur numerus partium micrometri, qui addu-

adducet eam alteram lineam ad congruentiam cum eo puncto, unde innotescet differentia intervalli inter distantiam earum linearum, & arcum interceptum inter ea extrema puncta, quæ deberent exhibere arcum primum graduum 5. Translato micrometro ad congruentiam lineæ primæ cum puncto gradus 5, invenietur eodem pacto differentia intervalli ejusdem primæ lineæ ab illa e postremis, quæ adhibita fuerat pro arcu primo, ab arcu secundo graduum 5, adductâ eâdem lineâ posteriore ad punctum graduum 10, unde innotescet differentia, si qua habeatur, arcus primi graduum 5 a secundo: eodem pacto invenietur differentia ejusdem primi arcus a tertio: inde methodo adhibita in eo Opusculo invenietur error proprius, si quis habeatur in iis arcubus, qui conjunctus cum errore singulorum derivato ab errore totali arcus graduum 15 exhibebit errorem totalem singulorum e tribus arcubus graduum 5. Eodem pacto per comparationem partium provenientium a subdivisionibus, quæ deberent esse æquales inter se, faciendam eadem methodo, invenientur errores tam derivati quam proprii, & totales arcuum quorumcumque minorum, e quibus eruetur, ut ibi, error cujuscumque arcus computati ab initio zero usque ad divisionem quamcumque. Id, quod ibi est præstitum deducendo differentiam arcuum, qui deberent esse æquales, e differentia chordarum, hic fieret inveniendo immediate differentiam arcuum ipsorum inter se.

33. Ope plurium ex illis lineis insculptis in superficie laminæ vitreæ potest etiam inquiri in ipsum cochleæ statum in ordine ad æqualitatem progressus fili respondentis ipsius conversioni, tum fieri potest verificatio intervallorum, quæ habentur inter lineas ipsas, quæ deberent esse æqualia, vel saltem deberet haberi accuratissima notitia inæqualitatum, si quæ adessent: verum habentur machinæ, quæ per se ipsas æqualitatem inducant linearum, ut libet proximarum, & tenuium, & ductarum ad quælibet intervalla perquam exigua tam in superficie metallica, quam in vitrea, artifice machinam ipsam dirigente motibus periodicis expeditissimis. In arcu *ab*, vel prope ipsum in æquali ab eo distantia notentur duo puncta tenuia ad intervallum proxime æquale ei, quod

res-

respondet uni conversioni cochleæ : possunt ea *notari etiam* atramento *vel* in ipsa superficie metallica, vel in tenui charta, subjecta ipsi laminæ vitreæ, & immota, dum ope cochleæ micrometricæ movetur lamina ipsa; retrahatur ope cochleæ micrometricæ uterque index ad initium primæ revolutionis : in eo statu adducatur micrometrum ad eam partem laminæ verticalis OHHO figuræ 2, in qua una e lineis laminæ vitreæ congruat cum primo ex iis duobus punctis notatis : *promoveatur* ope cochleæ micrometricæ *id filum usque ad congruentiam* cum secundo puncto, & notetur numerus *particularum micrometri*, quo *motus* indicis differt ab una integra *revolutione : adducantur indices* ad initium secundæ *conversionis immoto micrometro*, *tum* micrometrum ad *congruentiam ejusdem lineæ* cum primo puncto : immoto micrometro promoveatur per ejus cochleam idem filum usque ad punctum secundum, & notetur itidem numerus partium impensarum in percurrendo eodem intervallo, & idem fiet *respectu sequentium* conversionum cochleæ, adducendo semper *indices micrometri* ad initium *conversionis cujusque*, *tum* micrometrum ad congruentiam *lineæ cum primo puncto*, *deinde immoto* micrometro *lineam ope ejus cochleæ* usque ad *punctum secundum*. *Si* conversiones integræ, & *partes conversionis cujusvis fuerint* æquales inter se, ut deberent esse; numerus partium impensarum pro percurrendo *illo eodem intervallo* invenietur semper idem : si inveniatur discrimen in eo numero, innotescet quantum una revolutio differat ab alia, quod debet provenire ab inæqualitate spirarum.

34. Si instituantur multæ ejusmodi comparationes, adhibitis pluribus diversis distantiis punctorum, quæ respondeant tam uni integræ conversioni, quam dimidiæ, vel numeris diversis conversionum integrarum, vel numeris integris cum fractionibus, poterit utique cognosci admodum accurate, & certò *status cochleæ*, ut & repetitis iisdem perspicietur, an ea exhibeat consanter per easdem conversiones, & earum partes eandem mensuram, quod si non accidat, ea cochlea non poterit inservire : illud enim est omnino necessarium in omnibus instrumentis, ut semper *exhibeant*

beant id, quod semel exhibuerunt, quod si non accidat, *mutari* omnino debet instrumentum. Si inveniatur ejus testimonium semper constans; inæqualitates nihil oberunt, dummodo per verificationem accuratam inveniantur errores *indicationis*, quorum fiat tabula, quæ pro correctione adhiberi possit: sic ibi cognito statu cochleæ per ejusmodi observationes iteratas, & computatâ *semel* tabulâ errorum, ex qua corrigatur earum effectus in singulis observationibus, determinationes *habitæ* per instrumentum erroneum erunt æque accuratæ, *ac si nullus habeatur error in ipso instrumento*. Verum *si cochlea sit diligenter elaborata*, nec habeatur *inæqualitas* inter *cylindrum cavum*, & convexum, sive, ut vocant, cochleam *fæminam*, *quæ* recipit, & *marem quæ recipitur*, numerus autem spirarum simul convenientium *non sit nimis* exiguus; progressus inductus a motu cochleæ erit omnino æquabilis: in pluribus cochleis ejusmodi æquabilitatem inveni. Præstat tamen *habere* methodum, qua Astronomus ipse possit per sese in *eam rem inquirere*, & suæ cochleæ statum cognoscere: methodus proposita est per quam *idonea ad eam rem*.

35. Parum *absimilis est methodus inquirendi in distantias linearum*, *quæ designentur in superficie laminæ vitreæ*, *vel filorum*, *quæ tendantur in lamina perforata*, quamquam hæc quidem tendi non possunt ad distantias usque adeo exiguas. Fila in eo præstant *illis lineis*, *quod si deprehendatur inæqualitas*, *ea possit corrigi per motum* filorum ipsorum, dum eæ lineæ semel ductæ *mutare locum* non possunt: sed eæ in eo ipso præstant filis, quod cum semper maneant in eadem positione respectiva, errores, si qui adsunt, semel deprehensos in verificatione conservant semper eosdem. En autem methodum instituendi verificationem, ad quam sufficit unicum etiam e punctis arcus *ab*.

36. Adducatur per motum vel alidadæ, vel cochleæ micrometricæ *postrema linea ad id punctum* : *tum alidadâ* & *micrometro* immotis *promoveatur lamina habens eas lineas* usque ad congruentiam lineæ *penultimæ cum puncto eodem*, *notando numerum partium* micrometri, quæ *respondebunt ei motui* : immotâ alidadâ, retrahuntur indices micrometri ad eundem statum, quem habebant ini-

initio prioris motus, & micrometrum retrahatur ita, ut *jam* congruat cum eo puncto linea penultima: per motum indicis micrometrici promoveatur lamina, donec ad ipsum punctum appellat linea antepenultima, & notetur itidem numerus partium: idem fiat respectu reliquorum præcedentium intervallorum comparando singula cum eodem motu ejusdem partis *cochleæ*. Inæqualitas numerorum exhibebit inæqualitatem intervallorum. Poterunt autem, si cochlea fuerit longior, comparari inter se plura etiam intervalla simul *sumpta*, *cum aliis pluribus* per eundem numerum earundem revolutionum, ut *errores minus accumulentur*: adhuc autem melius eadem res perficietur per *motum cochleæ* perquam exiguum, si *adhibeantur bina puncta* habentia *distantiam* parum admodum *diversam a numero intervallorum* comparando: adducetur enim micrometrum ad congruentiam lineæ posterioris cum puncto posteriore: ea ope cochleæ micrometricæ promovebitur, donec *linea* anterior congruat cum puncto anteriore, quod *exhibebit differentiam* ejus intervalli linearum a distantia *eorum punctorum*: eodem modo comparato *quovis alio intervallo* respondente eidem linearum *intermediarum numero cum distantia* punctorum eorumdem, *habebitur etiam differentia secundi hujus intervalli* ab illo priore, adeoque per *ejusmodi operationes repetitas habebitur* integra verificatio micrometri tam in ordine ad motum æquabilem inductum a *cochlea*, quam in ordine ad æqualitatem intervallorum inter fila, vel lineas superficiei vitri, quæ debent exhibere subdivisiones ita, ut non relinquantur determinanda ope cochleæ nisi residua admodum exigua.

37. Lamellæ mobiles cum punctulis possent etiam adhiberi pro divisione arcus adnexi alidadæ saltem pro divisionibus præcipuis, & vero etiam pro singulis gradibus, atque hinc, & inde ab iis punctis possent iisdem lamellis adjungi subdivisiones, in quibus minus errari potest post redactos gradus ipsos ad positiouem accuratam per motum lamellarum ipsarum, & posset, ut innui in uno e præcedentibus Opusculis, præstari *quid simile* in ipso limbo quadrantis *muralis translati ad crucem* figuræ 1: sed saltem ipsius planum, & divisiones, ac positio respectu zenith, & *ho-*

rizon-

rizontis verificari *deberent* per methodos traditas in *Opusculis iisdem*. Promisi numero 3, me indicaturum rationem suspendendi ipsum quadrantem in illa cruce supplente vices muri. Ipsam hìc indicabo analogam ei, quam ego adhibui in specula Mediolanensi pro quadrante murali.

38. Puncto O figuræ 1 affigi potest massa ferrea (fig. 7) formæ CABDFIE: machinamento autem quadrantis per molem ferream oblongam horizontalem ipsi adnexam ex parte opposita plano limbi, quæ hìc non *exprimitur vitandæ confusionis gratiâ*, altera massa formæ *MGHIKLN*, *cujus angulus HIK* minor innititur majori EIF *massæ prioris* ad minuendam frictionem, & resistentiam in I, ubi motus, utut exigui, *inducendi sunt in massam* tanti ponderis pro reducendo quadrante ad *positionem debitam* per suspensionem secundam ope machinamenti indicati in figura 8, quod est affigendum alteri brachio crucis figuræ 1 prope punctum *P*. Massæ CABDFIE, MGHIKLN sunt hìc similes, & æquales *adhibitis ibi*: hæc posterior debet affigi machinamento quadrantis eodem modo: & *quidem* machinamentum ipsum in hisce quadrantibus *ita magnis firmari solet ibidem* pluribus crassis regulis *plurium directionum coeuntibus*. *Prior massa debet esse mobilis motu verticali inter binas regulas verticales* O, *P connexas* cum machinamento quadrantis, cum quo itidem connexa esse debet *etiam tertia regula* horizontalis ST: per hanc debet transire, vel *huic* esse adnexa cochlea QR, quæ sustineat eandem priorem massam, & eam propellat sursum, deorsum: eo motu inclinatur latus AC figuræ 1, & adducitur ad horizontalitatem. In quadrante Mediolanensi, qui erat muralis, aptavi aliam etiam cochleam horizontalem perpendicularem plano quadrantis, per quam massa AD figuræ 7 potest promoveri motu horizontali, quo punctum *suspensionis* I potest admoveri muro, vel ab ipso removeri: eo *motu planum* quadrantis redactum antea ad positionem verticalem reducitur *ad planum* meridiani. Nullum hìc est opus ejusmodi cochlea, cum id *planum* adduci *possit* ad eam positionem, ut etiam ad positionem cujuscumque *alterius* circuli verticalis per motum *totius* machinæ circa axem verticalem figuræ 1.

39. *Reductio* ad planum verticale fit per *cochleam horizontalem pertinentem* ad punctum axis Q figuræ 1. Ejus actionem refert figura 9, in qua planum chartæ est perpendiculare plano præcedentium binarum, & plano quadrantis figuræ 1, ut nimirum perspici possit, quæ aliter lateret post ipsum axem ejusdem figuræ 1. MN est axis, per quem *transit cochlea* QRP cuspide sua P pertingens usque ad superficiem posteriorem AB laminæ habentis affixum limbum. Ad hanc applicatur quadrans ob ipsum modum suæ *suspensionis per massas illas figurarum* 7, & 8 non nihil ab eo *distantes*. *Verum potest etiam cogi* ipsa superficies AB ad perpetuum contactum *cuspidis P per funiculum*, qui affigatur *ipsi laminæ*, & *tendat horizontaliter usque ad trochleam* affixam axi MN, *ac sustineat pondus* ipsi appensum. Id filum *trahet laminam* AB versus cuspidem tota vi ejus ponderis ita, ut sive cochlea promoveatur, sive retrahatur, semper superficies eadem sit in contactu cum ea cuspide: eo pacto mutabitur inclinatio *quadrantis* ita, ut is possit abire etiam ultra posit*ionem verticalem ad* inclinationem contrariam: *sed ejus cochleæ* usus erit ad inducendam *tantummodo eam positionem plani quadrantis*. Poterit autem *agnosci, an is habeat eandem positionem, & si ipsam non habeat, ad eam adduci proxime talem ope fili cum pondere appensi* acui prodeunti ex axe immisso in foramen laminæ centri, quo usi sumus in *Opusculo* II pro examine plani quadrantis. Id debet habere eandem distantiam ab ea lamina prope acum, & a plano limbi, quam an habeat, docebit cuneus micrometricus, & ut eam acquirat, efficiet motus inductus per hanc cochleam. Quæ pertinent ad positionem axis alidadæ ferentis telescopium ipsius quadrantis, respectu axis telescopii ipsius, & reliqua pertinentia ad circulum, quem in superficie cælesti describit hic axis productus usque ad ipsam, adducto ipso quadrante per alidadam horizontalem versus austrum, revocari poterunt ad *examen*, & *corrigi* methodo analoga ei, quam adhibuimus in Opusculo III pro deprehendendis, & *corrigendis erroribus collocationis* quadrantis muralis, cui debet respondere *hic* quadrans adductus ad eam positionem.

40. Pos-

40. *Posset* applicari ex parte opposita cruci ipsi, quæ *sustinet* quadrantem curva æquilibrii, de qua egimus in Opusculo præcedente, adjecto ipsi etiam pondere sufficienti ad habendum æquipondium respectu axis ipsius, in quo sic habeatur centrum gravitatis eorum omnium, quæ is sustinebit hinc, & inde, & si non adhibeatur ea curva, oportebit omnino inducere ejusmodi æquilibrium per pondus aliquod adnexum cruci, ne axis prægravatus ab ingenti pondere quadrantis ipsius deflectatur *ex illa* parte, & vero etiam non obstante ejus crassitudine *incurvetur*. *Id augebit pondus* totale, & actionem in *M*, ac *difficultatem* motuum totius machinæ circa eum axem: *sed ea difficultas* tolli potest ope ponderis S figuræ 1. Illud autem pondus poterit *etiam* imminui *suppresso* pondere G; cum alidada DE possit retineri in *positione horizontali* per solam suam soliditatem ortam ex regula ipsi adnexa cum faciebus latitudinalibus habentibus positionem verticalem, & e re*gula* transversa F, præter quam quod obtenta horizontalitate fa*sciæ referentis* horizontem ope canalis, & cymbulæ, potest ipsa alidada cum suo arcu *inniti parti interiori fasciæ* ipsius; quod & curvaturam *impediet ejusdem alidadæ*, & *inclinationem*: *ejus autem soliditas*, & *regula F transversa* efficiet, *ut ibi non innitatur ei parti fasciæ*, *nisi vi perquam exiguâ alidada ipsa*, & *ejus* arcus.

41. *Remanet* dicendum aliquid de modo observandi, & de iis, quæ necessaria sunt ad reddendum eum modum expeditum. *Potest* effici axis ejus altitudinis, ut punctum B remaneat tribus circiter pedibus elevatum supra pavimentum: tum observationes non multum distantes a zenith fieri poterunt insidendo sellæ cuipiam; alidadâ nimirum quadrantis adductâ ad arcum puncto imo B, oculus *erit* tribus pedibus altior pavimento, & sella parum alta erit opportuna ad eum usum; vitanda enim est omnino positio incommo*dissima*, *qua quis projectus dorso* supra *pavimentum instituat majoribus instrumentis* observationes *verticales*, quod celeberrimo Astronomo de la *Caille dicitur fuisse demum fatale*. Ipsa obser*tionum* exactitudo *requirit in primis* commodam Observatoris po*sitionem*. Verum hic ipse quadrans non potest demitti ad distan-

tiam a pavimento minorem, ne incurrat in fulcrum *abba*, quod debet habere altitudinem pedum saltem trium, ut retineat axem in positione accurate verticali: recedendo a puncto B elevatur limbus, & Observator potest insistere suis pedibus usque ad quandam distantiam, in qua adhibebit scabellum: tum machinam innixam trochleis habentem duos, vel tres, vel etiam plures gradus: pro observationibus parum elevatis supra horizontem præstaret habere scalam permanentem circulariter erectam in formam ejus, quæ adhibebatur in amphitheatris veteribus, & fit nunc etiam in exiguis theatris anatomicis. Ad infimos ejus scalæ fixæ gradus ascenderet Astronomus per illam scalam mobilem, & ad superiores ascenderet per ipsam tam pro observationibus horizonti proximis, quam pro observandis azimuthis in fascia, quæ fieri posset paullo superior gradu supremo ejus scalæ, & hic pedibus quinque inferior radio horizontali quadrantis, cui gradui supremo insistens Astronomus perficeret ipsas observationes horizonti proximas.

42. Instrumento ejus magnitudinis non posset Astronomus per se solum instituere satis multas observationes brevi tempore, sed posset utique, si haberet adjutorem, uti habebatur in Mediolanensi specula, pro qua hoc instrumentum ejus magnitudinis primo proposui. Astronomus ipse observaret per telescopium, & determinaret distantias a zenith exhibitas a quadrante, dum interea ejus adjutor assisteret fasciæ horizontali, & in ea determinaret azimutha: sed ita res disponi deberent, ut Astronomus ipse, dum habet oculum applicatum ad telescopium, posset binis baculis apprehensis binis manibus movere motu exiguo in gyrum tam alidadam quadrantis, quam alidadam horizontalem, quarum ope adduceret astrum ad intersectionem filorum, quæ habentur in foco objectivi. Notato momento ejus appulsus notaret ipse distantiam a zenith in divisionibus quadrantis, & adjutor azimuthum in fascia horizontali, quo pacto satis multæ observationes ejusdem astri, ut cometæ, sibi invicem succederent per intervalla temporis brevissima.

43. Hæc pertinent ad instrumentum ingens hujus generis, quod

non

non potest adhiberi nisi in observatoriis satis magnis: *pro minoribus* esset maxime opportunum instrumentum hujusmodi habens radium tam quadrantis, quam circuli horizontalis pedum trium: qui radius sufficit ad habendos angulos tam verticales, quam horizontales saltem intra duo secunda, & vero etiam intra unicum, adhibito microscopio, si divisiones sint satis nitidæ, & accuratæ, vel bene cognitæ per accuratam verificationem, ad quam peragendam conferre possunt multa ex iis, quæ in præcedentibus Opusculis continentur. *Ejus divisiones fieri possunt methodis* adhiberi solitis cum usu nonii *tam pro quadrante verticali*, quam pro circulo horizontali. Usus *hujusmodi instrumenti* tanto minoris esset multo expeditior, & *Astronomus suis insistens pedibus*, *vel pro* objectis parum elevatis supra horizontem *adhibito scabello*, vel scala mobili duorum, vel trium graduum, posset facile per se ipsum præstare omnia, paucis minutis temporis impensis pro quavis *observatione* completa, transeundo a determinatione distantiæ *a zenith* ad determinandum azimuthum in circulo horizontali parum remoto. Inter *limbum quadrantis*, & *circulum* horizontalem haberetur *etiam*, *dum observationes fierent prope horizontem*, *spatium satis amplum pro Astronomo*, *qui dum observaret per telescopium*, *haberet circulum horizontalem a tergo*, tum conversus videret commode in eo circulo azimuthum.

OPU-

OPUSCULUM VII.

De determinandis, et corrigendis erroribus axium in quadrantibus, et sextantibus.

1. IN Astronomia adhiberi solent quadrantes, & sextantes *mobiles circa axem horizontalem perpendicularem eorum plano*, *qui & ipse moveatur circa alterum axem verticalem*. *Hic redditur verticalis ope cochlearum pedi affixarum*, *cujus positio verticalis facile earum ope acquiritur*, *ubi alter ex iis axibus sit* accurate *alteri* perpendicularis, & planum instrumenti accurate perpendiculare axi suo. Ejusmodi positio reddit multo magis commodum eorum instrumentorum usum. Ubi semel instrumentum bene dispositum ad eam positionem *adductum* sit, eo utcumque circumacto ope eorum *axium*, *semper* filum penduli e centro demissi *jacet in ipso* instrumenti plano, & radit *limbum*, *quod quidem obtineri non potest*, ubi axium po*sitio sit vitiosa*, *nisi* movendo cochleas *pro singulis novis motibus* circa axes. *Instrumentorum delineatio elegantissima*, *& descriptio* copiosissima habetur in Opere incomparabili Domini de La-Lande, quod ipse *jure optimo* Astronomiam nominavit. Inter cætera habetur quadrans portatilis pedum trium, & sextans multo major, ad quorum axes pertinet hoc Opusculum. Hìc ego non nisi lineas simplices adhibebo tubis, & virgis, ac regulis metallicis substitutas, quarum ope intelligi possint, quæ ad hanc investigationem, & ad correctiones pertinent: cætera Astronomus mente supplebit, & quæ hìc habebuntur abunde sunt, ut ipse possit determinare errores, & artificem dirigere pro correctione ipsorum, ut obtineatur exacta axium eorundem collocatio.

2. In fig. 1 (Tab. V) ILG est simplex axis *cylindri solidi* verticalis immissi intra cavum *itidem* verticalem *ita*, *ut intra* ipsum immotum gyrare possit. Hic posterior innititur pedi habenti quatuor cochleas in R, S, T, V, quarum ope ipse axis, ut innui, *ad*mo-

modum facile reducitur ad positionem verticalem: habetur alter cylindrus solidus ita immissus cavo horizontali, ut intra ipsum manentem in data quavis positione horizontali possit moveri in gyrum, & secum transferre totum planum sextantis indicati hìc per sola bina sua latera CA, CB, & eum arcum AB, in quo habentur divisiones, quæ in eo sextante, pro quo hanc perquisitionem institui, erant factæ per punctula: cylindrus solidus horizontalis adductus cum suo cavo ad quampiam positionem determinatam, debet ibi posse gyrare intra hunc circa eorum axem communem ita, ut quivis e radiis sextantis, & axis telescopii ipsi affixi productus usque ad superficiem sphæræ cælestis percurrat arcum circuli verticalis: bina autem sunt ejusmodi telescopia, quæ hìc ne indicantur quidem, alterum in directione lateris AC, quod percurrit arcum ejus circuli verticalis a zenith usque ad 60 gradus, & indicat distantias ab ipso zenith, alterum huic perpendiculare, quod percurrit gradus itidem 60 a tricesimo distantiæ a zenith usque ad nonagesimum, & indicat altitudines supra horizontem. Cylindrus horizontalis cavus ita connexus est cum verticali solido, ut verticali cavo immoto cum toto pede, & suis cochleis, moveri possit motu horizontali in gyrum, & secum transferre planum sextantis, quod ita adducitur ad quodvis planum verticale: eo pacto telescopia possunt determinare distantias apparentes a zenith, & elevationes supra horizontem in quovis circulo azimuthali.

3. Axis cylindri solidi horizontalis hìc exprimitur per solam rectam GF: is cylindrus desinit in planum circulare ita procurrens circumquaque, ut affigatur ope cochlearum machinamento posteriori sextantis ipsius ex parte opposita plano limbi, ac id planum indicat circulus *pqr*, ultra quem, & ultra planum limbi concipi debet filum cum pondere P pendens ex acu *Cc* prodeunte e centro arcus ADB, quod debet conradere limbum ipsum in punctis *D*, & in ipsis determinare eas distantias a zenith, & altitudines supra horizontem, ac ipsum ita conradit reipsa, ubi planum sextantis habet positionem verticalem, quam debet habere tum, cum eo instrumento fiunt observationes: sed hìc exhibetur id planum in positione non nihil inclinata, in qua filum ipsum di-

stat

stat non nihil a limbo per distantiam ipsi perpendicularem ED.

4. *Cylindrus* verticalis cavus adnexus pedi immoto desinit in *limbum* circularem exigui circuli horizontalis immoti cum ipso, quem indicat arcus OO'O''H, in cujus divisionibus exiguis determinatur crassiore determinatione motus circularis axis horizontalis ab indice affixo huic cylindro. *Ut autem in utroque motu tam* axis horizontalis circa verticalem, quam *plani sectoris* circa axem horizontalem *hoc planum possit remanere* semper in positione *verticali, debet axis ipse horizontalis esse accurate perpendicularis tam axi verticali, quam plano sectoris*; quæ positio utraque nisi accurata sit *tam in G, quam in F, non poterit id obtineri, nisi in quavis nova positione sextantis fiat ille novus illarum cochlearum usus*. At si ea habeatur satis accurata; *satis* facile obtinetur positio debita verticalis conservata in quovis motu tam axis horizontalis circa verticalem, quam plani sextantis circa axem horizontalem.

5. In eo casu satis est reducere axem IG ad *verticalitatem accuratam*, qua reductione factâ, *axis* GF evadit semper accurate horizontalis, & *planum GF accurate verticale, ac filum* CP, quod *si libere pendeat, est semper accurate verticale, semper accurate conradit limbum*. *Porro positio axis IG accurate verticalis tum* facile inducitur ope cochlearum pertinentium ad pedem. Convertatur axis GF, donec evadat ad sensum parallelus binis ex iis cochleis pertinentibus ad idem quodpiam e quatuor lateribus quadrilinei, quod concipiatur terminatum ad quatuor puncta R, S, T, V, ut binis R, V: planum ACB, quod supponitur perpendiculare ei axi, erit perpendiculare ei lateri: si filum CP vel distet a limbo, vel ipsi ita applicetur, ut non libere pendeat; facile per motum cochlearum pertinentium ad latus adjacens, ut cochlearum R, S, vel V, T, mutabitur inclinatio plani ACB ita, ut filum adducatur ad contactum simplicem liberum *limbi*, sed cum tria puncta determinent planum, poterit utique una e reliquis binis cochleis remanere elevata supra planum pavimenti, vel basis lapideæ præparatæ ad stabilem sectoris positionem, quæ adduci poterit ad contactum cum ipso. Tum axis IG erit in plano quodam

dam verticali transeunte per puncta R, S. Fiat conversio axis GF per quadrantem motus sui circularis, & eodem pacto ope cochlearum pertinentium ad latus alterum utrumvis perpendiculare priori, ut cochlearum R, V, vel S, T iterum mutetur inclinatio plani, (ea mutatio nihil oberit positioni axis ejusdem in plano verticali priore, si fiat per motum æqualem utriusque cochleæ; axis ipse tantummodo inclinabitur intra id planum), donec filum iterum adducatur ad liberum contactum cum limbo. Eo pacto adducetur is axis ad alterum planum verticale transiens per puncta R, V., adeoque erit in intersectione binorum planorum verticalium, quæ debet esse verticalis.

6. Quod si post ejusmodi binas operationes, circumacto axe GF circa GI, vel plano ACB circa ipsum GF, filum CP alicubi nimis apprimatur limbo, vel ab eo distet, limbus autem sit in eodem plano cum centro, quod ut fiat obtineri potest methodo Opusculi II; manifestum erit, haberi in collocatione axis GF vel respectu axis IG, vel respectu plani ACB, vel respectu utriusque, aliquod vitium, quod oportebit determinare, ut possit corrigi. Ea correctio haberi non potest per normas, quæ nimirum applicari non possunt in G, & F ita, ut per eas obtineatur ea positio accurate perpendicularis. Inveni methodum determinandi ope Geometriæ, & calculi singulos errores, per ipsas distantias ED fili a limbo determinatas in tribus positionibus plani sextantis circumducti circa axem horizontalem immotum, & aliis tribus axis horizontalis transferentis secum planum sextantis carentis quovis alio motu præter eum, quo transferatur ab axe eodem, & dirigendi correctiones, determinatis plagis, & magnitudinibus singularum correctionum, indicato etiam modo, quo correctiones obtineri possint, & id est scopus totius hujusce Opusculi.

7. Ubi filum distat a limbo AB, admodum facile determinari potest ipsa ejus distantia DE, quæ ob datum radium CD exhibebit angulum inclinationis DCE. Si rectæ verticalis positio jaceat ad partem oppositam; filum apprimetur plus æquo ipsi limbo: verum etiam tum ea poterit determinari, removendo punctum suspensionis a C versus caput *c* acus *Cc*, defixæ in centro ita,

ut filum jam distet a limbo. Tum vero distantia *Cc fili ipsius* a *centro in* C *evadet major*, quam ejusdem distantia a limbo in D, & hæc subducta ab illa exhibebit ejusmodi inclinationem factam in partem contrariam, cujus valor facile habebitur. Si enim DL, vel ea differentia sit $= m$, & radius instrumenti CD $= a$, patet, sinum ejus anguli fore $\frac{m}{a}$: cumque is angulus debeat esse exiguus ob errores instrumenti exiguos, ut hic supponimus; is ipse poterit assumi *pro valore anguli*, *sive pro valore* arcus eum metientis in circulo, *cujus radius* $= 1$. *Verum satius erit efficere*, ut filum pendeat ex *ipso centro* C, *ut unica debeat assumi distantia DE*, *& ea quidem in loco commodiore*, *nimirum in imo limbo: id autem facile* obtinebitur; nam si ope cochlearum pedis RSTV satis inclinetur axis IG; habebitur in aliqua parte conversionis axis GF circa ipsum GI filum a limbo remotum, & posito axe GF ad eam plagam, versus quam inclinatus est *axis* IG, planum ACB ita inclinabitur, ut filum vel *in magna parte* conversionis, vel etiam *in ea tota sit non* nihil remotum a limbo.

8. *Porro admodum facile definiri accuratissime* poterit distantia *DE* (*). *Charta crassior* ope *longioris regulæ rescindatur per* rectam *longiorem*, *tum* per *aliam*, *quæ* cum ea exiguum angulum contineat. In eo angulo quæratur distantia a vertice, in qua latera a se invicem distent per duas, vel tres lineas pedis Parisiensis, & sectis lateribus in duas, vel tres partes æquales, habebitur locus, ubi distantia laterum sit unius partis assumptæ duarum, &c. Subdivisionibus adhibitis facile habebuntur bases anguli in centesimis etiam ejusdem partis. Anguli planum limbo perpendicula-

(*) Hìc ego quidem proposui, cum hoc Opusculum conscriberem, methodum expeditam præstandi ope crassioris chartæ abscissæ ad angulum exiguum, illud idem, pro quo habetur in Opusculo II instrumentum, quod ad ejusmodi usum perpetuum curavi perficiendum e metallo, & appellavi *cuneum micrometricum*, ac habetur in *fig.* 1 Tab. I. Ibidem exhibui methodum tutiorem dividendi ejusmodi superficiem ita, ut hasce distantias accuratissime exhibeat. Cum illud non haberem ad manus, substitui hoc instrumentum chartaceum, quod hìc relinquo, cum sit tam facile parabile, occasione se offerente, & illud non sit in usu communi.

culariter applicatum insinuetur inter limbum, & filum, ac sensim promoveatur, donec attingat filum ipsum. Ibi a loco lateris apparebit, quanta sit distantia fili a limbo, æqualis nimirum basi anguli, sive distantiæ laterum a se invicem in eo loco.

9. Positio quoque instrumenti, in qua assumitur distantia fili a limbo, facile determinabitur. In casu, in quo planum ACB circumagitur circa axem GF, positionem ejus plani respectu ipsius axis exhibebit ipsa divisio limbi AB cum gradibus ibi adnotatis. In altero autem casu, *in quo axis* GF circumducitur circa axem IG, *notari poterit positio axis mobilis in illo* circulo azimuthali OO'O'' *per indicem* GO tendentem ad partes ipsi axi oppositas, vel utcumque connexum cum ipso axe.

10. Jam vero si concipiantur rectæ GQ, FN *perpendiculares* ad planum ACB; circumacto axe GF circa IG, & notatis tribus distantiis fili a limbo in tribus positionibus axis GF ita determinatis, ut obtineatur id, quod obtinendum proposuimus, determinabitur & magnitudo, & positio inclinationis axis ILG ad horizontem, & angulus IGQ, *quem is* continet cum perpendiculo GQ, quanquam *hujus posterioris nullus nobis occurret* usus, ac *circumacto plano* ACB *circa axem* GF, & *notatis itidem tribus distantiis fili a limbo*, *determinabitur inclinatio hujus* ad horizontem, & angulus GFN, quem is continet cum perpendiculo FN, *ac positio* utriusque inclinationis: eorum autem ope invenietur, quantum angulus LGF aberret a recto, quibus cognitis innotescet quidquid requiritur ad corrigendam instrumenti constructionem, ut deinde possit ad accuratam positionem perduci. Verum eæ omnes determinationes requirunt bina lemmata, quæ idcirco præmittemus.

11. *Lemma* 1. Si e binis punctis C, C' (fig. 2) quibusvis *plani inclinati* MN pendeant bina pondera P, P' per fila CP, C'P', & *assumptis* CE, C'E' versus P, P' æqualibus, ducantur perpendicula ED, E'D' in ipsum planum; erunt æqualia ipsa, & æquales anguli DCE, D'C'E', ac *latera* CD, C'D' æqualia.

12. Erunt enim inter se *parallelæ* binæ rectæ verticales CE, C'E', & bina perpendicula ED, E'D' in idem planum ducta. Qua-

re & *anguli* CED, C'E'D', & eorum *complementa* DCE, D'C'E', & *tota ea* triangula, adeoque & *latera* ED, E'D', ac CD, C'D' *omnia* erunt inter se æqualia.

13. *Scholium*. Hinc si in fig. 1 in conversione axis GF circa axem IG penderet filum ex Q, vel in conversione instrumenti circa axem GF penderet ex F; id in *distantiis ab eo puncto* æqualibus distantiæ CE haberet distantiam a plano ACB æqualem distantiæ DE fili pendentis e puncto C.

14. Patebit infra, *quanto faciliorem determinationem* id reddat: nam in *primo casu recta* GQ *perpendicularis plano* ACB conversa cum ipso circa axem IG *describit superficiem coni recti*, si angulus IGQ *non est rectus*, *quo existente recto*, *describeret planum circuli perpendiculare ipsi axi* IG: in secundo vero casu, converso plano ACB circa axem GF, punctum F manet fixum, recta vero FN perpendicularis ipsi plano describit itidem superficiem coni recti, nisi congruat cum eodem axe: ea consideratio solutionem exhibebit.

15. *Lemma* 2. Datis (fig. 3) in peripheria dati circuli tribus punctis O, O', O'', quæratur in eadem punctum A ejusmodi, ut ductis perpendiculis OR, O'R', O''R'' in diametrum ACB, in qua sit quoddam punctum M, rectæ MR, MR', MR'' sint ad se invicem in ratione data m, n, r, quæraturque ipsum illud punctum M.

16. *Ducantur* chordæ OO', O'O'': harum posterior occurrat perpendiculo RO in S. Quoniam datur ratio rectarum MR, MR', MR'', dabitur etiam ratio RR' ad R'R'', quæ erit $n-m$ ad $r-n$. Ea autem est ratio rectæ O'S ad chordam O'O''. Quare dabitur ipsa O'S cum puncto S, adeoque & SO. In hanc, si opus est, productam ducatur perpendiculum CR, quod utrinque productum determinabit quæsitam diametrum AB, posito A in eo ejus extremo, quod accedit propius ad punctum e tribus O *respondens maximæ distantiæ* fili a limbo, quam ad *respondens minimæ*. Ducto in AB perpendiculo O'R', *habebitur* RR', *cujus ratio* ad RM, cum sit eadem ac $n-m$ ad m, *habebitur* & RM cum puncto M sito ad partes R', vel R, prout fuerit m major, vel minor, quam n.

17. *Schol.*

17. *Schol.* 1. Datis arcubus AO, AO', AO'', & numeris m, n, r, facile cætera expedientur calculo etiam trigonometrico. Occurrat enim SO peripheriæ etiam in V, & cum anguli OO'O'' mensura sit dimidius arcus OBO'', cui is insistit; mensura ejus supplementi OO'S erit dimidium dati arcus OO'O''. Chordæ autem OO', O'O'' sunt dupli sinus dimidiorum suorum arcuum, adeoque dantur ii sinus respectu radii dati circuli, qui assumi potest pro unitate. Hinc eæ dantur, & factis $r - n : n - m :: O''O' : O'S$, dabitur & hæc recta. In triangulo OO'S habito angulo O' cum lateribus adjacentibus, invenietur angulus SOO', adeoque & hujus suplementum O'OV, cujus duplum est arcus O'O''V. Si huic addatur O'O, & assumatur dimidium ejus summæ; habebitur arcus OA. Tum vero R'R erit differentia cosinuum CR, CR' arcuum AO, AO' jam datorum: si ii cosinus dicantur b, & c; erit $n - m : m :: c - b : \frac{m(c-b)}{n-m} = RM$, & $CM = \frac{m(c-b)}{n-m} - b$.

18. *Schol.* 2. Ad hoc secundum lemma reducitur determinatio eorum, quæ ex datis distantiis fili penduli a limbo quæruntur in utraque conversione circa axes IG, GF figuræ 1, quod hasce perquisitiones instituenti mirum sane accidit, & commodissimum. Ternæ ejusmodi distantiæ pro singulis ex iis binis casibus omnia exhibent, ut innui num. 10, & jam patebit: idcirco libuit ipsum lemma præmittere utrique e sequentibus binis problematis.

19. *Probl.* 1. *Notatis* (*fig.* 1) *tribus distantiis* DE *fili a limbo in tribus datis positionibus axis* GF *gyrantis circa axem* IG, *invenire declinationem exiguam ipsius axis* IG *a recta verticali cum plaga, in quam inclinatur, & differentiam exiguam anguli* IGQ *a recto.*

20. Sint O, O', O'' tria puncta notata ab indice, quæ determinabunt arcus OO', O'O'' similes iis, quos interea describit punctum Q in circulo, cujus planum est perpendiculare ad axem IG. Exprimat eum circulum figura 4, in qua sit C ejus centrum, & CG segmentum axis IG figuræ 1, quod erit axis coni descripti a perpendiculo GQ. Concipiatur ex G recta verticalis, occurrens plano circuli in K: sit autem ACB intersectio plani verticalis

GCK

GCK *cum plano ipsius circuli*, ac GA, GB *cum ejus coni* superficie. *Angulus* CGK exhibebit declinationem axis IG figuræ 1 a *positione* verticali, & punctum A plagam, in quam is inclinatur, ac angulus CAG, sive CQG differentiam anguli quæsiti CGQ a recto GCQ.

21. Ad ea invenienda concipiatur *per* punctum Q *planum* horizontale occurrens rectis GI, AB *in* H, R: tum in *plano* BGA recta AI, & GM *utraque parallela* horizontali RH, quæ occurrant rectis GK, *AB in I, M. Erit ut* KI *ad* KA, *ita* tam KH ad KR, quam KG *ad KM, adeoque etiam, capiendo* antecedentium, & consequentium *summas, GH ad MR, quæ ratio cum sit constans, utcumque mutatâ positione puncti* Q, erit, eo utcumque *mutato, GH ut MR*. Hìc revocandum est animo, puncta G, Q esse in hac figura eadem, ac in fig. 1, & axem GC coni recti descripti hìc a recta GQ perpendicularem plano sectionis circularis BQA ejus coni esse segmentum axis GL ejusdem figuræ 1. Quamobrem si concipiatur recta verticalis QE æqualis filo penduli CE figuræ 1, cum recta ED hìc perpendiculari ad id ipsum *planum ejusdem figuræ* 1, *erit hæc* æqualis illi ED in ipsa *determinatæ ope cunei:* angulus autem GQD *rectæ perpendicularis plano* eidem cum recta ED existente in eodem plano erit rectus, adeoque æqualis angulo HQE, quam recta QH horizontalis continet cum QE verticali. Quare dempto communi HQD, erit GQH = EQD, & proinde ob GHQ, EDQ rectos erit GH ad ED in constanti ratione GQ, ad QE. Quare erit GH, ut ED, adeoque etiam MR, quæ est ut GH, erit ut distantia fili a limbo in figura 1. Facile autem patet, punctum A debere respondere maximo angulo GQH.

22. Si jam figura 3 referat hunc circulum, & in eo tria puncta O, O', O'' respondeant tribus punctis O, O', O'' notatis ab indice in fig. 1 pro tribus diversis positionibus axis GF gyrantis circa IG; habebitur ratio trium MR, MR', MR''; erunt enim, ut tres distantiæ fili observatæ, quæ appellari possunt *m*, *n*, *r*, cum respondeant iis, quarum ratio expressa est iis litteris numero 15. Quare habebitur (num. 17) arcus OA: si in fig. 1 assumatur ei similis OH,

& ad-

& adducatur index ad H ; habebitur positio axis GF obversi in eam plagam , in quam inclinatur axis IL , & habebitur (num. 17) $CM = \frac{m(c-b)}{n-m} - b$.

23. Invenientur etiam facile in fig. 4 & anguli quæsiti CGK, CAG. Nam in primis ductâ QK, angulus GQH, æqualis EQD, seu (num. 13) æqualis angulo ECD figuræ 1 dato per num. 7 erit divisus in duas partes KQH, KQG, quæ erunt ad totum, ut HK, KG ad totam HG (*nam tangens HG ejus anguli exigui relata ad radium QH confunditur ad sensum cum arcu circuli*), nimirum ut rectæ MK, KR, *sive* (neglectâ perquam exiguâ CK; est enim exiguus angulus CGK, & exigua recta KG ob *angulum* KAG exiguum) ut rectæ MC, CR jam datæ ad totam MR. Quare habebuntur illæ duæ partes, quarum posterior, nimirum angulus GQK est quamproxime æqualis angulo CQG (ob punctum K *quamproximum* puncto C), sive angulo CAG, qui est alter e *quæsitis*. *Prior* autem, nimirum KQH, exhibebit elevationem rectæ KQ supra *horizontem QHR*. *Ea* ad KAI erit quamproxime, ut KH *ad KI (nam ob punctum K proximum centro* C, est *proxime KQ = KA, & KH, KI sunt eorum angulorum tangentes ad eos radios, quæ in angulis exiguis sunt ut ipsi anguli)*, nimirum ut KR, *sive* CR ad CA. Dabitur igitur & angulus KAI, *qui æqualis est* quæsito CGK, cum *ii sint complementa* angulorum æqualium ad verticem K in triangulis rectangulis KIA, KCG, existente recto etiam hoc secundo ob CG axem coni recti (num. 14).

24. *Scholium* 1. Erit $MR = \frac{m(c-b)}{n-m}$ (num. 17) : $KR = CR = b :: GQH = EQD = \frac{m}{a}$ (num. 7) : $KQH = \frac{b(n-m)}{a(c-b)}$.

Hinc *primò* $GAC = GQC = GQK = \frac{m}{a} - \frac{b(n-m)}{a(c-b)}$. Tum erit KR : KA, *sive* $CR = b : CA = 1 :: KQH : KAI = KGC = \frac{n-m}{a(c-b)}$. Hi postremi duo valores exhibent binos angulos quæsitos.

25. Si

25. *Si binæ distantiæ fili extremarum observationum sint inter se æquales, & media cadat in medium arcum; determinatio evadit multo simplicior.* Punctum secundæ observationis (fig. 3) cadet in A, & immediate determinabit ipsum A: cosinus c observationis secundæ erit $= 1$. Quod si prima, & tertia exhibeant distantiam $= 0$; chorda ipsa OO'' determinabit M, cum eo casu tam MR, quam MR'' debeat esse $= 0$: valores angulorum, facto $m = 0$, $r = 0$, $c = 1$, erunt hic GAC $= -\frac{bn}{a(1-b)}$, & KGC $= \frac{n}{a(1-b)}$. Facile autem ejusmodi observatio instituitur circumducendo axem GF circa GL hinc, & inde, donec deveniatur ad positionem, in qua filum appellat ad limbum, & deinde adducendo eum axem ad medium arcum prioribus positionibus interceptum, ac ibi capiendo distantiam n.

26. *Probl.* 2. *Notatis* (*fig.* 1) *tribus distantiis* DE *fili a limbo in tribus datis positionibus plani* ACB *gyrantis circa* GF, *invenire inclinationem exiguam ipsius axis ad horizontem cum plaga, in quam inclinatur, & declinationem exiguam ejusdem a perpendiculo* FN.

27. Sit in fig. 5 recta FO eadem, ac in fig. 1 recta FN perpendicularis plano ACB, substituto hic puncto O illi N ad habendam analogiam cum figura 3, cujus usus hic recurrit: AOPB sit circulus descriptus ab eo puncto, cujus circuli planum erit perpendiculare axi GF ejusdem figuræ 1, & centrum C hic in eodem axe ita, ut hic axis FC coni habentis pro basi eum circulum, & pro vertice punctum F sit segmentum ipsius axis FG figuræ 1. Concipiatur recta verticalis VFE cum binis planis verticalibus transeuntibus per ipsam, & eorum altero per C, altero per O. Eorum planorum intersectiones cum plano circuli determinabunt diametrum AB, & chordam OP. Erit autem punctum V admodum remotum ob axem FC parum abludentem a positione plani horizontalis ducti per F. Id planum occurret rectis VOP, VAB in I, M, & erit IM perpendicularis plano VBF, cum sit ipsi perpendiculare præter id planum horizontale etiam planum AOPB, quorum planorum ea est intersectio. Demum conceptâ FE æquali

filo

filo CE *figuræ* 1, *sit* ED perpendicularis plano instrumenti, adeoque (*num.* 13) æqualis distantiæ fili a limbo, quæ quidem debebit esse parallela FO normali itidem ad idem planum, adeoque jacens cum ipsa in eodem plano OFI. Demum sit OR parallela IM, adeoque normalis itidem ad diametrum AB.

28. Angulus *CFM* erit quæsita inclinatio axis FC ad horizontem FM, & OFC $=$ AFC declinatio ejusdem a perpendiculo FO itidem quæsita: indicabit autem A positionem puncti O, in qua *ipsum perpendiculum jacebit in eodem plano verticali supra eundem axem FC.*

29. Ob angulos AFB, OFP *exiguos*, bases ACMB, OIP haberi possunt pro arcubus *subtendentibus angulos in* F ad *radium constantem* FO, & *sinus* ED itidem pro arcu *subtendente* angulum EFD ad radium FE. Porro ob angulos OFD, IFE rectos, ablato communi IFD, habetur EFD $=$ OFI. Igitur erit ut FE ad OF, ita ED ad OI, quæ ratio cum sit constans, erit OI ut *ED. Porro est* proxime OI $=$ RM; est enim OI : RM :: VO : *VR*, quæ ob ingentem distantiam puncti V haberi potest pro ratione æqualitatis. *Quare erit & RM*, *ut* ED.

30. *Redit igitur pro inventione puncti A per tria puncta O figura tertia cum lemmate* 2, & *invenietur ratio RM*, *sive* OI *tam* ad AC, quam ad CM, *quæ erit* ratio anguli OFI, seu dati DFE æqualis (*num.* 13) ECD figuræ 1 dati per num. 7, ad *AFC*, & *CFM*, qui anguli idcirco habebuntur, ut oportebat.

31. *Scholium* 1. Tres distantiæ fili a limbo in hoc motu dicantur m', n', r', cosinus CR, CR' figuræ 3 b', c': erit, ut numer. 23, MR $= \frac{m'(c'-b')}{n'-m'}$: angulus vero RFM proxime æqualis OFI, sive EFD $= \frac{m'}{a}$. Hinc in fig. 5 erit MR $= \frac{m'(c'-b')}{n'-m'}$: CR $= b'$ :: MFR $= \frac{m'}{a}$: CFR $= \frac{b'(n'-m')}{a(c'-b')}$; unde CFM $= \frac{m'}{a} - \frac{b'(n'-m')}{a(c'-b')}$: tum CR $= b'$: CA $=$ 1 :: CFR : CFA $= \frac{n'-m'}{a(c'-b')}$. Hæ postremæ formulæ congruunt cum prima, & ter-

tia *numeri* 24; *sed hìc quidem* inclinationem *axis ad horizontem* exhibet *valor* prior binomius anguli CFM, pertinente *posteriore simplice* ad angulum perpendiculi cum axe; dum ibi declinationem axis a *positione* verticali exhibet posterior *simplex*, exhibente *priore* binomio declinationem perpendiculi a recta normali eidem axi: Ascendet autem directio *FC*, *descendente* CF, ut figura exhibet; si valor primæ formulæ *fuerit positivus*, & FA abibit supra FC, si fuerit *positivus* valor secundæ: contrarium accidet, si *ii valores fuerint negativi; cum nimirum eæ formulæ* respondeant *casui expresso a figura*.

32. *Schol.* 2. Etiam *hìc*, *ut num.* 25, *determinatio erit facilior*, si inveniantur *binæ positiones*, *quæ exhibeant* binas ED æquales, & *assumatur media in æquali distantia ab ipsis*. *Verum ibi* quidem *id licebit præstare* semper, cum index possit percurrere totum circulum azimuthalem figuræ 1, dum hìc filum penduli non potest evagari nisi per quadrantem, vel sextantem, in quem si non cadat maxima vel minima distantia fili, non *poterunt* haberi binæ æquales: & vero si caderet prope initium, vel finem; binæ *distantiæ æquales non essent satis idoneæ* ad determinationem *accuratam*, *cum prope maximam*, *vel minimam* earum variatio *sit perquam* exigua.

33. Pro punctis O, O', O'' *figuræ* 3 assumi possunt ipsa puncta D, quibus in fig. 1 respondet filum; cum satis pateat, arcum AD *metiri* conversionem rectæ FN ipsius circa FG.

34. *Scholium* 3. Facile patebit, quid facto opus sit, ut corrigatur error, quo axis horizontalis FG (fig. 1) aberrat a perpendiculo FN plani ABC inventus num. 31. Id planum adnecti solet basi cylindri habentis axem FG per cochleas. Optimum esset, si ex ipsa instrumenti constructione haberetur facultas mutandi inclinationem cylindri ad ipsius instrumenti planum, ut induci posset positio penitus perpendicularis post hujusmodi *observationes*, quod sane liceret, & quidem haud *difficulter*. *Ubi id commodum* non habetur, ut fere haberi non *solet*, *potest a plano* cylindri detrahi per limam, quantum *oportet*, *in parte* opposita ei, versus quam declinabat axis, effecto novo plano, quod a priore de-

cli-

clinet per angulum æqualem invento GFN figuræ 1, sive CFO = CFA figuræ 5, vel ibi interseri lamella crassitudinis debitæ, quæ remoto plano ACB figuræ 1 a priore positione per eundem angulum inventum, efficiat, ut axis FN recidat in FG.

35. *Plaga*, in qua fieri debet abrasio, est illa, quæ respondet puncto A invento in fig. 3. Posito instrumento in ea positione, in qua assumpta est prima distantia fili a limbo, quæ nimirum pertinet ad punctum O, notetur in superficie cylindri solidi punctum, quod eminet summum prope os circulare cavi, in quod ille inseritur: tum assumatur in eadem superficie secundum eum ipsum circulum arcus similis invento OA figuræ 3 in ea directione, in qua succedunt sibi puncta ejusdem superficiei, si conversio continuetur in directione OO'. Is arcus facile habito simili invento habebitur, cum ex crassitudine cylindri innotescat ejus circuli diameter. Extremum punctum ejus arcus erit id, quod respondebit puncto A figuræ tertiæ, in quo nimirum debebit fieri abrasio, vel hiatus in ejus opposito. Id vero invenietur multo facilius, si punctum A in fig. 3 ita cadat inter puncta O, O'', ut assumpto ei analogo in fig. 1, id habeatur in limbo instrumenti. Tum enim adducto filo ad id punctum per conversionem instrumenti ipsius, punctum quæsitum pro abrasione erit illud ipsum, quod tum eminebit in summo cylindro.

36. Facile itidem definiri potest crassitudo abradenda, vel hiatus procurandus. Sit in fig. 6 AI planum pertinens ad cylindrum, cujus axis FG, adnectendum plano instrumenti CD ope cochlearum H: sit autem FN perpendiculum plani CD applicati immediate plano AI adductum ad positionem, in qua id jaceat supra FG in eodem plano verticali. Ad hoc ut FN, FG congruant, debebit in A inseri cuneus BAI habens angulum I æqualem invento GFN, vel abradi AIE ipsi æqualis. Porro pro valore anguli exigui BAI, vel AIE, assumi potest $\frac{AE}{AI}$. Is valor num. 31 est æqualis valori fig. 5 CFA $= \frac{n' - m'}{a(c' - b')}$. Quare si fiat AB $= f$, erit AE $=$ BI $= \frac{f}{a} \times \frac{n' - m'}{c' - b'}$.

37. *Id quidem plerumque erit fere insensibile ; nam* AB = *s* *est perquam exigua respectu* radii *instrumenti* = *a* , & *nisi* ipsum instrumentum sit negligentissime elaboratum, distantia fili a limbo debet esse exigua. Abrasio post determinationem crassitudinis abradendæ succedet utique, potissimum si abradatur potius minus *justo*, tum observationibus *repetitis resumatur* opus, donec deveniatur ad positionem accuratam, quod fiet utique *satis cito*. Adhuc tamen facilior erit intrusio lamellæ tenuis ex parte opposita, quæ *potest exsecari ex tenui longiore cuneo*, *a cujus basi* crassiore, & *longis lateribus facile fluet determinatio* crassitudinis requisitæ BI : debebunt *autem binæ aliæ habentes crassitudinem dimidiam ejus crassitudinis inseri hinc*, & *inde ab* F *in verticibus diametri perpendicularis* diametro *AB* . *Si forte post primam earum lamellarum* intrusionem aliquis errorculus supersit observationibus iteratis deprehensus ; facile corrigetur is etiam ipsis intrusis aliquanto ulterius, vel retractis ad augendum angulum, vel minuendum..

38. *Probl.* 3. *Inventis superioribus angulis invenire angulum*, *quem* (*fig.* 1) *axis* IG *continet cum* GF.

39. *Sit in fig.* 7 *circulus* BDA *idem* , ac *in fig.* 1 *azimuthalis* OO'H *cum suo centro* G , *sed positus in situ* accurate *horizontali* . Occurrat autem *superficiei sphæræ* habentis eum circulum maximum axis GL figuræ 1 in L, in F axis GF *ejusdem habentis eam positionem*, quam habebat in observationibus pro secundo problemate, in I recta verticalis demissa ex G, in BLIA planum verticale GLI , in FL planum LGF : sit autem ID quadrans circuli maximi transeuntis per F, ad quem terminetur arcus LO descriptus polo F.

40. E primo problemate habetur (num. 20) diameter BGA, punctum autem D e positione instrumenti in observationibus secundi: nimirum arcus AD erit æqualis arcui in fig. 1 intercepto inter *punctum* H, & locum indicis in ea postione : quamobrem *habetur* ejus complementum BD mensura anguli LIF. Est autem DF mensura anguli DGF , *sive* depressionis axis *GF infra* horizontem , cui in fig. 5 æquatur angulus CFM elevatio directionis contrariæ

FG

FG supra rectam horizontalem FM habens (num. 31) pro valore $\frac{m'}{a} - \frac{b'(n'-m')}{a(c'-b')}$.

41. Arcus IL metitur deviationem axis GL a verticali GI, quam in fig. 4 exhibet angulus KGC $= \frac{n-m}{a(c-b)}$ (num. 24): eo ob exiguitatem habito pro recta una cum arcu LO erit IO $=$ LI $\times$ *cos*. BD ob angulum ad O rectum, sive posito arcu BD $= q$ erit IO $= \frac{n-m}{a(c-b)} \times cos.q$, ubi *cos.q* erit valor positivus, vel negativus, prout AD fuerit quadrante major, ut figura exhibet, vel minor, & cadet IO versus D, vel ad partes oppositas, prout totus is ejus valor fuerit positivus, vel negativus, cum formulæ aptatæ sint casui expresso a figura. Hinc habebitur IO $+$ FD differentia a quadrante arcus FO, sive FL, nimirum differentia a recto anguli quæsiti FGL, quæ erit defectus, ut figura exhibet, vel excessus, prout summa earum binarum formularum fuerit positiva vel negativa. Quamobrem habebitur error corrigendus: debebit autem fieri correctio in directione verticali FD; nam ob arcum LO exiguum directio LF producta congruit ad sensum cum ipsa.

42. *Schol.* 1. Si pro secundo problemate observationes fiant in positione distante a BGA per quadrantem, sive indice figuræ 1 notante punctum distans per quadrantem ab H; arcus AD erit hic quadrans, cujus cosinu evanescente, evanescet IO, & error FD deprehensus in probl. 2 (num. 24, & 40) erit totus error hujus problematis tertii. Si vero fiant eæ observationes indice notante punctum H figuræ 1; evanescente BD fiet ille cosinus $= 1$, & punctum O abibit in L, eritque error anguli axium LGF summa errorum EL, FI definitorum in binis problematis pro binis ipsis axibus seorsum.

43. *Schol.* 2. Ut habeatur unico intuitu fructus totius perquisitionis, en valores analyticos, & formulas, ac totam errorum corrigendorum seriem. Tres distantiæ fili a limbo notandæ sunt, dum axis horizontalis convertitur circa verticalem, & aliæ tres, dum planum instrumenti convertitur circa axem horizontalem: dicantur

tur *illæ* m, n, r, *hæ* m', n', r', & *radius instrumenti* a. Eorum *ope in fig.* 3 præparantur valores pro determinatione errorum. Puncta O, O', O'' respondent punctis notatis ab indice in iis conversionibus. Diameter AB invenitur, productâ chordâ O''O' in O'S in ratione $r - n$ ad $n - m$, sine accentu pro primo problemate, cum accentu pro secundo, ac ductâ rectâ SO, & per centrum C diametro perpendiculari eidem: ponitur autem A in extremo propiore illi e punctis O, quod respondet maximæ distantiæ fili a limbo. *Eadem diameter inveniri potest calculo trigonometrico posito num.* 17. *Si capiatur* arcus *OH* in *fig.* 1 æqualis arcui OA tertiæ, & *jacens eodem ordine respectu* punctorum O, O', quo ibi; habebitur *positio ejus axis*, qui deberet *esse horizontalis*, versus quam *inclinatur is*, qui deberet esse verticalis. Quantitas ejus inclinationis habebitur, si cosinus CR, CR' arcuum AO, AO' dicantur b, c: angulus, quo axis verticalis inclinatur, erit (num. 24) $= \frac{m - n}{a(b - c)}$. Is error *non pertinet* ad constructionem *instrumenti*, *sed ad ejus* collocationem *ope cochlearum pedis*, *ac reliquis correctis facile corrigitur* methodo *exposita num.* 3.

44. *Si in fig.* 3 *puncta* O, O', O'' *referant tres positiones instrumenti* circumacti circa axem *horizontalem*, sive puncta in divisione limbi *notata a filo* penduli in iis positionibus, eâdem *methodo* invenitur diameter AB. Si ibi punctum A jaceat respectu punctorum O in ea positione, ut ejus analogum in fig. 1 cadat in limbum AB; adducto filo per conversionem ad id punctum, abrasio debebit fieri in altissima parte basis cylindri. Si id cadat extra; tum adducto instrumento ad positionem respondentem puncto O, in qua est facta prima observatio, notetur punctum, quod eminet summum in superficie cylindri solidi prope os circulare concavi, cui is inseritur: ab eo puncto ibidem in eadem *superficie* capiatur arcus similis invento OA in eadem *directione*, in qua, filo notante in *limbo* puncta O respondentia punctis O, O', succedere sibi debent puncta superficiei *ipsius* cylindri convexi. Punctum positum in extremo puncto ejus arcus respondebit craſ-

situ-

situdini AE abradendæ in fig. 6. Posito ibi BA $= f$ erit crassitudo AE, vel BI $= \frac{f}{a} \times \frac{n' - m'}{c' - b'}$.

45. Supplementum distantiæ puncti H figuræ 1 inventi num. 22 a puncto notato ab indice in circulo eodem azimuthali in conversione circa axem horizontalem immotum dicatur q, & error anguli axium, quo is deficiet a recto, erit (num. 40, & 41) $= \frac{m'}{a} - \frac{b'(n' - m')}{a(c' - b')} + \frac{(n - m)}{a(c - b)} \times \cos . q$, qui vertetur in excessum, si ea formula negativum valorem exhibeat. *Correctio similis adhibitæ in fig. 5 adhiberi debebit in nexu alterius axis cum altero, & simili methodo ex hac formula invenitur quantitas abradenda, vel hiatus procurandus ita, ut axis horizontalis depressus in plano verticali, vel elevatus acquirat positionem debitam. Si nimirum dicatur f latus inducendi hiatus, vel longitudo cunei abradendi; crassitudo analoga crassitudini AE, vel BI fig. 6, erit is valor ductus in f.*

46. Omnium expeditissima determinandi ratio erit, si in gyro circa axem verticalem *notentur bina loca indicis*, in quibus filum tangit *limbum: tum, nullâ aliâ mensurâ ibi captâ, ponatur index horizontalis in puncto remoto ab* eorum *medio* per quadrantem, & ibi fiat conversio *circa* axem *horizontalem*: errores corrigendi erunt *sequentes* duo, in quibus m', n' sunt binæ distantiæ fili a *limbo* in gyro circa axem horizontalem, b', c' cosinus arcuum AO, AO' figuræ 3 respondentium iisdem observationibus, a radius instrumenti, f latus cunei abradendi, vel hiatus procurandi per intrusionem lamellæ in situ correctionis: en eos errores $\frac{f}{a} \times \frac{n' - m'}{c' - b'}$, $\frac{f}{a} \times (m' - \frac{b'(n' - m')}{c' - b'}$.

OPUSCULUM VIII.

De verificatione divisionum sextantis.

1. Hoc Opusculum conscripseram occasione inquirendi in *divisiones sextantis habentis radium pedum sex*, qui *habebatur in Mediolanensi specula*, pro quo etiam excogitavi methodum *traditam in Opusculo præcedente inquirendi* in positionem axium *sectoris ejusdem*, *qui laborabant* vitio *ibi exposito ita*, *ut in ejus usu necessarius esset perpetuus motus cochlearum pro* adducendo filo penduli ad limbum, vel reddenda ipsi libertate positionis verticalis impeditæ a nimia applicatione ad ipsum limbum. In eo repetebatur tota methodus, quam in alio Opusculo conscripto alio tempore adhibueram pro quadrante, determinandi inæqualitatem arcuum *per* inæqualitatem chordarum, eruendi inde errorem *arcus graduum 60 per* comparationem ejus chordæ *cum radio*, *tum pro subdivisionibus considerando* errorem *derivatum in singulis partibus ab* errore *totius*, *qui æqualiter* distribuitur inter partes, & *haberetur* in iis, etiam si eæ essent accurate æquales inter se, ac errorem proprium, qui oritur ab inæqualitate *partium* ipsarum, conjungendum cum *derivato ad* habendum errorem totalem partium singularum, ac demum deducendi tabulam errorum absolutorum pertinentium ad arcus omnes incipientes a zero usque ad quodvis punctum notatum in limbo. Habebatur series amplissima numerorum exhibitorum a singulis observationibus repetitis, & calculorum numericorum adhibitorum ad obtinendam demum eam tabulam.

2. Ordinatâ jam serie Opusculorum pro hac collectione, & imminente impressione, censui fore magis opportunum, *si pro* eo integro Opusculo exhiberem potius *compendium quoddam*, in *quo* omissa omni serie *numerorum*, *qui pertinebant* ad illum tantummodo individuum sextantem, proponerem tantum ea, que in

eo

eo pertinebant ad methodos generales, addendo nonnulla, quæ ibi deerant, & proponendo formulas quasdam idoneas pro ordinanda serie calculorum, quæ in eo Opusculo occurrebant. Occurrit in primo Opusculo pro quadrante theorema pertinens ad eruendam differentiam arcuum a differentia chordarum, quod ibi supposueram: habebatur hìc ejus demonstratio, quam huc inde transferam. Ibi divisiones habebantur per rectas lineas perpendiculares arcui circuli delineati ductu continuo per circinum habentem binas cuspides perpendiculares virgæ metallicæ, quarum altera cum esset fixa in centro, altera non poterat exhibere ullam inæqualitatem radiorum: hìc divisiones erant factæ per punctula, quæ dum imprimuntur malleolo percutiente cuspidem innixam circulo delineato per ductum tenuem, ac levem, non ita facile habentur ejusmodi, ut centra eorum punctorum, quæ per microscopium apparent ut circelli, cadant accuratissime in medium ductum tenuissimæ illius peripheriæ circularis, adeoque habeant omnia eorum circellorum centra distantiam a centro ejusdem peripheriæ accurate eandem. Circellorum, qui nudo oculo apparebant simplicissima quædam punctula, diameter microscopio visa occupabat plura quam 10 secunda. Inquirendum igitur erat in effectum inæqualitatis binorum radiorum terminatorum ad duo extrema puncta eorum arcuum, in quorum inæqualitatem inquirendum erat per inæqualitatem chordarum terminatarum ad eadem puncta determinatam methodo expositâ in eodem Opusculo I. Id ibi præstiteram: proponam hìc inde erutum theorema eo pertinens, & regulam, quæ ex inæqualitate tam chordarum, quam radiorum exhibet differentiam arcuum, sive angulorum terminatorum ad centrum, & quidem redditam adhuc simpliciorem. Accedet demonstratio aliquanto melius ordinata eruendi errorem proprium, & quidem immediate pro parte quavis, ex inæqualitate partium, quæ deberent esse æquales, ac formula melius ordinata pro habendo errore totali absoluto. Quare habebitur hìc id, quod ibi deerat, cum additamento admodum utili.

3. *Theorema* 1. *Differentia duarum chordarum ad differentiam arcuum parum a se invicem differentium est, ut cosinus*

dimidii arcus ad radium, ſive ut radius ad ſecantem dimidii arcus.

4. Si enim (Tab. VI fig. 1) arcus BA, BC differant a ſe invicem per differentiam exiguam AC, & centro B radio chordæ minoris BA concipiatur arcus AD abſcindens a chorda majore BC differentiam chordarum CD; is arcus exiguus *haberi poterit* pro recta perpendiculari ad chordam BC, ut & arcus AC *pro* recta, quæ in triangulo ADC jam rectilineo, & rectangulo erit hypothenuſa. Si ea *conſideretur ut radius, erit CD ſinus anguli CAD* ſibi oppoſiti, *adeoque coſinus anguli ACD ſibi adjacentis, & ſi CD* conſideretur ut radius, *erit AC ſecans ejuſdem anguli ACD*. Porro is angulus *inſiſtit arcui AB ad circumferentiam in C*, adeoque *habet pro menſura* dimidium arcum BA. Quare *differentia CD* duarum chordarum BA, BC eſt ad differentiam AC arcuum ut coſinus dimidii arcus ad radium, vel ut radius ad ſecantem dimidii arcus. Q. E. D. (*).

5. *Corollarium*. Hinc habitâ differentiâ chordarum habebitur differentia arcuum, dividendo differentiam priorem per coſinum dimidii arcus, vel *illam multiplicando per ſecantem ejus* dimidii.

6. Scholium. *Hìc, ubi agitur de arcubus pertinentibus ad ſextantem, & vero etiam in Opuſculo I, ubi agebatur de pertinentibus ad quadrantem*, ſemper occurrunt arcus, in quibus chordæ majori reſpondet arcus major, quod habetur ſemper in arcubus ſemicirculo minoribus: contrarium accidit in arcubus ſemicirculo majoribus, ut facile patet. Quævis chorda reſpondet binis arcubus, qui ſimul complent circulum integrum. Diameter quidem binis ſemicirculis inter ſe æqualibus, quævis autem alia chorda binis arcubus inæqualibus, quorum alter eſt major ſemicirculo, alter minor. Eo ipſo, quod, ubi agitur de arcubus minoribus ſemicirculo, chorda major reſpondet majori arcui, debet haberi oppo-

(*) Patet, hoc theorema debere habere locum etiam, ſi bini arcus proxime inter ſe æquales diſtent a ſe invicem, ut CB, MN. Abſciſſo enim verſus C arcus majoris arcu BA, æquali arcui minori NM, chorda BA erit æqualis chordæ NM, & redibit eadem demonſtratio pro differentia chordarum MN, CB, quæ pro chordis AB, CB.

positum, *ubi agitur* de majoribus semicirculo : nam residuum arcus *majoris* ad eundem integrum circulum debet esse minus residuo minoris. Idem respondet naturæ cosinus, & secantis, quarum ratio adhibetur in hoc theoremate : nam dimidium arcus minoris semicirculo est minus quadrante, & dimidium majoris illo est majus hoc : *cosinu autem* arcus minoris quadrante, qui metitur *angulum* acutum, assumpto pro positivo, uti fit, secans ipsius est itidem positiva, sed cosinus arcus majoris quadrante, *qui metitur* angulum *obtusum*, *est negativus*, *ut* & secans negativa, quod *mutat differentiam positivam respondentem* excessui in *negativam respondentem defectui*.

7. In casu *sextantis*, & *quadrantis* dimidium nunquam est majus gradibus 45, vel eam mensuram parum admodum *superat*, ubi adduntur gradus aliquot citra zero, & ultra 60, vel 90. Id autem efficit, ut theorema sit in iis semper proxime verum, atque *id sive* assumatur dimidium arcus majoris, sive dimidium mi*noris*, *quorum* dimidiorum cosinus, & secantes differunt inter se per differentias exiguas, ubi *agitur* de arcubus non parum distantibus a quadrante. *At in his exigua differentia* mutua potest inducere *differentiam cosinuum* ingentem *respectu cosinus utriuslibet*, *qui est exiguus etiam ipse*, & *prope quadrantem secantes* excrescunt in *infinitum ita*, *ut exiguis differentiis* arcuum pos*sit respondere differentia secantium* immensa. Prope quadrantem *angulus* ACD accedit ad rectum etiam ipse, & *considerando* arcus AC, AD pro rectis lineis, & angulum ADC pro recto, negliguntur quantitates ejusdem ordinis cum iis, quæ retinentur pro determinatione rationis quæsitæ : differentia CD evadit ordinis inferioris respectu arcuum AC, AD, qui accedunt ibi ad rationem æqualitatis ultra quoscumque limites. Sed hic casus, ut innui, e*vitatur*, ubi agitur de arcubus AB, CB vel minoribus quadrante, *vel non nisi* paullo majoribus, quorum dimidia longe distant a quadrante, *prope* quem oritur *ille* defectus formularum. Hoc autem *accidit omnibus ejusmodi methodis differentialibus*, quæ prope quædam puncta *possunt inducere in* errores etiam infinitos, si theoremata ipsarum ope eruta pro casibus generalibus adhibean-

tur prope ea puncta ita, uti exprimuntur. *Unus ex iis casibus* habetur, ubi parum distat a quadrante arcus, cujus inducitur co sinus, qui ibi decrescit in infinitum, vel tangens, & secans, quæ in infinitum augentur: potest id ipsum accidere etiam, ubi is arcus ipse est exiguus. Sed ut innui, nullum hìc habetur ejusmodi periculum, & potest adhiberi cosinus, *ac secans arcus* vel majoris, vel minoris ex iis binis, dummodo arcus ipsi non sint ita exigui, ut eorum differentia non sit exigua respectu eorundem.

8. In arcubus, *qui hìc possunt occurrere*, secunda ratio radii ad secantem est *multo aptior*. *Satis est multiplicare differentiam* chordarum inventam per excessum *secantis supra radium*, & *addere productum* ei ipsi *differentiæ* ad *habendam differentiam* arcuum quæsitam. Porro is excessus incurrit statim in oculos inspicienti tabulas sinuum, dempta prima unitate, quæ radium exprimens occurrit sola in arcubus minoribus gradibus 60. Cum autem differentia chordarum, quæ in arcubus instrumenti verificandi proximè æqualibus potest occurrere, debeat esse admodum exigua; ea multiplicatio evadit expeditissima, atque id eo magis, quod in excessu secantis supra radium, sit satis in iis arcubus pro prima illa unitate ponere zero. Satis autem erit assumere in eo excessu partes radii tantummodo centesimas, vel ad summum millesimas, quod ipsum reducet ad notas ad summum tres, & cito ad duas, vel etiam ad unicam, eo penitus neglecto in arcubus minoribus. Pro dimidio arcus graduum $30 = 15$, jam is excessus est tantummodo 0,035, pro $7^{o}.\frac{1}{2}$ dimidio arcus 15° is non pertingit ad 0,009.

9. *Theor. 2. Si duo radii sint inæquales cum differentia exigua respectu rectæ jungentis eorum extrema puncta, quæ recta hìc appellabitur chorda observata, & hæc comparetur cum chorda arcus intercepti inter eorum radiorum directiones in circulo habente pro suo radio majorem ex iis binis radiis, quæ dicatur chorda reducta; excessus radii majoris supra minorem erit ad differentiam earum chordarum, quæ erit excessus reductæ supra observatam, ut est sinus totus ad sinum dimidii ejusdem arcus intercepti.*

10. Sint enim (fig. 2) ii radii CB, CD, quorum posterior pro-

ductus occurrat in A arcui circuli habentis pro suo radio priorem; chorda observata erit BD, vera BA, angulus autem DBA erit exiguus ob differentiam AD æqualem ei differentiæ radiorum exiguam respectu chordæ utriusque. Hinc arcus DE circuli habentis B pro centro, qui abscindet differentiam chordarum AE, haberi poterit pro recta perpendiculari ad chordam BA. Hæc autem debet cadere intra angulum DAB, qui in triangulo CAB semper isoscelio erit semper acutus, adeoque ea differentia erit excessus chordæ reductæ supra observatam. *Deinde si recta CF sit perpendicularis ipsi chordæ BA, quam secabit bifariam; erit AF sinus dimidii arcus AB*, & *ratio radii CA* ad ipsam AF erit ratio, quam habet sinus *totus ad sinum dimidii* ejus arcus, quæ cum *sit ratio* excessus AD radii CB supra *radium CD* ad excessum AE chordæ veræ supra observatam: sic patet quidquid fuerat propositum.

11. *Scholium*. Hic itidem nulla difficultas haberi poterit in applicatione *hujus* theorematis differentialis ad casus, qui possunt occurrere in hujusmodi verificationibus, cum ex una parte dimidium arcus AB debeat *distare multum a quadrante*, & ex alia supponatur *differentia AD binorum* arcuum ita *exigua* respectu *chordarum earundem*, *ut angulus ABD* evadat exiguus, *nec* angulus CAB possit ita accedere ad rectum, *ut sinus-versus* arcus DE, qui negligitur *accipiendo* ipsum arcum pro suo sinu re ipsa rectilineo, & perpendiculari ad chordam BA, non debeat esse perquam exiguus respectu differentiæ AE, respectu cujus negligitur.

12. *Cor.* 1. *Si pro chorda reducta assumatur chorda arcus determinati a productione binorum terminatorum ad bina puncta divisionis limbi in circulo habente radium paullo majorem utroque ex iis, & is circulus, ac ejus radius dicantur circulus, & radius reductionis; excessus chordæ reductæ supra observatam conjungentem ea divisionum puncta habebitur multiplicando summam excessuum radii reductionis supra eos radios per sinum dimidii ejusdem arcus.*

13. Si enim (fig. 3.) *ii radii minores sint* CD, CG, qui producti occurrant in A, & B, circulo habenti pro radio reductionis

CA,

CA, & *CB*, & concipiatur recta DB, ac *centro D*. arcus GH *terminatus* ad hanc, & centro B arcus DE terminatus ad chordam BA; erit BH excessus rectæ BD supra chordam observatam DG, & AE excessus chordæ reductæ AB supra eandem rectam BD. Quare summa ipsorum excessuum BH, AE erit excessus chordæ reductæ AB supra observatam *DG*. *Porro* ex hoc theoremate erit tam BG ad BH, quam *AD* ad AE in *eadem* ratione sinus totius ad sinum *dimidii* arcus AB. Quare habebitur summa ipsarum *lineolarum BH*, *AE*, *quæ est excessus chordæ reductæ supra observatam*, *multiplicando summam excessuum* BG, *AD* radii reductionis supra *radios terminatos ad bina puncta G*, *D per* sinum dimidii arcus AB *intercepti inter horum productiones*, quod *productum exhibebit* excessum chordæ reductæ supra observatam, uti fuerat propositum.

14. *Cor.* 2. Si comparandi sint inter se per differentias chordarum bini arcus circuli reductionis, etiam non contigui, quorum radii terminati ad puncta divisionum sint omnes inter se diversi, poterit assumi pro radio reductionis maximus ex omnibus *radiis* terminatis ad *omnia divisionum puncta*, & *inveniri* differentia, quam *habebunt* a *se invicem binæ chordæ illorum arcuum* reductorum ad *hunc circulum*, & differentia ipsorum arcuum *methodo* sequenti.

15. In primis comparando eos radios inter se methodo Opusculi *I*, invenietur excessus radii reductionis supra singulos ex iis quatuor, qui erit $= 0$, si ipse ille radius omnium maximus fuerit unus ex iis quatuor. Dicantur ii excessus pro radiis arcus primi a, & b, & pro radiis arcus secundi a', & b'. Deinde determinetur in iisdem particulis excessus primæ chordæ observatæ supra secundam d, qui erit defectus, si ea prima chorda fuerit minor secundâ, valore d eo casu evadente negativo; chorda prima observata dicatur c, & dimidium arcus utriuslibet m. Chorda secunda observata erit $c - d$: chorda prima reducta erit $c + (a + b) \sin . m$, secunda $c - d + (a' + b') \sin . m$. Hinc excessus primæ chordæ reductæ supra secundam erit $d + (a + b - a' - b') \sin . m$.

16. In-

16. Invenietur excessus primi arcus supra secundum per theorema 1, dividendo hunc valorem per $cos.m$, vel multiplicando illum per $sec.m$: poterit autem adhiberi pro primo termino ea multiplicatio, & pro secundo ea divisio: hac autem adhibitâ, obvenit $\frac{sin.m}{cos.m}$, qui valor ex formulis trigonometricis est $= tan.m$. Quare excessus primi arcus supra secundum erit $d\,sec.m + (a+b-a'-b')\,tan.m$, qui evadet defectus, si is valor evaserit negativus.

17. *Scholium*. Inde oritur pro differentia arcuum, quæ demum quærebatur, sequens regula, in qua habetur ratio non solius tantummodo inæqualitatis chordarum, sed etiam inæqualitatis radiorum pertingentium ad puncta divisionis. *Pro habendo excessu primi e duobus arcubus comparatis per suas chordas supra secundum, excessus primæ chordæ supra secundam multiplicetur per secantem dimidii arcus: fiat tam summa excessuum radii maximi omnium exhibitorum ab instrumento supra radios arcus primi, quam summa excessuum supra radios arcus secundi: subtrahatur summa posterior a priore: residuum multiplicetur per tangentem ejusdem dimidii arcus: summa horum binorum productorum erit quæsitus excessus arcus primi supra secundum.*

18. Patet ex hac regula, & e formulis, rem totam peragi per solas differentias chordarum, & radiorum, quæ solæ debeant haberi accuratæ, & quidem relate ad scalam quamcumque, quæ exhibere possit particulas perquam exiguas, independenter a valore accurato cujusvis chordæ, vel radii, dummodo habeatur relatio particularum scalæ ipsius ad valorem arcus non ita nimis exigui insculpti in instrumento, utcumque non prorsus exacti, ut minutorum 10, vel 5, cujus arcus error exiguus respectu totius, inducet in numerum exiguum particularum, quæ habentur in iis differentiis, errorem exiguum respectu ipsius totius exigui, adeoque penitus contemnendum. Ea scala habetur per numerum integrarum revolutionum cochleæ micrometri, & partium unius revolutionis.

19. Methodus determinandi eas differentias pro chordis habetur

in

in *Opusculo I*, *habetur ibidem* methodus *comparandi radium*, qui *ibi inventus est* constans, cum chorda arcus graduum *60*: pro chordis methodus *hic* est eadem, & eodem modo *hic* comparari possunt omnes radii inter se, quo ibi ille constans, cum ea chorda: quoniam *hic* supponuntur omnes *divisiones factæ* per puncula, possunt omnia fieri accuratius, *cum lineola ducta in* superficie laminæ vitreæ multo accuratius adducatur ad *positionem*, in qua ea tegat fere totam diametrum circelli visi pro puncto per microscopium ita, *ut extent hinc*, & *inde duo segmenta* æqualia. Si haberetur *hic etiam*, *ut in quadrante*, *cylindrulus in centro*, circa quem circumducatur *alidada*; *comparatio radiorum terminatorum* ad punctula *fieret multo facilius*: *satis esset adnectere ipsi alidadæ unicam machinulam habentem lamellam vitream mobilem ope cochleæ*: *adductâ alidadâ* ad positionem primi puncti adduceretur lineola ad ejus centrum: tum ipsâ alidadâ adductâ ad omnia sequentia punctula, haberetur per micrometrum differentia ejus primi radii a sequentibus omnibus.

20. Proposuimus num. 14, ut assumatur pro radio reductionis radius omnium *maximus*, *ut nimirum in exprimenda* regula adhiberetur *pro differentia* vox excessus, *sine alternatione positivorum*, & *negativorum*, *excessuum*, & defectuum, *ubi radius posterior* est *major priore*: verum patet, rem æque perfici, si assumatur pro radio reductionis quicumque e radiis, ut primus ex iis, ad quos *alidada sit adducta*, adhibitis defectibus cum signo negativo. Posset etiam initio amandari ope micrometri lineola ad distantiam aliquanto majorem ea, quæ possit supponi in radiis parum utique discrepantibus a se invicem. Tum differentia numeri notati a micrometro pro ea positione a numero notato pro quovis alio radio exhiberet semper immediate excessum sine ulla permixtione negativorum.

21. Sed nec esset necessarium adhibere radium quempiam reductionis communem pro *omnibus binariis* arcuum *comparandorum*: posset assumi quivis e quatuor radiis *pertinentibus* ad ipsos: habebitur enim differentia *angulorum subtensorum* in centro, pro quorum mensura potest considerari arcus circuli cujusvis: valor

par-

particularum micrometri desumitur a numero ipsarum respondente arcui circuli cujusdam determinati, sed pro hoc assumi potest, ut diximus, arcus quivis ex iis, qui habentur in ipso instrumento, utcumque non nihil erroneus, cum ejus erroris effectus dispareat in valore exigui numeri, qui habetur in exiguis differentiis, atque id eo magis, quod pro eruendo valore ipsarum particularum assumi possunt plures arcus determinati a pluribus binariis punctorum exhibentibus arcum ejusdem numeri minutorum, quorum errores se maxima ex parte compensabunt, assumpto valore medio. *Porro adhibendo pro radio reductionis unum ex illis quatuor radiis, non adhibentur in singulis ex iis calculis numericis, nisi tres tantummodo excessus*. Ubi autem comparantur inter se bini arcus contigui, quod fit semper in *bissectionibus*, & sæpe etiam, vel quandoque, in trisectionibus, & divisione arcus cujuscumque graduum quinque in gradus singulos, non occurrunt, nisi tres radii, adeoque assumpto pro radio reductionis *intermedio ex iis tribus*, non occurrunt adhibendi nisi duo excessus.

22. Verum *pro divisione arcuum graduum quinque in gradus singulos negligenda erit omnino inæqualitas radiorum, si sit exigua, ut esse debet; nam tangens dimidii gradus*, per quam debet multiplicari $a + b - a' - b'$, non est, nisi 0,009: etiam pro *bissectione* arcuum 10 in arcus 5° tangens arcus 2°. 30' dimidii *hujus* non est nisi 0,043: addenda est *consideratio* valoris multiplicandi, qui componitur e positivis, & negativis, quæ erunt vere negativa, si pro radio reductionis assumatur radius major iis omnibus, qui occurrunt adhibendi, vel maximus eorum. In primo casu si assumeretur radius non parum excedens omnes exhibitos ab instrumento, obvenirent excessus a, b, a', b' non ita parvi, sed tunc ii essent veri excessus, adeoque positivi, & valor $a + b - a' - b'$ minueretur ab oppositione signorum. Hinc ibi etiam videtur contemni posse secundus terminus formulæ. Cum autem in iis excessus *secantis supra radium sit adhuc minor*, quam 0,001 multo magis negligi *poterit hæc additio facienda* differentiæ chordarum multiplicandæ per secantem, adeoque ibi jam adhiberi omnino

omnino poterit sola differentia chordarum *observatarum pro* differentia *arcuum*.

23. Inventâ *differentiâ* arcuum, procedebatur hìc *etiam*, ut in *Opusculo* I, ad determinationem erroris tam derivati, *quam* proprii arcuum quorumcumque. Error *totius divisus* per numerum *partium* est error derivatus singularum *ex ipsis partibus*, nimirum *is*, qui esset ipsarum error, si *omnes* essent æquales. Invento errore arcus graduum *60* per comparationem ejus chordæ observatæ cum radio *reductionis*, & *radiorum ipsius observatorum* cum eodem, *non occurrit usque ad gradus singulos*, *nisi divisio ipsius* in duos = 30, tum *horum singulorum in duos* = *15*, horum in tres = 5, horum in quinque *graduum singulorum*, adeoque in *hisce casibus assumendum est pro* errore derivato dimidium, iterum *dimidium*, tum triens, ac demum pars quinta erroris sui arcus totius. Pro errore proprio, qui oritur ex inæquali divisione partium, ibi assumebatur excessus partis primæ supra quamcunque e reliquis, & pro errore ejusdem partis primæ assumebatur *omnium* ejusmodi excessuum summa *divisa per* numerum partium, tum pro quavis alia *parte demebatur ab errore partis primæ* excessus *hujus supra eam partem*. *In hoc Opusculo pro habendo* immediate *errore partis cujusvis adhibebatur eadem regula*, assumendo summam excessuum *ipsius supra* omnes reliquas, & pro errore partis alterius *cujusvis* demebatur excessus illius *ejusdem* supra hanc aliam: demonstratio expeditissima habetur ibi numero 18. Si ea regula hìc adhibeatur, habetur immediate error partis cujusvis etiam intermediæ, sed res eodem redit, & nihil refert, utro modo fiat calculus.

24. In eo sextante, pro quo hæc investigatio fuerat instituta, habebatur etiam subdivisio singulorum graduum in dena minuta per punctula: quamobrem ibi habebatur altera subdivisio singulorum graduum in 30', & horum in 10', cum errore *totius* subdiviso adhuc primum in partes duas, tum *in tres* ad habendum errorem derivatum *partium singularum*. Quoniam quævis pars divisionis postremæ *habet participationem singulorum* errorum totalium pertinentium ad unam e singulis magnitudinum præcedentium,

vide-

videtur *primo aspectu* posse timeri augmentum *justo majus in o*mnium ejusmodi terminorum summa. Ad amovendum eum timorem, & subjiciendum progressum omnem ejusmodi errorum ita, ut videri posset unico aspectu, proposita fuerat in hoc Opusculo, cujus compendium hic exhibetur, sequens tabula, in qua errores proprii pro arcu *totali* graduum 60, & arcubus provenientibus ex divisionibus, & subdivisionibus 30°, 15°, 5°, 1°, 30', 10' appellantur p, q, r, s, t, u, x. In prima columna habentur magnitudines arcuum, tum e regione singulorum error totalis compositus e derivato, & proprio.

60°	p
30	$\frac{1}{2}p + q$
15	$\frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q + r$
5	$\frac{1}{12}p + \frac{1}{6}q + \frac{1}{3}r + s$
1	$\frac{1}{60}p + \frac{1}{30}q + \frac{1}{15}r + \frac{1}{5}s + t$
30'	$\frac{1}{120}p + \frac{1}{60}q + \frac{1}{30}r + \frac{1}{10}s + \frac{1}{2}t + u$
10	$\frac{1}{360}p + \frac{1}{180}q + \frac{1}{90}r + \frac{1}{30}s + \frac{1}{6}t + \frac{1}{3}u + x$.

25. *Si in determinatione singulorum ex iis erroribus deveniretur ad præcisionem particulæ cujusvis; summa terminorum omnium efformantium errorem derivatum, qui præcedunt postremum proprium, & in postrema linea sunt sex, adhuc vix excederet dimidium* unius ejus particulæ. Si enim reducantur singuli coefficientes fractionarii ad eundem denominatorem 360, summa omnium numeratorum non erit *nisi* 1 + 2 + 4 + 12 + 60 + 120 = 199, quæ vix superat 180 dimidium numeratoris.

26. Inventis erroribus totalibus partium singularum, facile efformatur tabula errorum pertinentium ad arcus totales, qui incipiunt a zero usque ad quodvis e punctis notatis in limbo. In ipso Opusculo primo habetur ordo servandus in progressu calculi usque ad arcus continentes gradus integros, & ostenditur, quam parum accumulentur *errores*, servato eo ordine, qui evaderent 59, si usque ad eum *terminum fieret summa errorum* pertinentium ad gradus singulos. Is ordo poscit, ut digestis in prima columna o-

mnibus numeris a zero usque ad 60°, adscribatur in *secunda* prius *huic error suus* : pro 30°, suus totalis erutus e secunda *linea* : itidem pro 15°, 5°, 1°, 30', 10' suus erutus e singulis sequentibus numeris : pro 45° suus pertinens ad suum 15, additus ei, qui habebatur respondens arcui 30. Pro 10, 20, 35, 50, qui arcus componuntur addito 5 arcubus 5, 15, 30, 45, qui *jam habebantur*, apponetur summa errorum horum arcuum, & sui graduum 5 *adjecti* : at pro 25, & 55, qui respondent divisionibus in partes tres, & componi possunt demendo 5 a gradibus 30, & 60, *demendus est* error sui 5 ab errore 30, & 60. *Ita habebuntur jam omnes errores* arcuum compositorum e *quinque gradibus*. *Horum singulis accedent errores primi, tum primi, & secundi ex intermediis, qui addi debent arcubus præcedentibus ad eos* efformandos, ac ab *errore* sequentis demendus erit error tertii, & quarti, vel solius quarti ab errore arcus sequentis, a quo ii arcus auferri debent ad efformandos præcedentes. Eadem est ratio ordinis pro arcubus *continentibus* gradus, & minuta.

27. Patet sane, quam eo pacto minuatur errorum accumulatio. Accedit autem eorum *elisio mutua*, quæ occurret utique semper ob errores negativos permixtos *positivis*, *quæ permixtio* semper occurrit. *Si* examen instituatur diligenter cum *bono micrometro*, & microscopio, invenietur consensus ingens, verificatione repetitâ, quod ego ipse expertus sum.

OPU-

OPUSCULUM IX.

Problema pertinens ad excentricitatem in circulo verticali, circa cujus axem horizontalem convertatur telescopium meridianum.

1. IN astronomicis speculis adhiberi solet ubique instrumentum appellatum a Gallis *Instrument des passages*, quod idcirco in uno e præcedentibus Opusculis appellavi *Instrumentum transituum*, de cujus verificatione agetur in Opusculo XI. In eo circa axem horizontalem perpendicularem plano meridiani convertitur telescopium: ejus usus præcipuus, & plerumque unicus est determinatio momenti, in quo astrum quodcumque transit per meridianum, quod ipsi instrumento nomen dedit, & ad eum usum sufficit unicum filum tensum in directione perpendiculari ad filum horizontale in eo foco, in quo habetur imago objecti: appulsus astri ad id filum determinat momentum ejus transitus: filum horizontale haberet usum ad determinandam distantiam a zenith, vel altitudinem supra horizontem: ea determinatio simultanea addita momento ejus transitus esset admodum utilis, quia per eam unicam observationem haberetur completa determinatio loci astri in sphæra cælesti. Momentum transitus comparatum cum appulsu vel solis, vel astri cujuspiam, cujus nota sit ascensio recta, exhiberet ascensionem rectam illius prioris, dum via astri congruens cum filo horizontali in instrumento bene rectificato ad eum usum exhiberet declinationem ipsius. Sed ad habendam ejusmodi determinationem satis accuratam oporteret habere saltem semicirculum radii satis magni collocatum in plano meridiani, cujus centrum esset collocatum accurate in ipso axe conversionis, index affixus ipsi axi methodis, quæ adhibentur pro quadrante murali, nimirum ope nonii, & micrometri, quod ibi etiam aptari posset, exhiberet accuratas distantias a zenith, vel altitudines supra horizontem.

2. Sed

2. *Sed cum fere semper id instrumentum adhiberi soleat* unice *pro accurata determinatione momenti* ejus transitus, solet addi tantummodo ad latus telescopii semicirculus exigui radii, qui tantum crasso modo exhibeat ipsas altitudines supra horizontem, ut dirigi possit telescopium in eam cæli plagam, quæ efficiat, ut astrum, cujus transitus expectatur *observandus*, *potissimum si* debeat observari per diem, debeat *ingredi*. campum *telescopii*, & appellere ad illud filum verticale, quod ejus transitum exhibeat. Verum vidi *ego quidem in quodam observatorio circulum* integrum *satis magnum affixum ad latus telescopii catadioptrici* satis magni, qui erat *satis idoneus ad habendas accuratas ejusmodi determinationes*, & *ingens numerus observationum fuerat institutus ejus ope*, ac in *ingentem catalogum* redactus, in quo *præter momentum* ipsum transitus fuerat adnotatum punctum peripheriæ ejus circuli, ex quo deduci potuisset determinatio completa loci ejus astri pro momento transitus, si centrum ipsum circuli fuisset accurate congruens cum eodem conversionis axe. Sed quoniam ea additio fuerat *facta* instrumento jam collocato, & firmiter adnexo *axi ipsi*, ac axe *crassiore* suis fulcris, centrum *illud aberrabat* ab *ea positione non quidem plurimum*, sed *per distantiam adeo sensibilem*, ut omnes eæ determinationes factæ per eum indicem in eo circulo deberent remanere inutiles, nec vero ullus earum usus fuerat factus jam a pluribus annis, a *quibus* perpetuo relatæ fuerant in eum catalogum eædem observationes.

3. Hinc ego quidem cogitavi de modo reddendi utilem tantam accuratissimarum observationum multitudinem jam ibi institutarum: exhibebo hic plures methodos, quibus id ibi obtineri poterat, cum possint esse utiles pro aliis ejusmodi casibus, qui possint occurrere, pertineat autem id argumentum ad seriem eorum, quæ in hoc Volumine persequor, nimirum verificationis instrumentorum astronomicorum, cujus ope cognitis eorum erroribus vel corrigi possint ipsi eorum errores, si *pertineant* ad solam erroneam collocationem, vel *possint haberi* effectus producti ab iis erroribus ita, ut habitâ eorum ratione obtineantur observationes

accu-

accuratæ, utut erroneis instrumentis peractæ. Illud autem hic præstabo, ut cognosci possit ejus circuli excentricitas; sive distantia ejus centri ab axe conversionis, & directio excentricitatis ipsius, quibus cognitis invenietur facile quantitas erroris inducti ab ea excentricitate in angulos ope ejusmodi instrumenti determinatos.

4. Prima methodus determinandi quantitatem, & directionem excentricitatis supponet, peripheriam, quæ habet divisiones, esse ductus accurate circularis, & divisiones esse accuratas, & quidem ejus forma videbatur admodum regularis, ductu peripheriæ ita nitido, ut satis appareret, delineatam fuisse unico ductu circini habentis binas cuspides perpendiculares virgæ cuipiam, & earum alteram fixam in dato puncto. Verum exhibebo etiam methodum inquirendi in id ipsum, & si forma aberret a circulari, determinando quantitatem ejus erroris in punctis divisionum singularum, quantum nimirum ea distent a peripheria circuli transeuntis per tria ejusmodi puncta, ac indicabo rationem inquirendi in errores divisionum ipsarum, si qui habeantur, conformem methodis, quæ habentur in præcedentibus Opusculis, unde orietur secunda methodus.

5. Pendet illa prior a solutione problematis prorsus elementaris, quod pro constructione geometrica indiget unica propositione Euclidea. Dentur (Tab. VI fig. 4) in circulo ABB', arcus AB, AB' cum angulis ADB, ADB' terminatis ad quoddam aliud punctum D, ac quæratur magnitudo, & positio excentricitatis CD.

6. Constructio prorsus expedita pendet a solutione problematis Euclidei, quo quæritur segmentum circuli insistens chordæ datæ, quod contineat angulum æqualem dato. Si ducantur chordæ AB, AB', & ducantur segmenta circulorum insistentium iis ipsis chordis, quorum singula contineant angulos æquales datis, illud angulo ADB, hoc angulo ADB'; concursus eorum segmentorum in D determinabit quæsitum punctum. Sed hic agitur de applicando calculo numerico, qui est necessarius ad usum præsentem.

7. Ad eam applicationem adhibebimus tres formulas trigonometricas notissimas I. $sin.(a - a') = sin.a\,cos.a' - sin.a'\,cos.a$. II. $cot.a = \frac{cos.a}{sin.a}$. III. $sin.vers.a = 1 - cos.a$. Sit E concur-

cursus rectæ CD productæ ad partes D cum circulo. In casu exposito a figura, qui facile transferetur ad omnes alios casus, duce ipsa formula eruenda per calculum, erit $CAD = ADE - ACE$, ac $CBD = BDE - BCE$, adeoque $CAD + CBD = ADE + BDE - (ACE + BCE) = ADB - ACB$. Cum ii duo anguli dentur, dabitur etiam valor $ADB - ACB$, qui dicatur n, & eodem pacto fiat $ADB' - ACB' = n'$: angulus autem CAD incognitus fiat $= u$, & erit $CBD = n - u$, $CB'D = n' - u$. *Fiat præterea* $ADB = m$, $ADB' = m'$, $ADE = x$, $CA = CB = CB' = 1$, *quo valore absoluto hic non* indigebimus, CD in partibus *ejus unitatis* $= z$: *erit* $CD = z$, $EDB = m - x$, $EDB' = m' - x$.

8. *Est autem* $\sin.ADC = \sin.ADE = \sin.x : \sin.CAD = \sin.u :: CA = 1 : CD = z = \frac{\sin.u}{\sin.x}$, & $CB = 1 : CD = z = \frac{\sin.u}{\sin.x} :: \sin.BDE = \sin.(m - x) = \sin.m\cos.x - \cos.m\sin.x : \sin.CBD = \sin.(n-u) = \sin.n\cos.u - \cos.n\sin.u$. Ob primum terminum $= 1$, erit hic quartus æqualis producto e mediis, nimirum $\sin.n\cos.u - \cos.n\sin.u = \frac{\sin.u\sin.m\cos.x}{\sin.x} - \sin.u\cos.m = \sin.u(\sin.m\cot.x - \cos.m)$. Dividendo hos valores æquales inter se per $\sin.u$, & ponendo $\cot.u$ pro $\frac{\cos.u}{\sin.u}$ habebitur $\sin.n\cot.u - \cos.n = \sin.m\cot.x - \cos.m$, ac demum $\cot.u = \frac{\sin.m\cot.x + \cos.n - \cos.m}{\sin.n}$.

9. Eodem prorsus pacto ponendo ubique B', m', n' pro B, m, n, fiet $\cot.u = \frac{\sin.m'\cot.x + \cos.n' - \cos.m'}{\sin.n'}$. Quare fiet $\sin.n'\sin.m\cot.x + \sin.n'\cos.n - \sin.n'\cos.m = \sin.n\sin.m'\cot.x + \sin.n\cos.n' - \sin.n\cos.m'$, & $\cot.x(\sin.n'\sin.m - \sin.n\sin.m') = \sin.n\cos.n' - \sin.n'\cos.n - \sin.n\cos.m' + \sin.n'\cos.m = \sin.(n - n') - \sin.n\cos.m' + \sin.n'\cos.m$, adeoque demum $\cot.x = \frac{\sin.(n-n') - \sin.n\cos.m' + \sin.n'\cos.m}{\sin.n'\sin.m - \sin.n\sin.m'}$.

10. Si

10. Si excentricitas CD sit exigua; erit exigua differentia angulorum ADB, ADB' ab angulis ACB, ACB', nimirum valor n, & n' erit exiguus, adeoque ipsi anguli assumi poterunt pro eorum sinubus. Tum formula evadet multo simplicior: nam denominator erit $n - n' - n\,cos.m' + n'cos.m = n(1 - cos.m') - n'(1 - cos.m) = n\,sin.vers.m' - n'sin.vers.m$, adeoque

$$cot.x = \frac{n\,sin.vers.m' - n'sin.vers.m}{n'sin.m - n\,sin.m'}.$$

11. Invento valore $x = ADE$, obtinetur u per formulam $cot.u = \frac{sin.m\,cot.x + cos.n - cos.m}{sin.n}$, quæ in casu valoris n exigui, facto $cos.n = 1$, & $1 - cos.m = sin.vers.m$, evadit $\frac{sin.m\,cot.x + sin.vers.m}{sin.n}$, ubi cum etiam valor u sit exiguus, adeoque minus accurate inveniendus per suam cotangentem, posito $\frac{1}{tan.u}$, sive $\frac{1}{u}$ pro $cot.u$, erit $u = \frac{n}{sin.m\,cot.x + sin.vers.m}$: potest autem pro m, & n, adhiberi etiam m', & n'. Inde vero habebitur etiam $CD = z = \frac{sin.u}{sin.x}$, quod exhibet ipsam excentricitatem, cujus ita habebitur magnitudo.

12. Invento angulo $ADE = x$, & angulo $CAD = u$, invenietur angulus $ACE = ADE - CAD = x - u$, adeoque & arcus AE ejus mensura, quo cognito, habetur ipsum punctum E, ad quod excentricitas dirigitur, cum supponatur cognitum punctum A respectu divisionum ejusdem circuli. Hinc habebitur & magnitudo, & directio excentricitatis respectu axis.

13. Cognito puncto E, ad quod dirigitur excentricitas, facile invenietur correctio adhibenda cuivis alteri numero exhibito a divisionibus circuli pro quovis alio puncto A. Habebitur enim arcus AE, qui potest appellari a. Is metitur angulum ad C trianguli ACD, in quo habebitur ratio laterum CA, CD, quæ est 1 ad z, cum angulo intercepto $= a$, adeoque inveniri poterunt bini anguli ad basim AD, quorum alter est angulus CAD quæsitus.

 14. Quo-

14. Quoniam errores supponuntur exigui; poterit immediate erui correctio CAD, cujus sinus est $\frac{CD \times sin.ACD}{AD}$: assumpto pro AD radio AC = 1, *fiet sinus correctionis* CAD = $z\,sin.a$.

15. Ad *applicandam solutionem analyticam problematis propositi cum formulis inde deductis casui, de quo agitur, instrumenti transituum*, oportet videre, quomodo *haberi possint anguli* ACB, ACB', ADB = m, ADB' = m'. Observentur ope *ejus instrumenti appulsus trium fixarum, quarum declinatio sit cognita, ad intersectionem filorum, quæ habentur in foco telescopii exhibente imaginem* objecti, adducto *filo horizontali per motum ipsius instrumenti* ad *singulas*, & *notentur tria puncta A, B, B' exhibita ab indice: habebuntur arcus* AB, AB', *per summas*, vel differentias numerorum indicatorum ab instrumento pro puncto A, & punctis B, B', qui arcus metiuntur angulos ACB, ACB'. Ex declinatione primi astri, ad quod tendit recta DA, collata cum declinationibus secundi, ac tertii, ad quæ tendunt rectæ DB, DB', habebuntur anguli ADB = m, ADB' = m', adeoque etiam ADB − ACB = n, & ADB' − ACB' = n'. Quare eruentur per eas *formulas valores* x, u, z, & *habebitur correctio adhibenda omnibus reliquis punctis, quæ obvenerint in observationibus*.

16. Eadem directio, & magnitudo excentricitatis potest haberi etiam sine ullis observationibus astronomicis *alia methodo*, quæ rem obtineat per formulas æque simplices in hypothesi formæ accurate circularis, & cujus ope inquiri possit in id ipsum, an forma sit accurate talis, & si habeantur errores etiam respectu ejus formæ, possint iidem corrigi. Id fiet per differentias distantiarum, quas habent singula divisionum puncta a centro conversionis. In hypothesi formæ accurate circularis satis sunt puncta tria, ut in priore methodo, cum binis differentiis distantiæ primæ a reliquis binis.

17. Potest utique aptari axi conversionis *regula*, quæ habeat in fine machinulam, *cujus ope filum adnexum laminæ perforatæ* in directione perpendiculari ad rectam, quæ tendit ad centrum vel lamina vitrea habens rectam lineam sibi insculptam in ea directio-

recto-

rectione *poſsit* ope *cochleæ* promoveri versus *axem* ipsum, vel ab *eo removeri*, denotatâ quantitate motus, ut in micrometris, methodo analoga ei, quæ adhibita est in Opusculo V, & indicata in *figura* 5, & 6 Tabulæ IV. Adductâ regulâ, & ipsâ illâ ejus *lineâ* rectâ ad punctum A, & notato numero indicato a micrometro, adducetur eadem regula ad puncta B, B' per eandem conversionem circa eum axem, per quam convertitur telescopium, & si *filum* ipsum non transeat per puncta B, B', motus inductus a cochlea, qui filum ipsum adducet *ad* ea *puncta*, ostendet differentiam *distantiarum DB*, *DB' a distantia DA*.

18. *Ita eæ differentiæ erunt notæ* in partibus indicatis a micrometro: sed *oportebit eas reducere* ad partes radii CA assumpti pro unitate. Ad eam rem oportebit *habere valorem radii* AC in partibus ejusdem micrometri, sed satis erit *habere* eum valorem tantummodo vero proximum. Id autem facile fiet, assumptâ chordâ arcus graduum 60 ope circini constantis virgâ cum binis cuspi*dibus ipsi* perpendiculariter affixis, & translatâ in lineam rectam ductam *in plano* quopiam, cujus valor ope circini communis facile obtinetur *in partibus scalæ cujusvis* partium æqualium, in qua ope *linearum transversalium habeantur particulæ admodum* minutæ. *Si desit ejusmodi circinus*, *facile suppletur ejus defectus*, affigendo ope fili, & ceræ binas *acus bacillo satis* longo etiam ligneo, cujus altera adducatur ad primum punctum ejus *arcus*, altera ad *finem*, *illatâ* vi modicâ, huic posteriori, quæ *facile ita* cedet vi ipsi illatæ, ut distantia ita capta non mutetur in translatione ab instrumento ad id planum, in quo habebuntur bina puncta extrema segmenti ejus lineæ æqualis ei chordæ, quæ debet esse æqualis radio ejusdem circuli, assumpto certo numero particularum ejus scalæ, ut 1000, & translato in eam rectam incipiendo ab altero *extremo*, invenietur, quot ejusmodi *intervalla* integra contineantur in ea *recta*: ac postremum residuum translatum eodem circino in *eandem scalam complebit* numerum earundem particularum contentum in *ipso radio*: *poterit autem* ante applicationem ejus micrometri ad *illam regulam id ipsum comparari* cum eadem scala, & determinari numerus particularum ipsius respondens dato cui-

V 2 piam

piam *numero particularum ipsius* : ope *horum numerorum* facile reducetur quivis numerus particularum scalæ ad numerum particularum radii assumpti pro unitate.

19. Sit enim numerus particularum scalæ inventus in radio $= a$, numerus particularum ipsius scalæ comparatus cum micrometro $= b$, numerus particularum micrometri ei respondens $= c$, numerus alius quivis particularum scalæ, ut is, qui obvenerit pro differentia rectarum CA, DA, $= d$: erit primo ut b ad c, ita a ad $\frac{ac}{b}$, *qui erit numerus particularum micrometri contentus in radio*: tum ut hìc numerus ad d, *ita* 1 *ad* $\frac{bd}{ac}$, *qui erit numerus particularum ejus unitatis contentus in differentia illa* d. Quamobrem *si logarithmo constanti* valoris $\frac{b}{ac}$ addatur semper logarithmus valoris d inventi in quavis differentia, obtinebitur valor differentiæ ipsius redactus ad unitatem æqualem radio.

20. Si ageretur de constructione geometrica, datis punctis A, B, C, & differentia rectæ DA a rectis DB, DB'; statim incurrit in oculos, quo pacto *obtineri posset punctum* D per intersectionem *binarum hyperbolarum*, quarum *utraque haberet alterum* e *focis in* A, & *alterum* earum prior in B, cum axe *æquali differentiæ* priori, *posterior focum alterum* in B', cum axe æquali differentiæ posteriori: constat enim, habitis focis, & axe, haberi *hyperbolam*: *calculus* etiam algebraicus facile applicaretur; sed oporteret habere valores admodum accuratos & radii AC, & magnitudinis, ac positionis chordarum AB, AB', præter valorem illarum differentiarum: perquam exigui errores illorum valorum inducerent errorem ingentem in valorem exiguæ excentricitatis CD, & ejus positionis. Verum hìc omnia, quæ ad hunc usum requiruntur, fient per eas solas differentias accuratas, cognito valore arcuum AB, AB', & radii AC, tantum non nimis abludente a vero. Verum superioribus tribus formulis trigonometricis addemus quartam $\cos.(a - a') = \cos.a\cos.a' + \sin.a\sin.a'$.

21. Reductis ad eandem scalam tam radio, quam utrâque differentiâ, fiat earum prior BD — AD $= n$, posterior B'D —

AD

$AD = n'$, concipiantur autem, ut prius, arcus DL, DI, DI' habentes centra in A, B, B'. Cum sit $AD + CL = AC = BC = BD + CI$, erit $CL - CI = BD - AD = n$, & eodem pacto $CL - CI' = B'D - AD = n'$. Si autem fiat $ACB = m$, $ACB' = m'$, ACD, sive $ACE = x$, $CD = z$; erit $DCI = m - x$, $DCI' = m' - x$, $CL = CD \times cos.ACD = z\,cos.x$, $CI = CD \times cos.DCI = z\,cos.(m-x) = z\,cos.m\,cos.x + z\,sin.m\,sin.x$, & eodem pacto $CI' = z\,cos.m'cos.x + z\,sin.m'\,sin.x$. Cumque sit $CL - CI = n$, & $CL - CI' = n'$, habebitur primo $z\,cos.x - z\,cos.m\,cos.x - z\,sin.m\,sin.x = n$, tum $z\,cos.x - z\,cos.m'cos.x - z\,sin.m'sin.x = n'$.

22. Multiplicando primum terminum utriusque æquationis per secundum alterius, habebitur æqualitas productorum, adeoque nova æquatio, in qua omnes termini poterunt dividi per z: ea evadet $n'cos.x - n'cos.m\,cos.x - n'sin.m\,sin.x = n\,cos.x - n\,cos.m'\,cos.x - n\,sin.m'sin.x$; ubi ob $(1 - cos.m) = sin.vers.m$, & $1 - cos.m' = sin.vers.m'$ habebitur $n'cos.x\,sin.vers.m - n'sin.m\,sin.x = n\,cos.x\,sin.vers.m' - n\,sin.m'sin.x$, ac dividendo per $cos.x$, & ponendo $tan.x$ pro $\frac{sin.x}{cos.x}$, erit $n'sin.vers.m - n'sin.m\,tan.x = n\,sin.vers.m' - n\,sin.m'tan.x$, & $tan.x = \frac{n\,sin.vers.m' - n'sin.vers.m}{n\,sin.m' - n'sin.m}$.

23. Invento angulo x per suam tangentem, habebitur per primam e binis æquationibus finalibus numeri 21 $CD = z = \frac{n}{cos.x - cos.m\,cos.x - sin.m\,sin.x}$, vel per secundam idem valor positis m', & n' pro m, & n. Quare habebitur & magnitudo excentricitatis z in partibus radii AC assumpti pro unitate, & punctum E peripheriæ, ad quod ipsa dirigitur. Tum vero pro quovis alio novo puncto A habebitur arcus AE, & prorsus, ut num. 13, angulus CAD, vel ex data ratione laterum CA, CD 1 ad z, & angulo intercepto ACD, cujus mensura est is ipse arcus AE, vel multo facilius immediate e valore ejus sinus $\frac{CD \times sin.ACD}{AD}$, assum-

assumpto, *ut ibi*, AC $= 1$, pro AD ob *exiguitatem rectæ* CD. *Facto* enim novo angulo ACE jam dato $= a$, & *correctione* quæsita CAD $= u$, fiet *sin.* $u = z$ *sin.* a: ea in casu exhibito a figura erit addenda valori a, & in singulis aliis casibus facile ex ipso valore *formulæ*, & consideratione transformationis locorum geometricorum invenietur numerus *substituendus numero* notato ab indice in observatione quavis pro *illo novo puncto A*.

24. Ope illius regulæ, ope *cujus* determinata est differentia primæ *distantiæ* DA *a reliquis binis* DB, DB', *potest etiam inquiri in errores formæ circularis, si qui habentur. Invenietur* enim differentia rectæ DA a nova *DB*. *Si rectæ* CA, *CB sunt* æquales; debebit ea eadem esse *differentia rectæ CL semel inventæ a recta CI inventa pro* quovis *novo* arcu EB $= a$. *Si* eæ *binæ differentiæ non sint* æquales; ipsarum discrimen erit distantia puncti B a peripheria circuli descripti centro C radio CA. Sit CA $= z$ *cos.* x semel inventa $= r$, CI inventa pro quovis arcu EB $= a$ sit $= r'$, novus excessus novæ rectæ DB, supra DA sit novus valor n: erit AL $=$ AD $= 1 - r$, IB $=$ DB $= 1 - r + n$, CB $=$ CI $+$ *IB* $= 1 - r + n + r'$. Quare ejus *excessus supra radium* CA $= 1$ *erit* $n + r' - r$, quæ erit *distantia puncti B a peripheria circuli descripti radio* CA, *atque* id punctum jacebit *ultra* eam peripheriam, vel citra; prout is valor obvenerit positivus, vel negativus.

25. *Habitis hisce* differentiis jam poterit ope ejusdem regulæ rite aptatæ haberi rectificatio etiam divisionum ejus circuli immoti in loco, in quo is fuerit semel immobiliter collocatus, quanquam ejus usus in positione verticali erit magis incommodus. Eodem modo, quo in Opusculo primo possunt haberi differentiæ chordarum: ex iis ope formularum Opusculi VIII, quæ complectuntur simul differentias & chordarum, & radiorum, habebuntur differentiæ arcuum. Non poterit haberi error absolutus chordæ arcus graduum 60 per ipsius comparationem cum radio, cum non habeatur centrum ejus *fasciæ circularis*, & *impedito loco* centri ab axe instrumenti, *non* potest haberi ne diameter quidem satis accurata per ejusmodi regulam, nec vero per circinum efformatum

e vir-

e virga habente binas cuspides, nisi hæ cuspides sint nimis longæ, quarum ope diameter transferatur in planum quodpiam, ac secetur bifariam, ut comparentur per regulam illam bina dimidia primum inter se, tum eorum alterum cum chorda graduum 60. Verum possunt comparari inter se chordæ trium arcuum graduum 120, vel potius quatuor graduum 90. Inventâ per eas formulas differentiâ arcuum, summa trium excessuum arcus maximi supra tres reliquos divisa per 4 exhibebit ejus excessum supra valorem ipsi debitum, qui erit error ipsius positivus, ex quo pro subdivisionibus eruetur error derivatus conjungendus cum proprio juxta methodum expositam in ipsis Opusculis I, & VIII.

26. Per differentias radiorum computatorum ab ipso centro conversionis D, independenter a centro C, & ab angulis CAD, CBD potest itidem res confici, obtinendo immediate verificationem angulorum circa ipsum punctum D: Potest adhiberi limbus latior, etiam ligneus continens paullo plus quam 90 gradus, ita perforatus per totam longitudinem sui arcus, ut per aperturam transpici possit limbus ejus circuli ibi, ubi is habet suas divisiones: is potest adnecti vel axi conversionis per duas regulas pertinentes ad ipsum axem, & connexas cum ipso, atque id ita, ut superficies ipsius obversa limbo non distet ab ipso, nisi per crassitudinem lamellæ vitreæ: debent haberi binæ ejusmodi lamellæ, quarum singulæ habeant singulas rectas lineolas ipsis insculptas. Hæ lamellæ debent interseri inter limbum ligneum apertum, & limbum circuli in directione ad sensum tendente versus axem, nimirum ad sensum perpendiculari ad peripheriam ipsius circuli, possunt autem ita affigi limbo perforato ope ceræ, ut superficies, quæ habet lineolam, contingat limbum ipsum ejus circuli: vi autem illatâ per digitos possit lamella ipsa protrudi non nihil in latus. Adducentur eæ lamellæ ad distantiam proxime æqualem quadranti circuli: tum comparabuntur iidem quatuor quadrantes cum intervallo lineolarum alter post alterum. Comparatio fiet circumagendo ipsum telescopium, & adhibendo cochleam micrometricam, quæ jam haberi debet, ad obtinendas partes adjungendas divisioni præcedenti denotatam ab indice, quæ debent addi pro intervallo in-

ter

ter ipsam, & punctum notatum ab eodem indice in positione, in qua observatio est instituta, vel si non habeatur ejusmodi motus micrometricus, is potest induci, rite aptatâ machinulâ ad id idoneâ. Adducendo ope ejus cochleæ prius lineam lamellæ alterius ad alterum extremum limbi, tum lineam alterius ad alterum extremum, invenietur differentia anguli intercepti inter duos radios illius circuli transeuntes per ipsa puncta extrema terminantia arcum comparatum cum ea distantia lineolarum ab angulo intercepto inter binos radios transeuntes per ipsas lineolas. Factâ ejusmodi comparatione cum singulis quadrantibus, habebuntur comparationes horum inter se, nimirum differentiæ angulorum contentorum inter radios tendentes a centro motus ad eorum extrema puncta; quæ exhibebit errorem proprium singulorum ex iis quadrantibus.

27. Comparatis quadrantibus, poterunt eodem modo comparari singulorum partes, ut tres compositæ e gradibus 30, tum tres singulorum ex his compositæ ex arcubus graduum 10, & ita porro usque ad divisiones postremas. Eo pacto comparatio exhibet immediate differentias angulorum interceptorum in centro motus, sine reductione differentiæ chordarum, & radiorum ad differentiam arcuum.

28. Methodus reddendi utiles omnes observationes jam institutas eo instrumento, & instituendas in posterum, independens ab omnibus perquisitionibus, quas hìc fuse persecuti sumus, & omnium expeditissima esset illa, in qua supposito jam catalogo magni numeri fixarum ordinato, & verificato in aliis observatoriis per instrumenta majora, ac methodos idoneas, ut eas, quæ hìc habentur in præcedentibus Opusculis, fiat comparatio distantiarum a zenith magni numeri fixarum, quæ obtinentur ope ejus instrumenti, cum iis, quæ eruuntur e declinationibus earundem fixarum erutis ex ipsis catalogis, habitâ ratione reductionum, quæ respondent motibus fixarum ipsarum, & refractionibus. Assumpto satis magno numero fixarum, ut habeantur errores divisionum, & positionis ejus circuli, fieri potest per interpolationem catalogus ipsorum errorum saltem pro singulis gradibus dimidii ejus cir-

circuli respondentis semicirculo meridiani extanti supra horizontem, adhibendus ad corrigendas observationes jam institutas, & instituendas in posterum.

29. Verum si ejusmodi circulus aptandus sit instrumento transituum, consilium omnium optimum erit, ut ante applicationem instituatur verificatio tam formæ circularis, quam æqualitatis divisionum, ut si qui errores in eo genere deprehendantur, possit eorum haberi ratio: tum post ejus collocationem determinetur per methodos hic propositas magnitudo, & directio excentricitatis, ex quibus deducuntur correctiones errorum ab ipsa inductorum in angulos ab indice denotatos in divisionibus, quæ supponunt congruentiam centri circuli cum centro conversionis.

APPENDIX
AD OPUSCULUM IX.

Applicatio solutionis analyticæ problematis propositi numero 5 ad alium Astronomiæ usum.

30. CONSTAT nunc quidem post felices Kepleri combinationes motuum observatorum, & immensam numericorum calculorum farraginem, ac multo magis post sublimem cælestis mechanicæ theoriam a Newtono detectam, & evolutam, ac miro omnium observationum consensu, planetarum orbitas esse ellipticas, sole existente in altero cujusvis ellipseos foco, & areis, quas verrit radius vector, proportionalibus tempori, si demantur exiguæ perturbationes, quas inducit mutua planetarum omnium gravitas generalis. Verum ante ea egregia comperta diu eæ orbitæ fuerunt habitæ pro circularibus. Accessit excentricitas, ut nimirum motus quidem esset æquabilis circa centrum circuli, sed sol esset in quadam distantia ab eo centro: tum excentricitate sectâ bifariam, substitutus est etiam motus in circulo, sed non æquabilis: considerata sunt in singularum orbitarum diametro bina puncta æque di-

stantia a centro, in quorum altero esset sol, & circa alterum haberetur motus angularis æquabilis. Ea puncta mutata sunt in binos focos ellipseos, compressâ ipsâ etiam circulari formâ, sed retento motu angulari æquabili circa eum focum superiorem, quæ vocatur hypothesis elliptica simplex, donec tandem deventum est ad æquabilem arearum descriptionem circa solem positum in foco inferiore, quam & observationes, & theoria ita confirmarunt, ut nullum jam de ea dubium supersit, ac ea est non jam hypothesis, sed theoria elliptica cognita vera.

31. Hinc præcedentes hypotheses nullum jam habent usum pro præsenti Astronomia, sed cum pertineant ad ipsius Astronomiæ partem historicam, & ad cognoscendam ipsam humanarum cognitionum seriem, solent in Elementis Astronomiæ tractari illa etiam, quæ pertinent ad earum hypothesium theorias. Problema pertinens ad motum æquabilem in circulo circa punctum positum extra ejus centrum reducitur ad illud ipsum, quod in hoc Opusculo est propositum, de determinanda magnitudine, & directione excentricitatis in circulo, qui habeat divisionem æquabilem, sed in quo præter angulos, quos ea æquabilitas metitur contentos a radiis tendentibus ad id ipsum centrum, habeatur motus æquabilis indicis circa alterum ipsius excentricitatis extremum. Formulæ hìc inventæ applicari possunt ad illius hypotheseos theoriam, quam applicationem idcirco proponam in hac Appendice, adjectâ etiam applicatione ad motum in ellipsi circa focum inferiorem occupatum a sole, cum æquabilitate motus angularis circa superiorem, atque id eo magis, quod in ellipsibus parum excentricis, cujusmodi est orbita Veneris, & vero etiam orbita terrestris, æquabilitas arearum circa focum inferiorem secum trahit motum angularem circa focum superiorem parum abludentem ab æquabili.

32. In hypothesi circulari C est centrum circuli descripti motu æquabili, adeoque centrum motus medii æquabilis, D est centrum motus veri inæqualis, in quo est ipse sol. Eruuntur autem methodo satis cognitâ, quam tamen hìc exponam, anguli ACB, ACB' e tempore elapso a prima e tribus observationibus usque ad secundam, & tertiam, & ex observationibus ipsis eruuntur anguli

guli *ADB*, ADB': in hypothesi autem elliptica simplici punctum D *est* itidem locus solis, circa quem fit motus verus, sed is non fit in circulo ABB', adeoque motus veri non sunt anguli ADB, ADB': motus medius æquabilis fit circa punctum C, sed id est focus superior, nón centrum orbitæ planetariæ: est tamen centrum motus medii æquabilis, cujus mensura sunt arcus circuli *ABB'* habentis ipsum punctum C pro centro: radius ejus circuli est æqualis toti axi transverso ellipseos: puncta *a*, *b*, *b'*, sunt loca planetæ in sua orbita elliptica, & puncta A, B, B' sunt concursus rectarum C*a*, C*b*, C*b'* cum eo circulo; unde fit, ut rectæ D*a*, D*b*, D*b'* sint æquales rectis *a*A, *b*B, *b'*B', cum nimirum summa rectarum C*a*, D*a*, quæ a binis focis C, D ducuntur ad idem punctum perimetri *a*, æquetur axi transverso ellipseos, adeoque radio CA, unde ablatâ communi rectâ C*a*, residua D*a*, *a*A debent esse æqualia: eadem autem est demonstratio æqualitatis rectarum D*b*, *b*B ob summam $Cb + Db$ æqualem radio CB, & $Cb' + Db' = CB'$.

33. Inde autem fit, ut triangula D*a*A, D*b*B, D*b'*B' sint isoscelia, & anguli C*a*D, C*b*D, C*b'*D dupli angulorum CAD, CBD, CB'D. Porro ob angulum $ADE = ACE + CAD$, & $BDE = BCE + CBD$ est $ADB - ACB = CAD + CBD$, & ob angulum $aDE = aCE + CaD$, & $bDE = bCE + CbD$ est $aDb - aCb = CaD + CbD$. Quare cum hæc posterior summa sit dupla illius prioris, differentia posterior angulorum *a*D*b*, *a*C*b* est dupla differentiæ prioris angulorum ADB, ACB, adeoque si detur illa, dabitur & hæc ipsius dimidia. Illa autem dabitur cum *a*D*b* detur ex observationibus, ut jam videbimus, & ACB ex motu æquabili, & tempore elapso inter observationem primam, ac duas reliquas. Eodem autem pacto differentia angulorum *a*D*b'*, *a*C*b'* est dupla differentiæ angulorum ADB', ACB'.

34. Porro angulus ADB in primo casu, & *a*D*b* in secundo habetur ex summa, vel differentia longitudinum heliocentricarum. Si agatur de orbita terræ, eæ longitudines sunt eædem, ac longitudines geocentricæ solis observatæ, additis, vel ablatis sex signis, adeoque ad habendum eum angulum sufficiunt tres observationes

determinantes longitudinem solis observatam e terra tribus momentis quibuscumque: pro reliquis planetis requiruntur observationes factæ in oppositione cum sole, vel in conjunctione. In oppositione, & conjunctione superiore, locus heliocentricus planetæ est idem, ac geocentricus immediate observatus, & in conjunctione inferiore est ipsi oppositus, sive idem auctus, vel imminutus per sex signa. Oppositiones non habentur, nisi in veteribus tribus planetis superioribus, quibus accessit nuper quartus tanto adhuc superior detectus ab Herchelio. Venus, & Mercurius habent binas conjunctiones, alteram inferiorem, & alteram superiorem. Oppositiones facile observantur, & observari solent ab Astronomis: conjunctiones inferiores Veneris, & quidem etiam Mercurii, eruuntur ex observationibus parum remotis anterioribus, & posterioribus, videri autem quandoque possunt ii planetæ in ipsis conjunctionibus per telescopia; adeoque haberi possunt loca heliocentrica idonea ad rem præsentem.

35. Angulus ACB in utroque casu habetur eodem modo. E combinatione observationum remotissimarum habebant Astronomi etiam ante hæc ultima comperta tempus periodicum pro quovis planeta, & factis ut hoc tempus periodicum ad tempus inter binas observationes A, vel *a*, & B, vel *b*, ita gradus 360 ad quartum, is pro tempore minore dimidio tempore periodico erit ipse angulus ACB in primo casu, & *a*C*b* in secundo, & idem habetur pro angulo ACB', vel *a*C*b*'. Si tempus est majus dimidio tempore periodico; angulus fiet ad partes oppositas arcus percursi, & erit residuum ad gradus 360 illius quarti termini inventi. Si id tempus excedat tempus periodicum, demetur hoc quotiescumque licuerit, & si adhuc remaneat plus dimidio, assumetur excessus temporis periodici supra id ipsum residuum, ac obtinebitur angulus ACB, vel *a*C*b*; eodem pacto habebitur angulus ACB', & & *a*C*b*'. Figura est aptata casui, in quo tempus utrumque integrum, vel excessus supra integras conversiones non pertingit ad dimidium temporis periodici, in quo casu uterque angulus respicit arcum descriptum. Præterea in casu, quem figura exprimit, utraque e directionibus loci veri DB, DB', vel D*b*, D*b*', cum dire-

ctio-

ctione DA, vel Da continet angulum obversum eidem arcui, ac is angulus est aDb, vel aDb' major angulo ACB, vel ACB', & punctum D cadit tam intra angulum ACB, quam intra angulum ACB'. Solutio problematis aptata figuris, quæ respondent uni casui, cum formulis inde erutis, transfertur deinde, ut monui, ad omnes alios casus, per regulas generales transformationis locorum geometricorum, habitâ ratione signorum positivorum, & negativorum in datis, & inventis rite aptatorum.

36. Porro in casu expresso a figura redeunt huc omnes formulæ, quas invenimus in solutione analytica problematis numeri 5. Dicatur n excessus anguli ADB' inventi in hypothesi circuli excentrici supra ACB, & in hypothesi elliptica simplici dimidium excessus anguli aDb, supra ACB, ac eodem pacto fiat n' pro prima hypothesi ADB' — ACB', & pro secunda $\frac{1}{2}(a\mathrm{D}b' - a\mathrm{C}b')$: dicatur x angulus ADE, u angulus CAD, z excentricitas CD in partibus radii CA assumpti pro unitate, qui in priore hypothesi est ipse radius circuli descripti, & in posteriore totus axis ellipseos duplus distantiæ mediæ. Habebitur pro x, & u formula numeri 9, vel simplicior altera numeri 10: tum pro u utraque formula numeri 11, & pro excentricitate CD $= z$ valor $\frac{sin.u}{sin.x}$, qui habetur eodem numero 11.

37. Hæc formularum congruentia me impulit ad addendam hanc Appendicem. Per hujusmodi formulas etiam post detectas Kepleri leges potuisset inveniri per tres observationes ellipsis non multum distans a vera, nimirum eruta ex hypothesi parum abludente a vera, qua inventâ facile deinde potuisset fieri transitus ad veram per regulas falsæ positionis methodo analoga ei, quæ est adhibita in Tomo præcedente (Mémoire correlatif III), vel methodo, quæ habebitur in Opusculo X Tomi sequentis.

OPU-

OPUSCULUM V.

DE QUADAM CORRECTIUNCULA SECTORUM ASTRONOMICORUM.

1. PRO *observationibus fixarum parum distantium a zenith adhiberi solent in Astronomia sectores* habentes radium *ingentem* , & *numerum graduum exiguum in limbo* circulari hinc , & *inde a telescopio respondente* radio *tendenti ad medium arcum* . *Ejusmodi instrumento* detectæ *sunt leges aberrationis* annuæ *fixarum* , & id est adhibitum ab iis , qui recentioribus methodis dimensi sunt gradus Meridiani pro determinanda figura , & magnitudine terræ . Ii admodum facile & *suspenduntur* , & convertuntur , quod multo difficilius præsta*retur* , *si adhiberentur* integri quadrantes , vel etiam sextantes habentes radium longitudinis ejusdem . Ego *pro* mensura graduum Meridiani in ditione *Pontificia substitui* arcui circulari *rectam lineam* , *expediendo rem per tangentes angulorum* , quæ *forma mihi evasit admodum* commoda , & plures alii *sectores* ingentis radii constructi sunt postea ad ejus imitationem , ut exposui in Opusculo III Tomi II , *cujus formam* videre est in tabula VII Tomi ejusdem fig. 3 .

2. Exprimit hic figura 5 Tabulæ VI recta CD radium ejus instrumenti , GDH rectam substitutam in limbo arcui P'DQ' circulari , perpendicularem eidem radio , quæ concipitur utrinque producta indefinite in A , & B : ejus segmenta DG , DH sunt tangentes angulorum DCH , DCG . Porro ubi determinandum est punctum brevis rectæ lineæ , in quod cadit perpendiculum ductum e puncto satis remoto , admodum facile erratur nonnihil in ea determinatione . Si enim adhibeantur binæ cuspides affixæ longiori virgæ , vel tubo , quarum altera defigatur in centro C , altera occurrat ei rectæ in binis punctis H , G ; arcus circularis , qui concipiatur descriptus ab hac posteriore cuspide , ita parum pro-

gre-

greditur ultra eam rectam, ubi ea sit brevis, & habet positionem ita obliquam respectu ejusdem rectæ, ut admodum difficulter determinentur ipsa puncta intersectionum G, & H, inter quas assumendum est punctum D in ipso medio, ut dubium supersit de accurata ejus positione. Ubi agitur de mensura graduum Meridiani, adhibendæ sunt fixæ parum distantes a zenith, in quibus & refractionum effectus est multo minor, & distantia exigua multo accuratius determinatur. Hinc pro ejusmodi sectore abunde sunt gradus quatuor hinc, & inde a medio: porro is arcus procurrit ultra tangentem minus quam per partes $\frac{25}{10000}$ radii ipsius, cum secans graduum 4 ad radium 1 non sit nisi 1,00244. Hinc admodum facile fieri posset, ut pro radio CD accurate perpendiculari ad rectam PQ haberetur radius DI nonnihil inclinatus.

3. Eam ob causam censui inquirendum in effectum positionis radii aberrantis a perpendicularitate requisita. In eo casu pro angulis DCH, DCG determinatis a numero particularum radii CD assumpti pro unitate in rectis DH, DG assumpto pro eorum angulorum tangente, haberentur anguli DIH, DIG: determinanda est horum differentia ab illis. Datâ deviatione CDI, id quidem fieri potest pluribus methodis. Res facile expeditur per calculum trigonometricum, sed analysis algebraica exhibebit formulam generalem, & ejus ope indolem, ac variationes aberrationis ipsius: accedit, quod ope formulæ ejusdem inquiri potest in id ipsum, an in dato sectore habeatur ejusmodi aberratio, & quanta ea sit. Quoniam autem determinatio ipsius pro arcu circulari A'DB', est analoga ei, quæ habetur pro limbo rectilineo ADB, addam etiam mutationem, quam inducit in ejus formulam transitus ab ea linea recta ad eum arcum, ut habeatur illa, quæ exhibeat differentiam angulorum DCH', DIH', & DCG', DIG' determinatorum ab iisdem rectis IH, IG incurrentibus in eum arcum in H', & G'. Punctum K est occursus rectæ HC productæ cum eodem circulo, & DM, DN, IE, IL, IO sunt perpendicula ducta in rectas HC, HI, DH, DC, HC.

4. Calculus trigonometricus est admodum expeditus pro limbo recti-

rectilineo *AB*. Assumpto pro unitate radio *CD* = *ID*, rectæ *DH*, *DG* redactæ ad partes ejus radii adhibent immediate per tabulas sinuum angulos DCH, DCG, quorum eæ sunt tangentes. In triangulo autem IDH, vel IDG præter latera ID, DH, vel ID, DG, habitâ deviatione CDI a perpendiculo DC, habetur angulus IDH, vel IDG demptâ ipsa deviatione ab angulo recto pro angulo IDH, & additâ ipsi pro IDG in casu figuræ, in quo deviatio ipsa fit versus DH, remanente DI in angulo CDH. Hinc habebitur angulus *DIH* comparandus cum DCH, vel DIG cum DCG ad habendam eorum differentiam, quæ erit aberratio quæsita anguli determinati per numerum particularum radii *DC*, vel DI assumpti pro unitate contentum in intervallo DH, vel DG, & assumptum pro tangente ejus anguli. Si angulus deviationis CDI fiat $= a$; angulus GDI erit $= 90° + a$, & angulus IDH $= 90° - a$, ac ille erit æqualis summæ angulorum trianguli IDH ad basim IH, hic summæ angulorum ad basim IG trianguli *IDG*. Hinc si fiat DH $= b$, & semi-differentia angulorum ad basim dicatur x, erit pro primo triangulo $1 + b : 1 - b :: tan. 45° + \frac{1}{2} a : tan. x$, quo angulo invento habebitur angulus DIH $= 45 + \frac{1}{2} a - x$, & pariter facto DG $= b$, & invento angulo x', cujus tangens $= \frac{1 - b}{1 + b} \times tan. (45° - \frac{1}{2} a)$, erit angulus DIG $= 45° - \frac{1}{2} a - x'$. Erit enim x, vel x' semi-differentia angulorum ad basim, quæ dempta a semi-summa exhibet angulum minorem, nimirum illum, qui opponitur lateri DH, vel DG minori, ob DH, DG minorem radio DC = DI.

5. Potest facilius obtineri uterque angulus DIH, DIG hoc alio pacto. A valore DH redacto ad partes radii DC = DI dematur valor DE = IL = *sin.* CDI = *sin.* a, qui dicatur c; vel addatur valori DG, & habebitur EH, vel GE: inveniantur anguli respondentes iis tangentibus ad radium = 1, tum iidem multiplicentur per excessum secantis anguli a supra radium, & productum addatur ipsis, ac habebuntur, ut mox demonstrabitur, anguli EIH, EIG: addatur priori angulus DIE = CDI = a, & dematur a posteriore, ac habebuntur anguli quæsiti DIH, DIG.

Sunt

Sunt enim EH, EG tangentes angulorum EIH, EIG ad radium IE, qui cum sit paullo minor radio DC $= 1$, tangentes EH, EG debent augeri in ratione EI ad DC $=$ DI, ut reducantur ad partes, quæ conveniunt tangentibus eorum angulorum respondentibus illi radio *majori*. Cum ii anguli sint exigui, & tangentes angulorum exiguorum sint proxime proportionales suis angulis; satis erit augere ipsos angulos in ea ratione: porro EI est ad DI $=$ DC in ratione radii *ad* secantem anguli EID $= a$, ac proinde satis est *addere angulis ipsis* correctiunculam exiguam, quæ oritur a *multiplicatione* exigui excessus illius secantis supra *radium, qui quidem excessus cum in* exigua deviatione sit per*quam exiguus, ea multiplicatio est expeditissima.*

6. Ii calculi renovandi sunt pro quavis tangente DH, vel DG, quam exhibeat filum penduli suspensi ex I in usu *ejus* instrumenti inclinati, quem usum exponendum inferius exhibet figura *6*, & 7. Verum potest erui formula, quæ per valorem DE $= c$ constantem, & DH $=$ DG $= b$ variabilem exprimat aberrationem quæsitam: DM, DN *sunt sinus* angulorum DCH, DIH ad radium DC $=$ *DI* $= 1$. *Hinc inventâ differentiâ eorum* sinuum *invenietur differentia* angulorum e theoremate notissimo, quo ali*bi etiam* usi sumus, *facile* autem *demonstratur*, esse differentiam sinus ad differentiam anguli variati variatione exigua, ut est co*sinus ejusdem* anguli ad radium: sed hic, ubi angulus ipse est exiguus, potest assumi pro ipso cosinu radius $= 1$, adeoque ipsa differentia sinuum assumi poterit pro differentia angulorum.

7. Est $CH^2 = CD^2 + DH^2 = 1 + b^2 : CD^2 = 1 :: DH^2 = b^2 : DM^2 = \frac{b^2}{1 + b^2}$, qui valor, neglectis superioribus po*tentiis* valoris b exigui respectu radii $= 1$ (*), *evadit* $b^2 - b^4$, & *hujus* radix DM cum simili neglectu evadit $b - \frac{1}{2}b^3$. Est au-

(*) In hisce *calculis tuto negligi poterunt termini, in quibus summa dimensionum quantitatum exiguarum b, & c assurgit ultra numerum 4. Is neglectus non inducit in valores finales nisi neglectum quantitatum ordinis inferioris respectu earum, quæ in iis remanent.*

tem HI^2, qui valor ex ipsis propositionibus libri secundi Euclidis est $= DI^2 + DH^2 - 2DH \times DE = 1 + b^2 - 2bc : EI^2 = DI^2 - DE^2 = 1 - c^2 :: DH^2 = b^2 : DN^2 = \frac{b^2 - b^2c^2}{1 + b^2 - 2bc}$. Hic valor neglectis terminis, in quibus dimensiones quantitatum b, & c exiguarum respectu unitatis superant numerum 4, evadit $b^2 - b^4 + 2b^3c - b^2c^2$ (*) $= b^2(1 - b^2 + 2bc - c^2)$. Hujus valoris radix cum simili neglectu evadit $DN = b - \frac{1}{2}b^3 + b^2c - \frac{1}{2}bc^2$ (**). Erat autem $DM = b - \frac{1}{2}b^3$. Quare differentia eorum sinuum erit $b^2c - \frac{1}{2}bc^2$.

8. Hæc differentia ducenda fuisset in *CM* cosinum anguli *DCM* ad *habendam differentiam* quæsitam angulorum DCH, DIH. Valor CM *habetur e proportione* $DH = b : DM = b - \frac{1}{2}b^3 :: CD = 1 : CM = 1 - \frac{1}{2}b^2$. Si multiplicetur *differentia* sinuum inventa $b^2c - \frac{1}{2}bc^2$ per hunc valorem, remanet differentia eadem, cum novis binis terminis, in quibus dimensiones *quantitatum* exiguarum evadunt quinque, qui idcirco respuendi *sunt*, remanente ipsa differentia sinuum *sola* pro differentia angulorum, uti notavimus *in fine numeri 6*.

9. Hæc differentia constat binis terminis *altero positivo* b^2c, altero negativo $-\frac{1}{2}bc^2$, qui habent productum commune bc ductum in coefficientem communem $b - \frac{1}{2}c$. Hic est ad illum ut c ad $2b$. Hinc factâ multiplicatione b per c, assumetur valor $b - \frac{1}{2}c$, per quem multiplicabitur ipsum productum. Id exhibebit differentiam arcuum metientium eos angulos, nimirum errorem quæsitum, in partibus radii: ut eæ reducantur ad secunda, satis

(*) Priores tres termini remanent soli ex divisione b^2 per $1 + b^2 - 2bc$, & quartus solus ex divisione $-b^2c^2$ per eundem divisorem.

(**) Nam hic valor est $= b(1 - \frac{1}{2}b^2 + bc - \frac{1}{2}c^2)$, qui facto $u = -\frac{1}{2}b^2 + bc - \frac{1}{2}c^2$, evadit $= b(1 + u)$, & ejus quadratum $= b^2(1 + 2u + u^2)$, ubi cum u habeat duas dimensiones b^2, bc, c^2, assurgit b^2u^2 ad sex, quo termino contempto, remanet $b^2(1 + 2u) = b^2(1 - b^2 + 2bc - c^2)$, nimirum valor, cujus radix fuerat assumenda.

tis est multiplicare numerum inventum per 60, & dividere per 0,000291, qui est valor arcus unius minuti, sive secundorum 60 in partibus ipsius radii.

10. *Si deviatio CDI* fieret in partem contrariam, puncto E abeunte versus G; recta DE $= c$ evaderet negativa, adeoque manente DH $= b$, ut prius, mutaret signum solus primus terminus b^2c, qui habet unicam dimensionem valoris c variati, & formula evaderet $- b^2c - \frac{1}{2}bc^2$. Hinc hæc ipsa exprimet in casu figuræ, differentiam anguli DIG ab angulo DCG: unde proveniunt plura consectaria.

11. *In primis error corrigendus*, pari distantiâ puncti limbi a medio, semper est *minor in* ea ejus parte, versus quam radius DI inclinatur, quam in opposita: nam in priore is error componitur ex summa, in posteriore e differentia binorum terminorum b^2c, & $\frac{1}{2}bc^2$. Deinde in parte posteriore semper is valor erit negativus, in priore autem erit negativus, nullus, vel positivus, prout valor b fuerit minor, quam $\frac{1}{2}c$, ipsi æqualis, vel major. Initio, existente DH $=$ o, puncto nimirum H cadente in ipsum initium numerationis $=$ o, erit *nullus*, ut patet. Discedente H a medio D, erit *negativus* initio, & crescet, tum decrescet, cum evadente $b = \frac{1}{2}c$ debeat evanescere, ac deinde fiet positivus, & manebit positivus semper. Donec is valor fuerit negativus, angulus DCH indicatus a limbo erit major debito, minor vero quando is valor erit positivus: patet enim saltem abeunte H ultra E, ut figura exhibet, in quo casu valor formulæ jam est positivus, fore angulum DHC minorem angulo DHI, adeoque & sinum DM minorem sinu DN; ac proinde angulum quoque DCH indicatum a divisionibus limbi fore minorem angulo DIH: sunt enim DM, DN sinus angulorum DHC, DHI ad radium communem DH, & angulorum DCH, DIH ad radios DC, DI æquales. Angulus autem DIG, qui habet formulam semper negativam, erit semper *minor* angulo DCG, quod patet etiam, quia ob angulum DGI minorem angulo DGC perpendiculum ductum ex D in rectam GI erit semper minus perpendiculo inde ducto in rectam GC. Quamobrem ex ea parte divisiones limbi exhibebunt plus æ-

quo: unde fluet hæc regula. *Valor formulæ pro corrigendo angulo exhibito a divisionibus limbi applicandus erit ei ipsi angulo cum suo signo, subtrahendus, quando fuerit negativus, & addendus, quando invenietur positivus.*

12. Quoniam is error in discessu puncti H a D versus E initio nullus incipit esse negativus, & crescit, tum decrescit usque ad evanescentiam; debet alicubi evadere maximus. Locus maximi erroris facile determinatur considerando valorem c constantem, & b variabilem: fiet $2cbdb - \frac{1}{2}c^2db = 0$, adeoque $b = \frac{1}{4}c$: ibi ejus valor evadit $= \frac{1}{16}c^3 - \frac{1}{8}c^3 = -\frac{1}{16}c^3$. Hinc correctio nulla in D, ubi etiam angulus determinatus a limbo est nullus, incipit in recessu puncti H a D versus B esse negativa, & crescit, donec id punctum deveniat ad distantiam $= \frac{1}{4}$DE, ubi evadit $= -\frac{1}{16}c^3$, tum decrescit usque ad punctum medium inter D, & E, ubi evanescit, ac deinde evadit positiva, & perpetuo crescens: ex parte autem opposita, abeunte H a puncto D versus A, oritur negativa, & semper crescit. Nimirum angulus DCG semper est major angulo DIG excessu semper crescente in progressu puncti H abeuntis in G a puncto D versus A, & in regressu defectu ipso semper decrescente, donec in appulsu ejus puncti ad D evanescat ipse excessus cum angulo utroque: in discessu puncti ejusdem a D versus B adhuc habetur excessus anguli DCH supra DIH, qui semper crescit usque ad quadrantem rectæ DE, ubi evadit maximus, tum decrescit, & evanescit in medio rectæ ejusdem: deinde evadit angulus prior minor posteriore defectu semper crescente.

13. Incrementum correctionis, quod diximus perpetuum in progressu puncti H a nihilo, quod habetur in D, versus A, & ab altero nihilo in media recta DE versus B non durat, nisi donec durat conditio assumpta distantiæ DH $= b$ exiguæ respectu radii DC; nam abeunte puncto H utrâvis e parte in infinitum, uterque angulus evadit rectus, differentiâ evadente $= 0$. Quamobrem habetur utrâque e parte iterum aliquod maximum, quod formula non indicat, quia ipsa est eruta ex ea suppositione, vi cujus neglecti sunt omnes termini habentes summam dimensionum majorem numero 4. Si distantia DH fiat x, & concipiatur recta y

per-

perpendicularis rectæ AB æqualis valori $b^2c - \frac{1}{2}bc^2$; habebitur æquatio $y - cx^2 + \frac{1}{2}c^2x = 0$, quæ est ad parabolam transeuntem bis per rectam AB in puncto D, & in medio inter D, & E, in quibus punctis evanescit valor y: axis ejus parabolæ transit per punctum distans a puncto D versus B per $\frac{1}{4}$DE. Recessus ejus curvæ a recta AB cum accessu, & transitu per ipsam in iis duobus punctis exhiberet ipsis oculis omnia illa incrementa, & decrementa correctionis, & transitum duplicem per nihilum cum mutatione ab excessu anguli alterius respectu alterius in defectum, & viceversa: verum ea curva simplex non satisfaceret accurate problemati, sed tantum proxime, & id, donec duraret conditio distantiæ DH exiguæ respectu radii DC $= 1$: nam curva, cujus distantia a recta AB exhiberet accurate differentiam eorum angulorum, esset multo sublimior, nec est operæ pretium ipsam investigare: sola simplicitas formulæ, & curvæ me induxit ad persequendas hasce omnes variationes, oblatâ occasione exercendæ Geometriæ, & contemplandæ ejus indolis, ac analogiæ cum calculo algebraico, quibus semper summopere sum delectatus (*).

14. Si

(*) *Usus ejusmodi considerationum non sistit in sola contemplatione jucunda nexus mirabilis, qui habetur inter Geometriam linearem, quæ sola reipsa est vere Geometria, & calculum algebraicum ejus formæ, quam Cartesius adhibuit in hujus applicatione ad illam, quo nexu fit, ut formulæ erutæ e figura aptata uni casui transferri possint ad omnes alios, analysi admonente Analystam ejus idiomatis peritum etiam de veritatibus, de quibus is sine ejusmodi monitu nequaquam cogitasset: sed præterea eæ considerationes amovent periculum incidendi in errores, in quos minus cautus Analysta incurreret. Unum ex iis periculis haberetur hic, ubi etiam primâ fronte appareret absurdum quoddam, & contradictio.*

Immotis punctis A, B, C, D, I, E, consideretur filum prodiens e puncto I, & occurrens rectæ AB in H, translatum a positione, quam figura exhibet, in qua nimirum respectu puncti B id jacet citra E, motu continuo versus D, & habeatur præ oculis mutatio continua angulorum DCH, DIH, & valoris formulæ $b^2c - \frac{1}{2}bc^2$, quæ in positione figuræ ipsius est valoris positivi, & indicat excessum anguli posterioris supra priorem, adeoque correctionem addendam valori puncti H æstimato a distantia DH puncti ipsius ab initio divisionum D assumpta pro tangente ejus anguli ad radium DC $=$ DI $= 1$, ut habeatur valor anguli DIH.

Dum

14. *Si rectis* DH, DG *existentibus æqualibus angulus* DCH *æqualis angulo* DCG *dicatur* r, erit angulus DIH $= r + b^2c - \frac{1}{2}bc^2$, & DIG $= r - b^2c - \frac{1}{2}bc^2$. Quare eorum differentia erit $2b^2c$, qua prior deficiet a posteriore. Angulus autem GIH, qui erit eorum summa, erit $= 2r - bc^2$, dum angulus GCH erit $= 2r$. Quare ille prior erit major hoc posteriore per bc^2. At differentia angulorum DIH, DIG erit $= 2b^2c$, qui erit excessus prioris supra posteriorem.

15. Facilis est *transitus ab angulis* DIH, DIG *pertinentibus ad limbum rectilineum ad angulos* DIH′, DIG′ *pertinentes ad circularem*. A priore demendus est angulus HIH′, *posteriori addendus* GIG′. Porro ob angulos exiguos *proportionales suis sinubus*, & sinus *lateribus oppositis*, erit IH′ : H′H :: H′HI : H′IH $=$ H′H

Dum punctum H procedit versus D; valor ipsius formulæ minuitur, *sed remanet positivus*, & indicat, angulum DIH esse majorem angulo *DIC*, *utut* excessu semper imminuto, donec deveniat H ad punctum medium inter D, & E: ibi factâ DH, sive $b = \frac{1}{2}c$, *valor formulæ evanescit*, termino priore positivo *facto æquali posteriori negativo*, *quod indicat*, *ibi eos angulos evadere æquales*. Ultra eum *locum valor formulæ evadit negativus*, *prævalente secundo termino supra primum*, & *angulus* DIH evadit minor angulo DCH defectu crescente, donec fiat maximus, puncto H appellente ad distantiam a puncto D æqualem quadranti ipsius DE: minuitur deinde ea differentia negativa, donec punctum H appellat ad D, ubi ipsa iterum evanescit, evanescente ibi valore b, cum quo tamen non evanescit sola differentia, sed simul cum ea evanescunt ipsi anguli, qui idcirco ibi non fiunt vere æquales, sed jam sunt nulli.

Abeunte puncto H ultra D, succedit ipsi punctum G, & angulis DCH, DIH succedunt anguli DCG, DIG: formula autem, facto valore DH $= b$ jam negativo, evadit tota positiva, facto positivo secundo termino $- \frac{1}{2}bc^2$. Videtur prima fronte angulus DIG debere iterum evadere major angulo DCG; cum tamen, ut supra deduximus, is ex ea parte sit semper minor defectu composito e summa valorum eorundem terminorum assumptorum, uti *sunt in se ipsis*. Solutio *ejus ænigmatis oritur e mutatione angulorum ipsorum in transitu* puncti H per D e positivis in negativos. Cum valores negativi considerandi sint, ut minores nihilo; is, qui in se ipso est minor, in consideratione analytica est major. Differentia $=$ DIG $-$ DCG exhibita a formula evadit positiva eo ipso, quod angulus DIG, negativus in expressione analytica, minor est in se ipso, quam DCG.

$\frac{H'H \times H'HI}{CH'}$. In hoc valore perquam exiguo potest poni CH' $= 1$ pro CH', & CDI $= a$ pro H'HI, sive CHI, qui duo valores parum differunt a substitutis: id quidem patet de priore ob rectam CO minorem CI exiguâ respectu CD; sive CH', & de posteriore ob IO parum discrepantem ab IL, & IH a CH. Si angulus CDI $= a$ sit graduum duorum, & DCH $= 4^\circ$; angulus DCI ad basim trianguli isoscelii DCI erit minor recto per gradum unum, a quo demendo adhuc DCH $= 4$, deficiet HCI a recto per gradus 5, adeoque IL, IO erunt ad se invicem ut *sin.* $89^\circ = 0,9998$ ad *sin.* $85^\circ = 0,9962$, qui valores differunt a se invicem minus quam per 0,004 totius: at CH $=$ *sec.* DCH $=$ *sec.* $4^\circ = 1,0031$ excedit radium CI $= 1$ per 0,0031 totius, adeoque IH adhuc minor eâdem CH differt ab ipso adhuc minus: hinc ista duplex substitutio inducit in angulos CDI, CHI differentiam minorem centesima parte totius valoris tam exigui. Facta autem ejusmodi substitutione, evadit angulus H'IH $= a \times$ H'H, sive, posito pro CDI $= a$ suo sinu IL $=$ DE $= c$, fit $= c \times$ H'H. Porro est $HH' = \frac{DH^2}{HK}$, ubi DH^2 est $= b^2$, & HK non differt ab H'K $= 2$, nisi per HH' $= 0,0031$. Quare poterit substitui $\frac{1}{2}b^2$ pro HH', & fiet valor anguli quæsiti H'IH $= \frac{1}{2}b^2c$. Hic erit valor etiam anguli GIG', qui respondet angulo H'IH mutato per radium DI abeuntem in angulum oppositum ADC, quod mutat valorem DE $= c$ in negativum, & indicat excessum anguli DIG' supra DIG pro defectu DIH' a DIH.

16. Quare angulus DIH' ex parte, in quam inclinatur radius DI, erit $= r + \frac{1}{2}b^2c - \frac{1}{2}bc^2$, & ex parte opposita angulus DIG' $= r - \frac{1}{2}b^2c - \frac{1}{2}bc^2$. Hic posterior erit semper minor angulo r exhibito ab arcu DH', correctione existente $-\frac{1}{2}b^2c - \frac{1}{2}bc^2$ semper itidem negativa. In appulsu puncti G' ad D, uterque DCG', DIG' evanescit: puncto G' transgresso D, & abeunte versus B in H' angulus DIH', erit initio adhuc minor angulo DCH' per differentiam $\frac{1}{2}b^2c - \frac{1}{2}bc^2$ negativam crescentem, donec fiat $bcdb - \frac{1}{2}c^2db = 0$, sive $b = \frac{1}{2}c$, tum decrescentem donec fiat $b = c$,

ubi

ubi differentia iterum evanescet in appulsu *puncti H* ad *E*. In accessu *ulteriore puncti* H *differentia* evadet positiva, angulo DIH *semper* deinde excedente angulum DCH', quæ omnia habebuntur proxime, non accurate, & donec recta DH erit exigua respectu radii DC: *differentia* autem, & correctio in limbo circulari erit semper minor, quam in rectilineo per $\frac{1}{2} b^2 c$.

17. Hic jam possunt applicari numeri, ut innotescat, quid ab ejusmodi quantitatibus exiguis timeri possit in usu ejusmodi instrumentorum: *assumemus autem pro instituendo* calculo numerico deviationem *CDI* $= a$ *graduum duorum majorem* eâ, quæ timeri potest, & angulum *DCH graduum* 4 *majorem itidem* eo, *qui adhiberi solet in mensura* graduum *Meridiani*, vel in determinanda *distantia fixæ* cujuslibet a zenith, ad obtinendam deviationem axis telescopii per inversionem instrumenti, cujus ope determinetur correctio primi puncti verticalis in positione quadrantis muralis, qui converti non potest, vel (*) ad alios *usus astronomicos*, pro quibus sufficit adhuc minor distantia a zenith. Facile inde eruentur valores pro quavis minore deviatione, & distantiâ *angulari* a *radio DC*, *quæ in valore formularum* exhibentium *errores*, & *correctiones accipi possunt*, *ut proportionales sinui DE* $= c$, & *tangenti* $=$ DH $= b$.

18. Erit DE $= c = sin.2^\circ = 0,0349$, qui valor non differt

(*) Habebat Liesganigius in Viennensi specula Collegii Jesuitici duos ingentes quadrantes murales, australem alterum, & alterum borealem: construxit, me ibi præsente, sectorem egregium ad formam ejus, quem ego adhibueram pro mensura graduum Meridiani, ad obtinendam correctionem puncti limbi determinantis positionem verticalem per conversionem ipsius sectoris, tum eodem est usus ad determinandam latitudinem sui observatorii per distantias plurium fixarum a zenith, quas comparavit cum earum positionibus erutis e Caillianis Fundamentis Astronomiæ, & cum observationibus contemporaneis fixarum earundem institutis ad eam rem ab ipso Caillio. Eâ occasione hanc perquisitionem tum institui, schediasmate conscripto, adhibens eandem hanc methodum, & *inventis his ipsis formulis: sed ea hic profero meliore* ordine digesta, & *calculis multo simpliciore ratione institutis*, cum additionibus plurimis, quæ ad uberiorem evolutionem requirebantur. Inventum est, eum sectorem carere hoc vitio: eo autem ipse deinde usus est etiam felicissime ad dimetiendos Meridiani gradus tam in Austria, quam in Hungaria.

fert a tangente, *niſi* per fractiones minores, $DH = b = tan. 4^{\circ} = 0,0699$, qui jam differt a ſuo ſinu per $0,00017$. Præter ſubſtitutionem eorum numerorum pro b, & c, quæ exhibebit valores quæſitos in partibus radii, adhibenda eſt (num. 8) multiplicatio per $\frac{60}{0,000291} = \frac{60000000}{291}$ ad habendos eosdem redactos ad ſecunda; unde pro primo termino b^2c proveniet $35'',2$, & $8'',8$ pro ſecundo $\frac{1}{2}bc^2$. Hinc correctio pro puncto H erit $35'',2 - 8'',8 = 26'',4$, & pro puncto G $-35'',2 - 8'',8 = -44'',0$.

19. Pro methodo numeri 5 *aſſumendæ ſunt plures notæ decimales*, ad habendum accuratum numerum ſecundorum: fient $c = sin. 2^{\circ} = 0,0348995$, $b = tan. 4^{\circ} = 0,0699268$, adeoque $EH = b - c = 0,0350273$, $EG = b + c = 0,1048263$. Hæ ad radium $= 1$ ſunt tangentes angulorum $2^{\circ}.0'.21'',9 = 7221'',9$, & $5^{\circ}.59'.16'',4 = 21556'',4$, qui valores multiplicati per $0,00061$ exceſſum ſecantis anguli DE ſupra radium $= 1$ exhibent *correctiunculas* $4'',4$, & $13'',1$ addendas valoribus inventis, qui *evadunt* $2^{\circ}.0'.26'',3$, & $5^{\circ}.59'.3'',3$ pro angulis EIH, EIG: addendo priori angulum $DIE = 2^{\circ}$, & *ipſum auferendo a poſteriore*, habentur *pro angulis DIH, DIG* $4^{\circ}.0'.26'',3$, & $3^{\circ}.59'.16'',4$, cum *exceſſu* $26'',3$ *prioris ſupra* $DCH = 4^{\circ}$, & *defectu* $43'',6$ poſterioris a DIG *itidem* $= 4^{\circ}$.

20. *Eædem notæ* requiruntur etiam pro methodo numeri 4. *Summa laterum* DI, DH $= 1 + b$ eſt $1,0699268$, differentia $= 1 - b = 0,9300732$, ſemi-ſumma angulorum ad baſim $IH = \frac{1}{2}ADI = 46^{\circ}$, unde eruitur ſemi-differentia $= 41^{\circ}.59'.33'',6$, quæ dempta a ſemi-ſumma $= 46^{\circ}$ relinquit angulum $DIH = 4^{\circ}.0'.26'',4$ majorem angulo DCH per $26'',4$: in triangulo DIH ſumma, & differentia laterum ſunt eædem, ſemi-ſumma vero angulorum ad baſim $IG = \frac{1}{2}BDI = 44^{\circ}$, unde eruitur ſemi-differentia $40^{\circ}.0'.44'',0$, quæ ablata a ſemi-ſumma $= 44^{\circ}$ relinquit $DIG = 3^{\circ}.59'.16'',0$ minorem angulo $DCG = 4^{\circ}$ per $44'',0$.

21. Hæc poſtrema methodus eſt accurata, ſed requirit numeros majores, adeoque *eſt operoſior*, ut & præcedens, dum formula pauciores notas *decimalium* exigens eſt omnium expeditiſſima.

sima. *Porro omnes tres methodi* exhibent *valores* a *se* invicem *discrepantes solum per paucas* unius secundi partes decimas, ut videre est *in tabella* sequente, & quidem formula in altero e valoribus non *differt* a *valore* exacto, nisi per unam decimam partem secundi, & *fortasse* etiam minus; nam *fractiones* minores in *iis calculis* sunt neglectæ.

	Correctiones pro H	Correctiones pro G
E formula	+ 26″, 5	− 44″, 0
E *methodo numeri 5*	+ 26, 3	− 43, 6
E methodo accurata *numeri 4*	+ 26, 4	− 44, 0

22. Is consensus *formulæ cum valore accurato* ostendit, methodum, *qua ipsa est eruta*, non esse erroneam, & *jure contemptos esse pro ipsa eruenda* terminos, qui habebant summam dimensionum majorem numero 4. Porro non solum calculus numericus ipsis formulis applicatus est facilior, sed inventis semel binis valoribus exhibitis pro correctione respondente illi *deviationi suppositæ* radii DI, admodum facile ejus ope inveniuntur correctiones respondentes *aliis deviationibus*, & *aliis distantiis* punctorum limbi H, & G ab *initio divisionum* D. *Terminus secundus* semper *negativus* $-\frac{1}{2}bc^2$ variatur in ratione composita e *simplici* valoris b, & duplicata valoris c: *primus* autem b^2c ex parte altera positivus, & ex altera negativus in ratione composita e duplicata valoris b, & *simplici* valoris c. Positis autem valoribus, quos adhibuimus pro deviatione radii DI graduum duorum, & distantia angulari punctorum H, & G a puncto D $= 4°$ obvenit (num. 18) valor primi illius termini 35″, 2, secundi − 8″, 8. Si deviatio sit tantummodo unius, vel dimidii gradus, maneat autem distantia puncti H, vel G ab initio D, evadet secundus valor tantummodo 2″, 2, vel 0″, 5 fere contemnendus etiam pro distantia illa angulari graduum 4: primus remanebit adhuc ingens, secundorum nimirum 18″, *6*, vel 9″, 3. Sed si *punctum* H, vel G *sit adhuc* propius puncto D, distans *nimirum* per duos *gradus*, vel per unicum, deviatio autem *sit gradus dimidii*, valor secundus evadet 0″, 25 vel 0″, 12, primus autem 2″, 4, vel 0″, 5. Distantiæ angula-

gulares puncti limbi duorum, vel trium graduum possunt utique obvenire: curandum est autem, ut in ipsa constructione instrumenti evitetur, quam diligentissime fieri potest, deviatio ipsa, vel determinetur ejus magnitudo absoluta potissimum, ubi sector adhibetur pro mensura graduum Meridiani, in qua error singulorum secundorum, ubi agitur de unico gradu, trahit secum errorem 16 hexapedarum.

23. Videndum tamen, quid accidat, ubi distantia a zenith assumitur non per unicam inclinationem, *filo penduli cadente in alteram tantum e partibus limbi DA, DB, sed per inclinationem utramque*, quæ adhiberi *solet ad eum usum*, facta instrumenti conversione, quæ quidem *etiam* adhibetur semper ad habendam aberrationem directionis, quam habet axis telescopii respectu radii DI terminati ad initium divisionum. Sit axis telescopii parallelus radio DI habenti deviationem versus B, ut in fig. 5, & fixa distet *a zenith* gradibus r, figura autem 6 exprimat positionem sectoris *cum limbo obverso* ad orientem, & figura 7 ad occidentem: filum penduli IP cum radio DI continebit in utraque positione angulum $= r$. *Si nulla haberetur deviatio; id filum occurreret rectæ AB in punctis H, & G ad distantias a puncto D, in priore fig. DH, in posteriore DG*, accurate *æquales*, quarum *singulæ exhiberent* accurate *gradus* 4 per *tangentes DH, DG* attributas *radio DC = DI*. Sed ob *illam* aberrationem habebitur in priore figura DH minor exhibens arcum minorem angulo r per aberrationem $- b^2c + \frac{1}{2}bc^2$, & DG in posteriore arcum majorem per aberrationem $b^2c + \frac{1}{2}bc^2$, mutatis signis, cum ii, qui in fig. 5 erant excessus, vel defectus angulorum pertinentium ad punctum I respectu pertinentium ad punctum C habentium eas rectas pro *tangentibus*, sint defectus, vel excessus horum respectu illorum.

24. Si deviatio esset $= 2^\circ$, & distantia a zenith $= 4^\circ$, primus error *limbi* esset $- 26'',4$, & secundus $+ 44'',0$, & si distantia *fixæ a zenith* esset $= r$ paullo *major*, vel paullo minor gradibus 4, error *uterque* esset *parum diversus*. Assumeretur pro distantia a zenith *semi-summa angulorum* $r - 26'',4$, $r + 44'',0 = r + 8'',8$, cum errore $8'',8$ in ejus distantia a zenith.

nith. *Si haberetur mensura distantiæ ejus fixæ a zenith accurata*, *& constaret*, axem telescopii esse accurate parallelum radio DI; *innotesceret primum*, *in utram partem* fiat ipsa deviatio, quæ nimirum fieret in eo angulo, in quo jacet filum, vel in opposito, prout error limbi esset negativus, vel positivus. Deinde haberetur quantitas deviationis ipsius per *singulos* e prioribus binis erroribus. Si errores essent ii *ipsi*, quos invenimus; innotesceret, deviationem esse *graduum duorum*. Verum si errores inventi essent alii, *conferendo singulos cum sua formula* $\pm b^2c \mp \frac{1}{2}bc^2$ obtineretur *valor* c, *noto* b, *qui exhiberet deviationem* quæsitam.

25. Sed si adhibendus *sit sector ad deprehendendam distantiam accuratam fixæ* a *zenith*, non *potest supponi hæc* cognita, quia *ad eam habendam præter* cognitionem *ejus* accuratæ declinationis *oporteret habere* notitiam accuratæ altitudinis poli, quæ & incerta est intra plura secunda, & quærenda est potius per hunc horum sectorum usum. Sed multo minus ea distantia potest *supponi* cognita, cum usus præcipuus sectoris ipsius sit *ad cognoscendam* potius positionem zenith respectu fixæ, quam fixæ respectu zenith, ut ubi *ii adhibentur ad dimetiendos* Meridiani *gradus*, *determinando distantias binorum zenith ab eadem* fixa *ad habendum arcum cælestem interceptum inter ea puncta*. *Hinc ejusmodi* perquisitio *poterit institui* hoc alio pacto.

26. Sint in fig. 6 puncta A, D, B, C, I eadem ac in fig. 5, *limbo obverso in orientem*, & recta DF parallela axi telescopii directi in *fixam* quampiam parum remotam a zenith appellentem ad Meridianum occurrat in F filo IP prodeunti e puncto I radii DI $= r$ habentis deviationem CDI $= a$ respondentem rectæ DE $= c$ figuræ 5, quæ est sinus ipsius: filum autem occurrat rectæ AB in puncto H, existente DH $= b$: angulus DCH, cujus ea est tangens, dicatur r, ut prius, & deviatio nova IDF axis telescopii a radio deviante DI dicatur x, quæ censeatur positiva, ubi *fiat*, *ut* figura *exhibet*, versus eandem plagam, *versus quam fit deviatio radii* CDI, *nimirum* hæc in *angulo* IDB, *ut* illa *in angulo CDB*. Figura 7 referat positionem *ejusdem sectoris post conversionem* limbi versus occidentem. Filum penduli occurret *brachio* sectoris opposito DA in

G ana-

G analogo puncto G figuræ 5, directio autem ipsius producta sursum occurret axi telescopii in alio puncto F. Erunt iidem ac prius anguli GDI $= a$, IDF $= x$, angulus DCG dicatur r', DG ejus tangens b', & patet, angulum DFP fore eundem in utraque figura, adeoque angulus DFG figuræ 7, erit æqualis angulo DFH figuræ 6.

27. Porro in fig. 6 angulus DIH erit $= r + b^2c - \frac{1}{2}bc^2$, adeoque angulus DFH $= r + b^2c - \frac{1}{2}bc^2 + x$: at in fig. 7 angulus DIG erit $= r' - b'^2c - \frac{1}{2}b'c^2$, & angulus DFG erit $= r' - b'^2c - \frac{1}{2}b'c^2 - x$. Si axis telescopii esset accurate parallelus rectæ DI, atque id constaret; *facile inveniretur deviatio a per suum sinum c.* Valor x evanesceret, valores r, & r' differrent inter se per differentiam exiguam ordinis inferioris ad ipsos, cujus sunt correctiones adjunctæ: differentia valorum b, & b' esset ejusdem ordinis, ac differentia ipsa valorum r, r', sed differentia valorum b^2c, bc^2, & b'^2c, $b'c^2$, qui sunt ordinis inferioris, exigua respectu ipsorum, esset ordinis adhuc inferioris: hinc ea posset contemni, & ob æqualitatem angulorum DFH, DFG haberetur $r + b^2c - \frac{1}{2}bc^2 = r' - b^2c - \frac{1}{2}bc^2$, adeoque $r - r' = 2b^2c$, & $c = \frac{r - r'}{2b^2}$, *ubi tamen oporteret eruere valores r, & r' admodum accuratos e suis tangentibus determinatis per observationes cum* exactitudine, quæ *par esset ei valorum* eruendorum exactitudini.

28. *Sed ignotâ deviatione x*, inquiri posset simul in *deviationem utramque c, & x* ope inæqualitatis ingentis, quæ intercedit inter utrumvis e valoribus b^2c, & bc^2 erutum e diversis valoribus b. Seligantur binæ fixæ altera multo remotior a zenith, & altera multo propior, ad quem usum adhiberi possunt fixæ etiam incognitæ, dummodo habeant satis luminis, ut satis distinctæ appareant, & satis accurate determinari possint puncta H, & G figurarum 6, & 7 pertinentia ad earum singulas: sint autem pro remotiore R, R', B, B', quod pro priore r, r', b, b': deviationes c, & x sunt eædem pro utraque. Habebuntur binæ æquationes respondentes æqualitati eorundem angulorum DFH figuræ 6, & DFG figuræ 7, nimirum $R + B^2c - \frac{1}{2}Bc^2 + x = R' - B'^2c - \frac{1}{2}B'c^2 - x$, & $r + b^2c - \frac{1}{2}bc^2 = r' - b'^2c - \frac{1}{2}b'c^2 - x$.

Cum

Cum ex utraque eruatur valor $2x$ per valores cognitos, & per binos terminos habentes c, & c^2; obtinetur per æqualitatem binorum valorum respondentium eidem valori $2x$ æquatio secundi gradus pro c, ex qua eruitur is valor, tum ejus ope valor x, adeoque innotescunt ambæ deviationes c, & x, quibus cognitis habetur etiam distantia utriusque fixæ a *zenith*.

29. Hæc investigatio est utique admodum delicata, ac requirit observationes admodum accuratas, & calculum adhibentem satis multas decimalium notas; verum *cum possint adhiberi plura fixarum* binaria, *mihi quidem persuasum est, posse deveniri hac methodo* ad habendos valores *quæsitos cum accuratione satis idonea* ad corrigendas *deinde observationes, quæ ejusmodi sectore instituantur, si obnoxius sit deviationi primæ* $= a$, cui respondet *sinus* c. *Valor* x *obtinebitur sane* admodum accuratus; sed in valore c determinato per quantitates nimis exiguas derivatas ab ipso committetur error multo major: at quoniam correctiones *itidem* aliarum observationum ortæ ex eadem deviatione sunt exiguæ, ille error derivatus in ea deviatione ab exiguis erroribus commissis in determinatione *quantitatum habita per observationes* præcedentes *producet itidem exiguos* errores *in derivatione inde facta* quantitatum *ejusdem generis* pertinentium ad observationes *posteriores*.

30. Verum hic in *fine hujus* Opusculi indicabo aliam methodum, qua Astronomus possit inquirere in ejusmodi errorem sui *sectoris jam constructi*, ad eruendas deinde ope formularum, quas invenimus correctiones adhibendas singulis punctis. Sit in figura 5 limbus PQ hinc, & inde a medio D brevis, pertinens nimirum ad paucos gradus (figura exprimit & ipsum multo majorem respectu radii DC, vel CI, & deviationem CDI multo majorem ea, quæ timeri possit, ut singulæ partes, de quibus agitur, incurrant melius in oculos). Collocato instrumento in plano horizontali, quærendum esset punctum E perpendiculi IE per binas intersectiones circuli habentis centrum in I cum recta PQ: brevitas limbi non permittit excursum ejus circuli ultra punctum quæsitum E, nisi perquam exiguum, ne arcus abeat ultra terminum Q, exiguus autem excursus inducit illam obliquitatem arcus circularis indica-

tam

tam initio hujus Opusculi, quæ parit incerta puncta interſectionum ipſarum, inter quæ deberet aſſumi punctum E in medio.

31. Super eâdem menſa ampliori, vel ſuper pavimento conclavis poſſent collocari hinc, & inde a punctis P, Q binæ tabulæ bene complanatæ, quæ ope cuneorum ſubjectorum reducerentur ad idem planum cum plano tranſeunte per puncta P, I, Q: ope fili tenſi producenda eſſet recta PQ uſque ad eas tabulas verſus R, & T, delineato utrobique aliquo tractu ejus productionis: affixis longiori perticæ, vel tubo binis acubus, & alterius cuſpide fixa in I, cuſpis alterius determinaret interſectiones R, & T cum obliquitate ſatis magna ad eas diſtinctiſſime percipiendas. Tum facile determinaretur punctum E diſtans æque ab iis binis interſectionibus.

32. Sed in forma ſectoris indicata numero 1, productio ejus rectæ lineæ impeditur a micrometro externo appoſito in fine ejus limbi, cujus micrometri ope promovetur lamina continens eam rectam cum ſuis diviſionibus inter duas laminas immotas. At facile eſt ei malo remedium. Ultra totam limbi latitudinem collocari poteſt una tabula in medio, cum binis hinc, & inde, ſi illa non ſit ſatis longa, quarum omnium ſuperficies ſint in illo eodem plano punctorum P, I, Q. Ad diſtantias Pp, Qq accuratiſſime æquales duci poſſet recta linea in ſuperficie tabulæ intermediæ: tum filo tenui tenſo in directione rectæ ejuſdem notarentnr in aliis binis tabulis lateralibus bini tractus productionis rectæ ejuſdem verſus r, & q: centro I intervallo procurrente ſatis longe ultra rectam rq invenirentur interſectiones r, & q ſatis diſtinctæ cum puncto intermedio e: filum tenſum per I, & e determinaret punctum E, adeoque haberetur DE = c. Tum pro omnibus punctis hinc H, inde G diviſionum factâ DH, vel DG = b, inveniretur correctio adhibenda angulo determinato per eam tangentem, adhibendo vel formulam, vel utramvis e reliquis binis methodis expoſitis initio hujus ipſius Opuſculi: redactis iis correctionibus in tabulam ordine ſuo, haberentur deinde correctiones etiam pro omnibus punctis intermediis more ſolito. Ita inſtrumentum erroneum exhiberet determinationes accuratiſſimas, qui eſt ſcopus omnium hujus generis perquiſitionum in hoc Volumine.

OPU-

OPUSCULUM XI.

De rectificatione telescopii Meridiani Gallice Instrument des passages.

1\. Maximam *id instrumentum habet affinitatem cum quadrante murali; quam ob causam formulæ, quæ in* Opusculo III *sunt inventæ pro determinandis, & corrigendis erroribus collocationis ejus quadrantis, sunt communes ipsi, quod ibidem vocabulo respondente voci Gallicæ appellavimus Instrumentum transituum.* Utrobique habetur telescopium mobile circa axem horizontalem, cujus axis debet moveri in plano Meridiani, & utrumque habere potest eosdem binos usus, *nimirum* determinationem momenti, quo astrum transit per *Meridianum*, & altitudinis apparentis supra horizontem astri ejusdem, sive ejus distantiam a *zenith*, *quæ est ipsius altitudinis* complementum: *sed hæc secunda determinatio non solet haberi* ope instrumenti transituum, *nisi admodum crasso modo, quæ per quadrantem muralem satis magnum, & bene verificatum habetur accuratissime usque ad secunda arcus circuli maximi cælestis: prior determinatio per instrumentum transituum molis multo minoris haberi solet æque accurate, & vero etiam verificatione ad eum usum multo faciliori.

2\. Pro quadrante murali adhiberi solet arcus circuli habentis radium multo majorem, ut pedum sex, vel etiam octo cum alidada ejusdem longitudinis, & telescopio æquali ipsi adnexo: alidada ipsa convertitur circa brevem axem ipsi adnexum in altero ejus extremo: is axis debet transire per centrum arcus circularis ipsius quadrantis, in cujus plano retinetur ibi superficies alidadæ ipsius, altero ejus extremo applicato ad limbum ejusdem quadrantis cum nonio ipsi adnexo, adeoque ut axis telescopii moveatur in plano Meridiani, oportet, totus limbus jaceat accurate in eodem

dem plano cum centro, axis converſionis ſit accurate perpendicularis plano eidem, alidada accurate applicetur ubique limbo, quod obtineri non poteſt, niſi axis converſionis ſit ſatis accurate perpendicularis eidem ipſius plano, & axis teleſcopii ſit ei plano accurate parallelus: patet autem in Opuſculo III, quanta mole ſit opus ad explorandum, an limbus jaceat totus in eodem quodam plano, ad deprehendendam quantitatem errorum ejus generis, & corrigendos errores ipſos, qui quidem in quadrante jam conſtructo, & diviſo nec potuiſſent corrigi, niſi faſcia limbi ferens diviſiones ita adnexa fuiſſet menſulis pertinentibus ad machinamentum ferreum ope cochlearum, ut per lamellas interpoſitas adduci poſſet ad idem planum: planum autem ipſum in machina tantæ molis multo difficilius reducitur ad poſitionem plani Meridiani, licet modus ſuſpenſionis, quo ipſe ibidem ſum uſus, minuat difficultatem.

3. In inſtrumento tranſituum adnecti ſolent tubo teleſcopii brevioris bina brachia perpendicularia ejus longitudini deſinentia ſingula in binos cylindros bene tornatos, quorum axes jacentes in directum efformant ipſum axem converſionis. Ea innituntur binis fulcris, quæ ita excipiunt ipſos cylindros, ut in converſione teleſcopii axis ipſe maneat immotus, ſed per motus admodum expeditos impreſſos alteri ex iis fulcris tam elevari poſſit alterum e punctis extremis axis ipſius, ac deprimi, ut is adducatur ad poſitionem horizontalem, quam moveri in latus, ut acquirat poſitionem perpendicularem lineæ meridianæ: nec vero difficulter ipſe axis teleſcopii adducitur ad poſitionem perpendicularem eidem axi converſionis, ubi deprehenſus fuerit ejus poſitionis error, quod pertinet ad rectificationem hujus inſtrumenti poſt deprehenſos errores collocationis ipſius. De correctione errorum, qui deprehendantur in collocatione quadrantis muralis, egimus in ipſo Opuſculo III: agemus hic de eadem pro hoc inſtrumento: ſed præcedent, ut ibi, ea quæ pertinent ad eos deprehendendos. Circa eum axem ita libere convertitur axis teleſcopii, ut ejus productio in ſphæra cæleſti deſcribat arcum accurate circularem, qui in inſtrumento rite verificato, & correcto accurate congruit cum circulo meridiano.

4. Pro

4. *Pro habendis crasso modo altitudinibus supra horizontem* adnecti *ſolet alteri e brachiis index*, & alteri e fulcris ſemicirculus diviſus tantummodo in gradus. Is index cum exiguo illo ſemicirculo non poteſt exhibere accuratam determinationem altitudinis ſupra horizontem, vel diſtantiæ a zenith, ſed adhibetur tantummodo ad dirigendum teleſcopium *verſus illam* Meridiani partem, ad quam debet aſtrum appellere, ut id ſubeat ipſius campum, ad quem uſum ob magnitudinem campi ipſius ſufficit craſſa ejuſdem *altitudinis æſtimatio: adhuc tamen pro arcu circulari* exigui radii *adnecti poteſt ipſi indici nonius, qui etiam* determinet altitudinis minuta. *Determinatio ſaltem craſſa altitudinis* eſt *neceſſaria potiſſimum*, ubi *expectandus ſit tranſitus* aſtri *cujuſpiam ad Meridianum* per diem, quod ſine ejuſmodi indicatione tranſire poſſet extra campum teleſcopii ipſius. Poſſet tamen adnecti inſtrumento hujus generis major ſemicirculus, vel circulus integer, major etiam eo, de quo hic egimus in *Opuſculo IX*, *ut* ejus ope habeatur ſimul tam momentum tranſitus per *Meridianum*; quam diſtantia a zenith *accuratiſſime determinata*, quod immediate determinaret *poſitionem aſtri in ſphæra cæleſti: tum* id æquivaleret *duplici quadranti*, quorum *alter eſſet auſtralis*, & *alter borealis*.

5. *In utroque inſtrumento tres axium errores poſſunt occurrere*, ut expoſui in *Opuſculo III*: poteſt nimirum 1° axis teleſcopii aberrare a poſitione perpendiculari ad axem converſionis; 2° axis converſionis eſſe horizontalis, ſed aberrare a poſitione perpendiculari ad lineam meridianam; 3° idem axis converſionis eſſe inclinatus ad horizontem, quo caſu ſi concipiatur planum verticale ductum per eum ipſum axem, & hujus interſectio cum plano horizontali tranſeunte per centrum converſionis, angulus, quem hæc interſectio continet cum linea meridiana, erit ſecundus error, angulus, quem ipſe axis continet cum ea interſectione in ipſo plano verticali, error tertius. Habentur in eodem Opuſculo III binæ methodi deducendi ſingulos hoſce errores axium e tribus differentiis inter momentum appulſus ad axem teleſcopii, & momentum appulſus ad Meridianum, quod obtineri poteſt ope altitudinum correſpondentium, cum binis ſeriebus formularum, per

quas

quas iidem singuli errores possunt determinari, ac eæ formulæ, ut monui, communes sunt utrique instrumento. Illas adhibui cum inquirerem in verificationem positionis axium quadrantis muralis, ubi occasione affinitatis ejus instrumenti cum hoc, enunciavi, formulas easdem pertinere etiam ad verificationem hujus: habeo autem & alias methodos præstandi idem per easdem eorum momentorum differentias, quas adhibueram in aliis binis Opusculis, in quibus directe mihi proposueram agendum de verificatione hujus instrumenti: eas hic proferam, adjectis aliis, quæ pertinent ad rectificationem, nimirum ad correctionem eorundem errorum, quorum nonnulla possunt esse communia utrique, alia vero ita sunt particularia huic intrumento, ut ad quadrantem muralem transferri non possint.

6. Hujus generis sunt duæ methodi deprehendendi, & corrigendi errorem primum, & tertium independenter ab omni observatione astronomica, quarum utraque est cognita: adhuc tamen ipsas hic proponam, adjectis animadversionibus, quæ mihi ipsas reddunt non nihil suspectas, ut idcirco pro deprehendendis, & determinandis singulis iis axium erroribus ego quidem aptiores censeam eas, quæ adhibent observationes astronomicas exhibentes illas differentias momentorum appulsus ad instrumentum, & ad Meridianum. Ad illas methodos utcumque sistendas oculis indicabo tantummodo per pauca lineamenta formam instrumenti.

7. Telescopium indicatur (Tab. VII fig. 1) a rectangulo ABB'A', cui adnexa sunt ad angulos rectos bina veluti brachia DCC'D', GHH'G': ea desinunt in binos cylindros EF, IK bene tornatos, quorum axes jacent in directum, & constituunt axem conversionis. Ii cylindri innituntur binis fulcris LMM'L', NOO'N' connexis inter se ex parte inferiore, quæ fulcra in parte superiore LL', & NN' habent cavitates semicirculares formæ cylindricæ diametri æqualis diametro cylindrorum EF, IK: cylindri ipsi immissi iis cavitatibus ita cum iis congruunt, ut telescopium moveri non possit, nisi motu circulari circa eos axes. Alterum e binis fulcris potest ope unius cochleæ elevari non nihil, ac deprimi ad conciliandam axi FK accuratam horizontalitatem, & ope alterius pro-

moveri horizontaliter non nihil ad inducendam accuratam perpendicularitatem respectu lineæ meridianæ. Quin etiam posset pars summa fulcri alterius ita infigi parti inferiori ope cylindri solidi adnexi priori, & immissi in cylindrum cavum excavatum in posteriore, ut eadem pars summa posset circa eum axem converti in gyrum: tum pars summa alterius illius fulcri posset ita concludi intra crenam circularem partis inferioris, ut ope cochleæ determinaretur ad motum horizontalem circularem per arcum multo etiam majorem: sed cum facile collocari possit directio fulcrorum in positione proxime perpendiculari ad lineam meridianam, exiguus motus horizontalis fulcri posterioris necessarius ad inducendam eam positionem accuratam induci facile potest vi illata per cochleam, sine tanto apparatu, & illæso, ac integro priore fulcro.

8. Ea brachia ita affiguntur tubo telescopii, ut hic mutare non possit positionem suam respectu directionis cylindrorum, in quos ea desinunt, pro eo adducendo ad perpendicularitatem accuratam respectu axis conversionis, si eam artifex accuratam non præstitit in ipsa instrumenti constructione, quod quidem, ubi agitur de summa accuratione, sperare omnino non licet: adhuc tamen tubo etiam immoto potest axis telescopii ita mutare directionem, ut is reducatur ad perpendicularitatem quæsitam. In foco objectivi habentur bina fila sibi invicem perpendicularia: eorum alterum debet esse parallelum axi conversionis, quo axe redacto ad horizontalitatem, ipsum itidem erit semper horizontale, ac alterum semper in eodem plano verticali, quod erit ipsum planum Meridiani, ubi ille axis redactus fuerit ad perpendicularitatem respectu lineæ meridianæ. Axis telescopii dicitur hic illa recta, quæ abit a centro objectivi ad eorum filorum intersectionem, & nomine centri objectivi intelligitur id punctum maximæ ejus crassitudinis, per quod transit recta conjungens bina centra binarum sphæricitatum, ad quas binæ illæ superficies sunt tornatæ. Radii, qui delati a punctis objecti satis remoti diriguntur ad id punctum, potissimum ii, qui exiguam habent declinationem ab ea recta, transeunt ad sensum irrefracti, adeoque per id punctum

transit

transit recta, quæ conjungit intersectionem *filorum* cum puncto objecti, quod in ipsa apparet, & idcirco ea recta dicitur *linea fiduciæ*. Si mutetur locus intersectionis filorum vel per motum solius fili verticalis, vel per motum totius lamellæ perforatæ, cui affixa sunt bina fila; mutatur directio axis telescopii tubo etiam immoto, ut patet. Si inducatur ejusmodi mutatio, potest ejus ope obtineri illa accurata perpendicularitas axis telescopii cum axe conversionis, tubo etiam carente ejusmodi positione accurata.

9. *In utroque margine tubi solet haberi planum exiguum parallelum ad sensum axi conversionis cum singulis punctis* P, Q *positis in directione* perpendiculari ad axem conversionis. Horum usus est pro verificanda *positione horizontali* axis conversionis, & eâdem rectificandâ, si deprehendatur erronea: *filum* tenue cum pondere appenso ostendit simul, an recta, quæ jungit ea duo puncta, sit perpendicularis ei axi, & an is axis sit horizontalis, ac *ejus* ope deveniri potest ad imprimenda puncta ipsa in ea directione perpendiculari ad eum axem, qua directione semel acquisita, facile deinde inquiritur in positionem horizontalem axis ipsius, & ea *inducitur, si inveniatur* erronea.

10. *Collocato axe ipso conversionis in positione ad sensum horizontali, convertatur tubus telescopii ita, ut acquirat positionem* ad sensum *verticalem : applicetur ad planum* superius filum tenue *cum pondere appenso ita*, ut transeat per punctum P, quod jam insculptum sit plano superiori: notetur in plano inferiori punctum Q, per quod transeat id filum, quod notari potest atramento: fiat dimidia conversio tubi ita, ut caput AA', quod fuerat superius, evadat inferius, capite opposito BB' jam evadente superiore cum suo plano, & puncto Q: applicetur idem filum ad hoc planum jam factum superius ita, ut transeat per ipsum punctum Q: si filum ipsum transit simul etiam per punctum P; constabit simul, & rectam PQ esse perpendicularem axi conversionis, & hunc axem esse horizontalem: secus, erit erronea utraque positio: ope autem ejusdem fili devenietur ad determinationem loci, in quo *imprimendum erit in* secundo plano punctum Q ita, ut recta PQ sit perpendicularis eidem axi, & elevando,

vel

vel deprimendo fulcrum alterum mobile, adducetur axis ipse ad *horizontalitatem requisitam.*

11. Sit enim (fig. 2) FK axis ipse inclinatus ad horizontem, & filo illo transeunte per puncta P, Q in prima positione tubi, recta PQ erit utique verticalis: occurrat ipsa eidem axi in A, & neglectâ crassitudine brachiorum adnexorum tubò telescopii, ac tubi ipsius, concipiantur rectæ PB, QC perpendiculares axi eidem productæ tantundem in P', & Q'. Recta QCQ' erit utique perpendicularis *axi FK, qui cum supponatur inclinatus ad horizontem*, deflectet *etiam ipsa a recta verticali Q'E, quæ erit po*sitio fili transeuntis per Q', *jacente puncto Q inter punctum P'*; & *filum ipsum. Facile determinabitur locus, in quo pro puncto* Q' *erroneo erit imprimendum* punctum Q; si id, quando ejus planum erat inferius, fuerit assumptum sub filo ad distantiam AQ ab axe conversionis æqualem distantiæ AP.

12. Filum adducetur secus planum ipsum superius ad *eam posi*tionem, in qua id transeat per punctum P' plani *inferioris*, & sub eo notabitur punctum D *in distantia* ab ipsius intersectione G cum axe *conversionis, quæ sit æqualis distantiæ* GP': facile patet, punctum quæsitum P, in quo *collocari debet punctum* Q correctum, fore in *medio* inter puncta D, Q'. Nam ob *latera* AP, AQ æqualia, erunt æqualia etiam PB, QC, & eorum dupla PP', QQ'. Pariter ob latera PB, P'B æqualia erunt æqualia etiam latera PA, P'G, & eorum dupla PQ, P'D: erunt autem parallelæ etiam rectæ PP', QQ' perpendiculares eidem axi FK, & rectæ PQ, DP' verticales, adeoque & anguli PQQ', DP'P æquales erunt, & proinde æquales inter se bases PD, PQ' æqualium triangulorum PQQ', DP'P, nimirum punctum P erit in medio inter puncta Q', D, ac recta jungens punctum P jam insculptum, & punctum Q novum insculpendum, erit perpendicularis axi FK. Hinc ita elevato, vel depresso fulcro *mobili*, ut filum transeat per ea duo puncta, recta transiens per ipsa erit verticalis, & consequenter horizontalis erit axis FK, qui eidem est perpendicularis.

13. Nihil oberit huic determinationi crassitudo illa neglecta bra-

chio-

chiorum, & teleſcopii: demonſtratio haberi poſſet accurata etiam ſine eo neglectu concipiendo plura plana parallela, ſed eſſet multo magis complicata; facile concipitur, tranſitum ejus fili per utrumque ex iis punctis ante, & poſt dimidiam converſionem indicare poſitionem horizontalem axis converſionis ipſius, qui eſt ejus operationis ſcopus: æqualitas diſtantiarum AP, AQ, & GD, GP' obtineri non poteſt, niſi æſtimatione aliquanto craſſiore, quam ob cauſam fieri poſſet, ut poſt primam correctionem puncti Q filum tranſiens per utrumque e punctis P, Q in una poſitione, non tranſiret accurate per utrumque etiam poſt dimidiam converſionem: ſed novâ correctione adhibitâ facile per attentationem deveniretur demum ad eam poſitionem puncti ejuſdem, quæ exhiberet congruentiam fili cum utroque puncto tam ante, quam poſt ſemi-converſionem illam: eâ vero ſemel obtentâ inſculpi poſſet id etiam ſecundum punctum, quod ſemel inſculptum ſemper deinde exhiberet congruentiam fili cum utroque puncto in poſitione tubi utraque cum horizontalitate axis requiſita.

14. Pro axe teleſcopii adhibetur aliud converſionis genus: collineatur in objectum aliquod terreſtre ſatis remotum, & proximè horizontale, in quo adſit aliquod punctum, quod agnoſci poſſit, & jaceat in interſectione filorum: tum ita invertitur inſtrumentum, ut cylindrus IK (fig. 1) abeat in fulcrum LL', & alter EF in NN'. Si interſectio filorum teleſcopii tendit ad idem punctum objecti; axis teleſcopii debet eſſe perpendicularis axi converſionis: quia ſi ſit obliquus deflectens in priore poſitione ad dexteram, vel ad lævam; debebit in poſteriore deflectere tantundem ad lævam, vel ad dexteram. Error, ſi adſit, non poterit corrigi, niſi movendo filum verticale motu horizontali ita, ut interſectio abeat ad punctum intermedium inter bina puncta, ad quæ tendebat in binis illis poſitionibus.

15. Si teleſcopium haberet micrometrum, in quo filum verticale moveri poſſet motu determinato ab indice; correctio ejus erroris eſſet admodum expedita: adduceretur interſectio ad idem punctum, ad quod tendebat in prima poſitione, notato numero partium micrometri ejus motus: tum retraheretur per dimidium

eum

eum numerum, ac motu horizontali fulcri *mobilis* adduceretur in-*tersectio ad illud* punctum, ad quod tendebat in prima positione. & is error esset correctus ita, ut nova conversione brachiorum deberet intersectio ipsa redire ad punctum idem. Demonstratio hìc etiam innititur duplicitati erroris in conversione. Sed micrometrum, quod reddat mobile filum verticale, *hujusmodi instrumentis* addi non solet, & plerumque ea fila affiguntur immobiliter annulo immisso intra *tubulum*, quod si fiat, & artifex in prima constructione *erraverit*, *male determinando lineolas*, *vel* foraminula, per quæ *filum affigendum transire debeat*; error deprehensus corrigi non poterit, *nisi ablato eo filo verticali*, & *alio apposito*, ac *affixo ope ceræ*, quo *casu longa attentatione utendum erit*, *donec id adducatur* ad positionem intermediam inter punctum primæ positionis, & punctum secundæ: nam extrahi debet lens ocularis ad movendum filum in latus, ut idcirco crassâ quadam æstimatione utendum sit in motu imprimendo, & lente *oculari* repositâ videndum, an deventum sit ad positionem debitam; quæ obtineri non poterit, *nisi demum* post longam, & molestam attentationem.

16. Accedit difficultas inveniendi in *objecto satis remoto* bina puncta, ad quæ in *binis* positionibus dirigi possit intersectio *filorum*, & quod agnosci possit post conversionem, & extractionem lentis ocularis, ac motum impressum filo verticali. Posset seligi *objectum* remotum, in quo possit collocari tabella cum chartâ alba, & recta verticali, ut fenestra, ad quam socius mitti posset, qui signo dato tabellam moveret horizontaliter, donec ea recta accurate tegeretur a filo verticali: is in secunda positione per motum chartæ adduceret eandem rectam ad positionem fili signis itidem datis, & notaret quantitatem motus impressi chartæ: tum lineam reduceret per dimidium ejus intervalli, eâ positione chartæ retentâ facienda esset ea mutatio fili, quæ ipsum *adduceret* ad eam novam positionem *ejus lineæ* : *sed* raro *admodum* occurrent ejusmodi objecta; in quibus id *præstari possit*, ac admodum difficulter exhibentur *ea signa in majore distantia*.

17. Posset adhiberi distantia exigua paucarum hexapedarum, *in*

qua

qua poſſint facile edi signa, & poſſit audiri vox ipſa : sed si dirigatur teleſcopium ad objecta nimis proxima, visio objecti ipſius evadit confuſa ; nisi lens ocularis removeatur ab objectivo ; quod si fiat, & fila remaneant eodem loco, evadit confuſa visio filorum : si autem removeantur etiam fila ; habetur periculum mutationis in eorum restitutione pro objectis remotioribus. Accedit, quod si objectum sit nimis vicinum, remotio lentis ocularis, & filorum deberet fieri major, quam tubulus ferat : ac ſæpe instrumentum ita est collocatum, ut nulla in ea directione occurrant objecta terreſtria, ne proxima quidem, ad quæ commode accedi poſſit.

18. Poteſt haberi visio ſatis distincta lineæ admodum etiam vicinæ sine remotione lentis ocularis ad corrigendum ſine inversione brachiorum errorem jam cognitum per formulas propositas in Opuſculo III, vel per eas, quas proponemus hìc inferius, quam methodum obtinendi eam visionem distinctam proponemus itidem inferius poſt eas ipſas formulas novas. Sed si ea adhiberetur ad corrigendum errorem deprehenſum per inversionem brachiorum ; habebitur aliquod periculum ab inæquali longitudine ipſorum, objecto exiſtente parum remoto. Nam teleſcopium non rediret per inversionem in locum ſuum, & diſtantia positionum teleſcopii eſſet æqualis duplæ differentiæ longitudinum eorundem brachiorum, unde oriretur parallaxis quædam. Inæqualitas unius lineæ in diſtantia cylindrorum, in quos desinunt brachia, ab interſectione filorum, quæ habentur intra tubos, quæ videtur facile committi poſſe, duplicata ſubtendit in diſtantia pedum 20 angulum, cujus sinus ad radium $= 1$ eſt $= \frac{2}{20 \times 144} = 0{,}0006944$; qui idcirco eſt $= 2'.23'',2$ ejus dimidium $1'.12'',1$ eſſet deviatio axis teleſcopii a recta perpendiculari ad axem conversionis, quod in ipſo æquatore inducit errorem fere 5 ſecundorum in tempore, & multo majorem in parallelis minoribus.

19. Inæqualitas diametrorum eorum cylindrorum, in quos desinunt brachia, poſſet timeri multo minor : ea non obeſt huic methodo verificandi positionem axis teleſcopii reſpectu axis conversionis.

sionis. Etiam si eæ diametri sint inæquales cum cavitatibus fulcrorum adhuc idoneis ad excipiendum cylindrum craſsiorem; adhuc tenuior deſcenderet ad imum cavitatis ipsum excipientis, adeoque, permutatâ positione brachiorum, axis transiens per medios ipsos cylindros descenderet quidem non nihil versus fulcrum tenuioris, sed adhuc remaneret ad sensum in eodem plano verticali, adeoque id nihil noceret positioni axis telescopii, qui si sit perpendicularis axi transeunti per medios cylindros, dirigetur ad idem objecti punctum in positione utrâque. At illa inclinatio nocet verificationi horizontalitatis axis conversionis factæ per positionem fili cum pondere transeuntis per puncta P, Q tam ante, quam post dimidiam conversionem tubi telescopii methodo superius exposita. Ea duplex congruentia ejus fili cum iis binis punctis in utraque positione telescopii ostendit horizontalitatem non axis conversionis, sed lineæ transeuntis per puncta ima cylindrorum ipsorum, & summa cavitatum pertinentium ad fulcra, quæ ipsos excipiunt. Si semidiametri cylindrorum ipsorum non sint æquales; axis transiens per eorum centra evadit inclinatus ad eam rectam, qua reddità horizontali, axis ipse remanet inclinatus ad horizontem. Si distantia fulcrorum sit pedis unius, sæpe autem eam mensuram ipsa non excedit, & differentia radiorum, quæ sunt dimidiæ crassitudines ipsorum cylindrorum, sit $\frac{1}{10}$ unius lineæ; sinus inclinationis erit $\frac{1}{1440}$, ut prius: adeoque a tam tenui inæqualitate earum crassitudinum potest induci error adeo sensibilis in æstimatione positionis ejus axis facta eâ methodo.

20. Accedit, quod in telescopio brevi, nam plerumque in ejusmodi instrumentis non adhibentur nisi telescopia pedum duorum vel trium, perquam exigua aberratio fili sustinentis pondus appensum a congruentiâ cum ipso medio accurato utriusque puncti inducit errorem sensibilem in æstimatione positionis verticalis punctorum ipsorum, adeoque in horizontalitate quæsita axis conversionis.

21. Aberratio axis ejusdem a positione perpendiculari respectu

lineæ

lineæ meridianæ, non poteſt deprehendi niſi per obſervationes aſtronomicas; ob cauſas autem expoſitas etiam inveſtigatio præcedentium errorum facta methodis expoſitis, quæ proponi ſolent in Elementis Aſtronomiæ, eſt periculoſa: quamobrem eſt admodum utilis methodus deprehendendi omnes eos tres errores per formulas, quæ adhibent obſervationes aſtronomicas, uti ſunt eæ, quas propoſuimus in Opuſculo III, quæ exhibent eos errores ſingulos: & id quidem eo melius, quod earum ope poſt deprehenſos eoſdem per errores momenti appulſus inventos in tribus poſitionibus teleſcopii directi ad tria Meridiani puncta computari poteſt error pro quavis alia poſitione, ut ejus ratio haberi poſſit, etiam nullâ correctione adhibita erroribus axium deprehenſis.

22. In Opuſculo III habentur num. 26 bina ſyſtemata formularum inventa binis diverſis methodis pro eruendis iis tribus erroribus axium, quos hìc indicavimus num. 5. Prima methodus innititur tribus æquationibus differentialibus ibidem demonſtratis in ipſo initio ejus Opuſculi, & expreſſis numero ipſius 5, quibus connectuntur inter ſe exiguæ differentiæ a quadrante binorum laterum, & angulorum trianguli ſphærici habentis bina latera parum diſcrepantia a quadrante, & conſequenter etiam binos angulos iis oppoſitos parum itidem diſcrepantes ab angulo recto. Hìc exhibebimus aliam methodum eruendi ope ſolius ſecundæ ex iis tribus alias tres æquationes, quæ non ſolum exhibeant ſingulos ex iiſdem erroribus eruendos ex iiſdem valoribus datis per eaſdem obſervationes aſtronomicas, ſed etiam iis inventis formulam pro correctione adhibenda momento appulſus aſtri cujuſcunque ad inſtrumentum, ut obtineatur momentum appulſus ad Meridianum.

23. Secunda ex iis tribus æquationibus erat ibi $dy - dz\cos.x - dq\sin.x = 0$, ubi y, & z ſunt bina latera parum abludentia a quadrante, x latus tertium, q angulus oppoſitus lateri y, dy, dz, dq ſunt exceſſus exigui quadrantis ſupra valores y, z, q, qui evadunt negativi, ſi pro exceſſibus habeantur defectus. Applicatio ipſarum refertur ad figuram ſecundam Tabulæ II, qua ipſa utemur hìc etiam. Ibi AOB eſt ſemihorizon orientalis, & ea tria puncta ſunt ejus cardines, auſtralis, orientalis, borealis,

P polus æquatoris nobis conspicui, Z zenith, S, S', S'' tres fixæ appellentes ad axem telescopii, qui appulsus hìc concipitur factus ante appulsum ad Meridianum: errores angulares sunt ZPS, ZPS', ZPS'', qui supponuntur exigui, & habendi sunt pro positivis, ubi appulsus ad instrumentum præcedit appulsum ad Meridianum; ac censendi erunt negativi, si hic præcedat illum: E est punctum superficiei sphæræ cælestis, ad quod dirigitur axis conversionis ex parte orientali, ED, OF sunt arcus perpendiculares, ille horizonti, hìc arcui PE producto, si opus sit, qui habebit polum in P, & abscindet arcum PF æqualem quadranti PO.

24. Error angularis ZPS habetur, ut ibidem monuimus, e differentia temporum inter appulsum observatum ad instrumentum, & appulsum ad Meridianum deductum ab altitudinibus correspondentibus: ea differentia redacta ad secunda horaria dicetur hìc n: eadem autem multiplicata per 15 exhibet numerum secundorum anguli ZPS, quem numerum dicemus hìc e, adeoque erit $e = 15n$: eodem pacto intelligemus n', n'' errores temporarios reductos ad secunda, & pertinentes ad angulos ZPS', ZPS'', tum $e' = 15n'$, $e'' = 15n''$ errores angulares: dicemus autem c, c', c'' distantias punctorum appulsus ad Meridianum a polo P. Valores n, & e censendi erunt positivi, si astrum appellat ad instrumentum, ante quam ad Meridianum, negativi, si post: valores c censendi erunt positivi, si punctum appulsus ad Meridianum jaceat a polo versus cardinem australem A, negativi si jaceat versus borealem oppositum: errores angulares multiplicati per $sin.c$ erunt reducti ad secunda circuli maximi, quæ ita evadent $= 15n sin.c$: in prima ex hisce postremis binis positionibus tam valor n, quam valor $n sin.c$ positivus respondebit puncto S jacenti versus orientem respectu Meridiani, sed in secunda, in qua directio motus diurni est contraria directioni positionis prioris, valor quidem n respondebit puncto S jacenti versus occidentem respectu ipsius, & valor $n sin.c$ iterum versus orientem ob duo signa negativa n, & c. Hic casus valoris c negativi non poterat occurrere in quadrante murali australi, potest autem in hoc instrumento, cujus telescopium excurrit per totum

semi-

semicirculum *Meridiani*. Ibi applicavimus primam e tribus æquationibus propositis illo numero 5 ad triangula SES', SES'', in quibus latera circa angulos in S non solum sunt parum abludentia a quadrante, sed etiam æqualia inter se, & inventis valoribus differentiæ utriusque angulorum ESS', ESS'' a recto, quarum alterius excessus supra alteram debuit æquari excessui alterius ex angulis PSS', PSS'' supra alterum, invenimus per æquationem inde erutam primum errorem, qui est excessus quadrantis supra arcum ES, & ibi *fuerat appellatus* dz. *Hoc invento* adhibuimus reliquas binas *æquationes differentiales ad inveniendum* arcum OE per arcus OF, EF, *ex quo deduximus reliquos* binos errores OD, & ED.

25. Hìc applicabimus solam illam æquationem *differentialem* secundam numeri 23 ad triangula EPS, EPS', EPS'', in quibus parum abludit a quadrante latus commune PE, ut & singula latera ES, ES', ES'', parum abludente angulo ad P ab angulo recto. *Hinc appellabimus* q angulum EPS, cujus differentia dq occurrit *in illa* æquatione: id efficiet *arcum* ES ipsi oppositum $= y$. Appellabimus autem x *arcum PS*, ut *is* valor occurrens in eadem *æquatione sit cognitus*, nimirum $= c$. Porro erit hìc dy error primus, nimirum excessus quadrantis supra arcum ES, qui arcus in eo Opusculo erat z, & ejus error dz.

26. Fiat præterea angulus OPE $= p$, qui valor censeatur positivus in casu expresso a figura, & facile, calculo absoluto, res transferetur ad quemvis alium casum. Erit ZPE $= 90° + p$; cum O sit polus Meridiani, adeoque angulus ZPO rectus: dempto inde angulo ZPS $= e$, erit SPE $= 90° + p - e$, adeoque $90° -$ SPE $= dq$ erit $= e - p$, quo valore substituto in ea æquatione differentiali pro dq, & c pro x habebitur æquatio data per valores dy, dz, e, p, c: similem exhibebunt triangula EPS', EPS'', *substitutis* e', c', & e'', c'' pro e, c, adeoque habebuntur sequentes tres æquationes.

$$dy - dz\cos.c + p\sin.c - e\sin.c = 0$$
$$dy - dz\cos.c' + p\sin.c' - e'\sin.c' = 0$$
$$dy - dz\cos.c'' + p\sin.c'' - e''\sin.c'' = 0$$

27. Ope

27. Ope harum trium æquationum facile *obtinentur* valores *dy*, *dz*, *p* : nam subtrahendo primam æquationem a secunda, & a tertia obtinentur binæ

$$dz(\cos.c - \cos.c') - p(\sin.c - \sin.c') + e\sin.c - e'\sin.c' = 0$$
$$dz(\cos.c - \cos.c'') - p(\sin.c - \sin.c'') + e\sin.c - e''\sin.c'' = 0$$

substitutis numeris (*), & liberato primo termino utriusque æquationis obtinentur bini valores dz, qui facti æquales inter se exhibent æquationem pro valore p. Eo cognito obtinetur dz per utrumvis e *præcedentibus ejus valoribus*, *qui non habebant nisi valores* c, c', c'', e, e', e'' *cognitos*, & p *jam inventum*, unde demum profluit etiam valor dy, *sive error primus per quamvis* e primis illis tribus æquationibus.

28. Hæc quidem methodus pro eruendo primo errore est operosior primâ illâ Opusculi III, sed ipsa exhibet facilius reliquos binos errores OD, & ED per eam unicam æquationem *differentialem* secundam sine recursu ad reliquas duas. Cum enim bina latera ES, PS sint y, & x, tertium PE erit z, & dz excessus quadrantis supra ipsum erit EF ob arcum PF æqualem quadranti PO (num. 23). Is igitur innotescet : innotescet autem etiam arcus OF, *qui metitur* angulum OPE $= p$, adeoque in triangulo rectangulo OFE *innotescet etiam* hypothenusa OE, & quidem eo facilius, quod id *triangulum considerari poterit ut rectilineum* ob exiguitatem laterum omnium.

29. Considerari etiam poterit triangulum *rectangulum* ODE, ut rectilineum, in quo habita hypothenusa OE habebuntur latera OD, ED, quæ sunt errores, secundus, & tertius, invento angulo EOD, qui facile invenietur : est enim *sin*.OE : *sin*.PE :: *sin*.

(*) Ita enim operatio redditur admodum facilis : nam divisio, vel multiplicatio numeri per numerum reddit numerum simplicem, dum, adhibitis formulis, quæ enascuntur ex aliarum multiplicatione, *crescunt numeri terminorum*, & *divisio immediata nec fieri potest : oriuntur formulæ complicatissimæ labore in immensum aucto, si applicatio numerorum reservetur pro formulis finalibus, quæ aliquando evadunt paginales. Pro evitandis erroribus, qui oriuntur* in applicatione facta ante formulam finalem e contemptu fractionum minorum, satis est addere unam notam decimalem, aut duas, vel tres, pro numero minore, vel majore operationum, quæ debent subsequi.

$sin.OPE = p : sin.POE$, ubi pro ſinu arcus PE parum abludentis a quadrante poterit adhiberi radius $= 1$, adeoque ſinus anguli POE erit $= \frac{sin.p}{sin.OE}$: poterunt autem adhiberi ipſi valores angulorum $OPE = p$, & OE inventi in ſecundis loco eorum ſinuum ob eorum exiguitatem, adeoque ſinus anguli POE erit $= \frac{p}{OE}$. Id autem patet etiam ex eo, quod initium arcus OP prope O poteſt aſſumi pro recta perpendiculari arcui OF, adeoque parallela rectæ FE, angulo POE exiſtente æquali angulo OEF, cujus ſinus eſt $\frac{OF}{OE}$, ubi OF menſura anguli OPE eſt $= p$. Tum vero habebitur angulus DOE demendo inventum POE ab altitudine poli DOP, & error ſecundus $OD = OE \times cos.EOD$, ac tertius $ED = OE \times sin.EOD$.

30. Præterea hæc determinatio valorum dy, dz, p in eo præſtat determinationi factæ per utramque methodum Opuſculi III, quod ope ipſius, habitis ſemel tribus erroribus inſtrumenti e, e', e'', qui reſpondent tribus poſitionibus teleſcopii directi ad tria data Meridiani puncta, invenitur error pro quavis alia poſitione per primam e primis tribus æquationibus numeri 26. Nam pro ea poſitione habebitur nova diſtantia c a polo, adeoque habebitur novus valor $e = \frac{dy - dzcos.c + p.sin.c}{sin.c} = \frac{dy}{sin.c} - dztan.c + p$. Hinc poterit haberi momentum appulſus novi illius aſtri ad Meridianum accuratus, etiam nullâ adhibitâ correctione inſtrumento tam relate ad poſitionem axis converſionis, quam relate ad axem teleſcopii reſpectu ipſius, quæ difficilius corrigitur. Valor e ſecundorum angularium diviſus per 15 exhibebit ſecunda horaria n : addenda tempori appulſus ad inſtrumentum, vel ab eo demenda, prout valor e obvenerit poſitivus, vel negativus. Sed ubi agitur de inſtrumento tranſituum, ut hic, ubi id juxta num. 24 poteſt dirigi etiam ad punctum Meridiani jacens infra polum in arcu PB, nimirum in directione oppoſita illis, quæ conſideratæ ſunt in eruendis formulis, valor c diſtantiæ a polo ha-

habendus est, ut negativus. Ibi fixa evadit orientalior Meridiano post appulsum ad ipsum, non ante, ut in reliquo omni PA Meridiani ipsius.

31. Si instrumentum sit fixum in quopiam observatorio; poterit computari *tabula errorum pro diversis distantiis a polo*, quæ adhibeatur *pro corrigendis omnibus observationibus*, quæ eodem instrumento ibi manente instituantur. *Si autem id instrumentum sit portatile; hæc formula potest esse admodum utilis pro determinanda longitudine loci incogniti, ad quem navis appellat*. Educto ipso instrumento extra navim, fieri potest, *ut vel locus ipse, vel tempus, non permittat correctionem ullam adhibendam positioni fulcrorum, vel axi conversionis*. Si collocato instrumento per crassam æstimationem, assumantur eâdem nocte altitudines correspondentes pro tribus fixis appellentibus ad tria puncta Meridiani satis distantia inter se, ex quibus deducantur momenta appulsuum ad Meridianum, observentur autem appulsus earundem ad axem telescopii; habebuntur tres errores e, e', e''. *Si autem* eâdem nocte observetur etiam appulsus limbi lunaris ad filum ejusdem *telescopii perpendiculare filo horizontali*, habebitur etiam appulsus centri *lunæ* ad idem *filum ob cognitam ejus* semidiametrum. Innotescet utique valor c ei *positioni respondens* saltem parum abludens a vero, adeoque *innotescet momentum* appulsus centri ipsius ad Meridianum, qui *collatus cum loco lunæ computato pro ephemeridibus*, vel cum tempore transitus ipsius per Meridianum observati in aliquo alio loco cognito, habitâ ratione motus proprii lunæ, exhibebit per operationes notas Astronomis longitudinem ejus loci in primo casu nocte eâdem ad dirigendum reliquum cursum, & in secundo post ejus observationis notitiam, multo accuratius, quam per distantiam lunæ ipsius ab aliqua fixa assumptam per octantem reflexionis.

32. Secundum systema formularum numeri *26 Opusculi III* eruitur in *fig.* 4 Tabulæ II *sine ullo subsidio formularum differentialium* concipiendo arcus ES, ES', ES'' *productos* usque ad Meridianum in M, M', M'', & ex *puncto* O arcus OI, OI', OI'' perpendiculares iisdem tribus arcubus. Obvenit prima formula ejus syste-

systematis pro valore dz primi erroris simplex, & elegans, ex qua fluunt reliquæ duæ pro reliquis binis erroribus. Eadem obvenit hìc mihi e figura non nihil immutata, cujus consensus cum priore confirmat utramque. Sunt hìc (Tab. VII fig. 3) puncta A, O, D, B, P, Z, E, S, S', S'' eadem ac in fig. 4 Tabulæ II, nimirum eadem etiam ac in fig. 2 ipsius, qua usi sumus in determinatione præcedente, sed puncta M, M', M'' sunt occursus arcuum OS, OS', OS'' cum Meridiano AZB, & I, I', I'' sunt puncta, in quibus occurrunt iis arcubus arcus habentes polos in S, S', S'', & transeuntes per E, qui poterunt assumi pro lineis rectis perpendicularibus ipsis, ut & omnes reliqui arcus figuræ EDOII'I'' haberi poterunt itidem pro rectis lineis. Erunt autem OI, OI', OI'' excessus arcuum OS, OS', OS'' supra arcus æquales ES, ES', ES'', figura OII'I''E erit inscripta circulo habenti diametrum OE ob angulos rectos ad I, I', I'', & arcus MM', MM'', M'M'' erunt hìc accurate mensura angulorum MOM', MOM'', M'OM'', sive IOI', IOI'', I'OI'', quorum chordæ II', II'', I'I'' erunt ad diametrum OE, ut sinus eorundem angulorum ad radium $= 1$ (*).

33. Dicatur, ut in ipso Opusculo III, t recta OE, tum hìc etiam c, c', c'' exprimunt arcus PM, PM', PM'', qui sunt quam

(*) Adhibuimus hoc theorema etiam in Opusculo III sine demonstratione, quæ quidem est facilis. In circulo Meridiano, cujus polus est O, mensura anguli IOI' est totus arcus MM' $= c - c'$, at in circulo, cujus diameter est OE, mensura ejusdem anguli terminati ad ejus peripheriam in O, est dimidium arcus subtensi a chorda II', cujus dimidii sinus ad suum radium $= \frac{1}{2}$OE est dimidium ejusdem chordæ, adeoque est sinus dimidii arcus subtensi ab ea chorda $= sin.(c - c')$ ad radium $= 1$, ut $\frac{1}{2}$II' ad $\frac{1}{2}$OE, nimirum ut II' ad OE. Hinc valor chordæ II' est OE $\times\, sin.(c - c') = t\,sin.(c - c')$, & eadem est ratio pro valoribus chordarum II'', I'I'' hìc adhibitis. In figura 4 Tab. II habebantur eædem expressiones, quia ibi etiam ob viciniam punctorum E, O, & viciniam punctorum M pertinentium ad productiones arcuum ES cum punctis iisdem pertinentibus ad productiones arcuum OS adhibitas hìc in figura 3 Tabulæ VII, ille angulus IEI', sive MEM' potest haberi pro æquali huic angulo IOI', sive MOM' $= c - c'$.

proxime æquales distantiis fixarum a polo (*). Dicatur autem ad servandam analogiam denominationum dy excessus quadrantis supra arcus ES, ES$'$, ES$''$, qui ibi erant dz, ac e, e', e'' tres errores angulares, qui errores, si concipiantur arcus PS, PS$'$, PS$''$, erunt anguli SPM, SPM$'$, SPM$''$, & exhibebunt valores SM $=$ $e\sin.c$, SM$'$ $= e'\sin.c'$, SM$'' = e''\sin.c''$: arcus autem MM$'$, MM$''$, M$'$M$''$, mensuræ angulorum IOI$'$, IOI$''$, I$'$OI$''$ erunt $c - c'$, $c - c''$, $c' - c''$, II$'$ $=$ OE$\times\sin.$IOI$'$ $= t\sin.(c - c')$, II$'' =$ $t\sin.(c - c'')$, I$'$I$'' = t\sin.(c' - c'')$. Porro excessus dy quadrantis OM supra arcum $IS = ES$ erit $= OI + SM$, adeoque OI $= dy -$ SM $= dy - e\sin.c$, & eodem pacto erit $OI' =$ $dy - e'\sin.c'$, OI$'' = dy - e''\sin.c''$.

34. *Jam vero in quadrilineo* OII$'$I$''$ *inscripto in circulo erit* OI$''\times II' + OI\times I'I'' =$ OI$'\times$II$''$, sive $tdy\sin.(c - c') - te''\sin.c''$ $\sin.(c - c') + tdy\sin.(c' - c'') - te\sin.c\sin.(c' - c'') =$ $tdy\sin.(c - c'') - te'\sin.c'\sin.(c - c'')$, vel dividendo *per* t, & transponendo $dy\sin.(c - c') + dy\sin.(c' - c'') - dy\sin.(c - c'')$ $= e''\sin.c''\sin.(c - c') + e\sin.c\sin.(c' - c'') - e'\sin.c'\sin.(c - c'')$, ac demum pro dy, *prorsus ut in Opusculo III* num. 27 pro dz, *obtinetur*

$$dy = \frac{e''\sin.c''\sin.(c - c') + e\sin.c\sin.(c' - c'') - e'\sin.c'\sin.(c - c'')}{\sin.(c - c') + \sin.(c' - c'') - \sin.(c - c'')}$$

35. In-

(*) Arcus SM potest considerari, ut arcus paralleli habentis polum in P, ut arcus circuli maximi transeuntis per E, & S, & ut arcus itidem circuli maximi transeuntis per O, & S. In quovis ex hisce tribus modis assumatur, ejus magnitudo linearis haberi poterit pro eadem exigua recta perpendiculari ad arcum Meridiani ob viciniam puncti M respectu hujus: is arcus assumptus primo modo exhibet numerum secundorum sui paralleli $15n$, qui est error angularis, & hic appellatur e: is evadit $15n\sin.c$ cum reducitur ad numerum secundorum circuli maximi: sed inferius in alia methodo proponenda appellabimus e ipsum valorem $15n\sin.c = e\sin.c$ facilioris scriptionis causa: verum dum hic valor e habet ubique signum idem ac n, ibi ejus signum pendebit etiam a signo valoris c, adeoque in punctis arcus PA erit idem, ac signum valoris n, & e, in punctis autem arcus PB *erit ipsi contrarium ob valorem* c positivum in primo casu, negativum in secundo. Consideratur autem ut productio arcus ES in figuris 2, 3, 4 Tabulæ II, & arcus OS in fig. 3 Tabulæ VII.

35. Invento hoc valore primi erroris fit progressus in num. 24 Opusculi ipsius ad determinationem reliquorum binorum OD, ED, determinando primum distantiam EO poli conversionis a cardine orientali. Ea obtinetur per resolutionem trianguli IOI'', in quo habetur angulus IOI'', cujus mensura est arcus MM'' $= c - c''$, & invento valore dy, habebuntur latera OI $= dy - e sin.c$, & OI'' $= dy - e'' sin.c''$, quæ appellantur ibidem n, & n'', unde innotescit angulus II''O $=$ IEO, cujus sinus cum sit ad radium ut OI valor jam cognitus ad EO, hæc innotescit: eruitur valor analyticus ejus rectæ $= t$ expressus in formulis secundi systematis numeri 26 ejusdem Opusculi III, congruens cum invento methodo priore, & expresso in formulis systematis primi. Ulteriore progressu invenitur formula pro valore anguli EOD, qui fit $= r$, unde fluit secundus error OD $= t cos.r$, & tertius ED $= t sin.r$.

36. Verum hic is angulus invenietur multo facilius. Nam innotescit angulus AOM, altitudo supra horizontem primæ e tribus fixis in ejus appulsu ad Meridianum, quam quidem satis est habere veræ proximam, & angulus IOE complementum inventi IEO, sive II''O, quorum summæ supplementum est ipse angulus EOD $= r$.

37. Methodus solvendi problema per tres æquationes differentiales exhibuit numero 30 valorem erroris e pro quavis alia distantia c a polo: potest idem inveniri admodum facile etiam per hanc secundam solutionem pro quovis alio dato puncto Meridiani, ut novo M: habebitur ejus distantia c a polo, & elevatio AM supra horizontem, adeoque angulus AOM, qui ablatus ab angulo AOE jam invento relinquet angulum EOI, adeoque habebitur OI $=$ OE $\times$ cos. EOI, qui valor cum sit $= dy - e sin.c$, erit $e = \frac{\text{OI} + dy}{sin.c}$ valor jam cognitus, & simplicior illo invento per formulam indicatam erutam ex iis æquationibus differentialibus methodi primæ.

38. In eodem Opusculo III habetur a num. 19 ratio inveniendi facilius errorem secundum, & tertium, ubi jam innotescat pri-

mus ; quæ reſpondet primæ methodo ſolvendi hoc problema. Id ipſum admodum facile præſtari poteſt ope hujus ſecundæ methodi ſolventis idem problema independenter a formulis differentialibus: utrobique autem tum ſufficiunt binæ obſervationes tantummodo. Sint eæ S, & S'': habito primo errore dy, habebuntur valores OI $= dy - e\sin.c$, & OI'' $= dy - e''\sin.c''$, cum angulo IOI'' $= c - c''$. Quare invenietur, ut prius, angulus II''O = IEO, & OE $= \frac{\text{OI}}{\sin.\text{IEO}}$: *tum angulus* AOE = AOM + IOE, per cujus coſinum, & *ſinum multiplicando* OE *obtinentur quæſiti* errores OD, ED. Porro *ea methodus erit admodum utilis pro uſu hujuſmodi inſtrumenti portatilis*. *Nam in tranſlatione* inſtrumenti *ipſius poſitio axis teleſcopii* reſpectu axis converſionis nequaquam *mutatur*, adeoque eo errore ſemel invento, & vel correcto, vel etiam adnotato tantummodo, ut adhiberi poſſit ad inveniendos valores OI, OI'', habebitur per ſolas obſervationes duarum *fixarum* quidquid requiritur ad inveniendum errorem pro *alio quovis* puncto Meridiani, ut pro eo, ad quod appellit luna.

39. Agendo *de hoc ipſo argumento in alio* quodam Opuſculo *incidi adhuc in aliam methodum ſolvendi idem problema*, quam *hìc adjiciam : adhibebo autem ad hunc uſum figuram 3 Tabulæ 2*, quam adhibui in Opuſculo *III numero* 20 ad inveniendos errores ſecundum, ac *tertium*, invento primo. *In* ea FNG eſt circulus *maximus habens* polum in E, qui polus eſt etiam communis *circulo* tranſeunti per puncta S, quorum duo habentur in eadem figura S, & S'', facile autem poteſt mente ſuppleri tertium intermedium S', quod quidem non eſt neceſſarium, nec vero ipſum tertium S'' ad comprehendendam vim methodi. Is circulus occurrit horizonti in F, & G, Meridiano in N, cuivis arcui ES in s : erit autem hìc etiam SM $= e\sin.c$, quem valorem ſcriptionis brevioris cauſâ hic appellabimus e juxta adnot. ad num. 33, & Ss exceſſus quadrantis Es ſupra arcum ES, nimirum error axium primus, quem hìc appellabimus x pro dz, vel pro dx, tum b, & z arcus ZM, ZN poſitivos, ſi jaceant verſus auſtrum, & y angulum ANF poſitivum, ſi jaceat verſus orientem.

40. Pa-

40. Patet, fore $Ms = e - x$, & $NM = b - z$, qui arcus assumi poterit pro arcu Ns hypothenusâ trianguli rectanguli $QNMs$, adeoque ex theorematis Trigonometriæ sphæricæ erit $sin.sM = sin.Ns \times sin.MNs$, ubi posito arcu exiguo sM pro suo sinu, & angulo MNs pro suo, fiet $e - x = ysin.(b - z)$, unde orietur æquatio $x + ysin.(b - z) - e = 0$, & pro quavis fixa æquatio similis, posito e', & b', ac e'', & b'' pro e, & b.

41. Subjiciam hìc tres æquationes inde ortas, quæ continent tres valores incognitos x, y, z, cum sex cognitis b, b', b'', e, e', e''. Iis æquationibus rite evolutis innotescent eæ ipsæ incognitæ, & ope ipsarum singuli errores axium quæsiti, ac error momenti appulsus pro quovis alio puncto Meridiani. En æquationes ipsas.

$$\text{I. } x + ysin.(b - z) = e$$
$$\text{II. } x + ysin.(b' - z) = e'$$
$$\text{III. } x + ysin.(b'' - z) = e''$$

42. Pro evolutione earum æquationum in primis subtrahendo secundam, & tertiam a prima, orientur aliæ duæ: IV. $ysin.(b-z) - ysin.(b' - z) = e - e'$: V. $ysin.(b - z) - ysin.(b'' - z) = e - e''$. Ex iis æquationibus oritur proportio $sin.(b - z) - sin.(b' - z) : sin.(b - z) - sin.(b'' - z) :: e - e' : e - e''$. Ex ipsa pluribus methodis potest erui valor z, quo invento habetur y in æquatione IV, tum x in I.

43. Proponemus tres methodos pro eruendo valore z. Prima adhibet constructionem geometricam simplicem, & elegantem. In circulo quovis (fig. 4) capiantur arcus ZS, ZS', ZS'' similes iis arcubus datis in fig. 2 Tabulæ II: ducatur chorda SS', producaturque in M, captâ $SM = \frac{e - e''}{e - e'} \times SS'$, quæ debet assumi ab S versus S', vel versus partem oppositam, prout valor $\frac{e - e''}{e - e'}$ fuerit positivus, vel negativus: ducatur $S''M$, tum radius CN ipsi parallellus directione eâdem. Is determinabit arcum $ZN = z$. Si enim ducantur $SH, S'H', S''H''$ perpendicula in NC, & MS''

pro-

producta occurrat rectæ SH in L', ac eidem occurrat in L recta S'L ipsi parallela; patet fore SH, S'H', S''H'' sinus arcuum NS, NS', NS'', qui facto NZ = z, erunt $b - z$, $b' - z$, $b'' - z$, adeoque SL = $sin.(b - z) - sin.(b' - z)$; & SL' = $sin.(b - z) - sin.(b'' - z)$. Erit autem SL : SL' :: SS' : SM :: $e - e'$: $e - e''$, ut oportebat.

44. Secunda methodus utetur calculo trigonometrico. Ductâ SS'' habebuntur in triangulo SS''M bina latera SS'', SM cum angulo ad S. Latus SS'' est chorda distantiæ punctorum Meridiani, ad quæ dirigitur telescopium in prima, & tertia observatione, quæ chorda est dupla sinus dimidiæ ejus distantiæ. Eodem pacto invenitur chorda SS', quæ est dupla sinus dimidiæ distantiæ punctorum observatorum in prima, & secunda observatione. Per ipsam invenietur SM, quæ ex num. præcedenti est $= \frac{e - e''}{e - e'} \times$ SS': anguli autem S''SM mensura est dimidius arcus S'S'', sive dimidia distantia tertii puncti observati a secundo. Resoluto eo triangulo, habebitur angulus SS''M, adeoque ejus supplementum SS''L'. Si concipiatur MS'' producta, donec iterum occurrat peripheriæ circuli in P: arcus PS erit duplus mensuræ ejus anguli, cum is ipsi insistat ad peripheriam: quamobrem is etiam dabitur, adeoque & totus PS'' = PS + SS'', & S''N, qui debet esse complementum dimidii PS'': nam completâ diametro NCR, erit PS'' supplementum PR + S''N, qui arcus debent esse æquales ob PS'', RN parallelas, adeoque singuli ii arcus erunt residui arcus $\frac{1}{2}$PS ad quadrantem. Dempto eo complemento arcus $\frac{1}{2}$PS'' ab arcu cognito ZS'' relinquetur quæsitus ZN.

45. Tertia methodus reducet proportionem numeri 30 evolvendo $sin.(b - z) = sin.b\,cos.z - cos.b\,sin.z$, atque id in omnibus tribus $b - z$, $b' - z$, $b'' - z$. Habebitur $sin.(b - z) - sin.(b' - z) = (sin.b - sin.b')cos.z - (cos.b - cos.b')sin.z$, & similis valor habebitur, posito b'' pro b'. Hinc ea proportio reducetur ad sequentem: $(sin.b - sin.b')cos.z - (cos.b - cos.b')sin.z : (sin.b - sin.b'')cos.z - (cos.b - cos.b'')sin.z :: e - e' : e - e''$. Dividantur priores bini termini per $cos.z$, & ponatur

tan.z pro $\frac{sin.z}{cos.z}$; erit $(sin.b - sin.b') - (cos.b - cos.b')\, tan.z :$ $(sin.b - sin.b'') - (cos.b - cos.b'')\,tan.z :: e - e' : e - e''$.
Inde multiplicando terminos extremos, & medios, ac liberando *tan.z*, erit demum

$$tan.z = \frac{(sin.b - sin.b')(e - e'') - (sin.b - sin.b'')(e - e')}{(cos.b. - cos.b')(e - e'') - (cos.b - cos.b'')(e - e')}.$$

46. Solet apponi, ut diximus, index affixus axi conversionis, qui in semicirculo immobili indicet distantiam a zenith punctorum Meridiani, ad quæ dirigitur axis telescopii. Hinc habebitur proxime vera distantia a zenith puncti, ad quod is axis dirigitur in tribus observationibus, quos valores diximus b, b', b''. Assumemus autem b pro puncto maxime australi, b'' pro maxime boreali, quamvis possent assumi ordine quovis: facile invenientur etiam e, e', e'', qui sunt (num. 39) numeri n secundorum temporis pertinentium ad singulos errores ducti in 15, & in sinum distantiæ a polo punctorum observatorum. Ea habetur pro singulis addendo distantiæ poli a zenith, quæ est complementum latitudinis loci, distantiam a zenith puncti Meridiani, ad quod telescopium dirigitur, si id jacet ad austrum, demendo, si jacet ad Boream: in hoc secundo casu si ea distantia a zenith fuerit major, quam distantia ipsius zenith a polo; residuum ex subtractione erit negativum, & existente numero n positivo in appulsu ad axem telescopii priore appulsu ad Meridianum, valor e adhibendus in hisce formulis erit negativus, juxta adnotationem ad numerum 33. Is enim est $= 15 n\, sin.c$, & existente numero n positivo, ubi appulsus ad instrumentum præcedit appulsum ad Meridianum, ac arcu c negativo, in eo casu evadit negativus valor $15 n\, sin.c$. Id accidit, punctis Meridiani positis ex parte boreali infra polum, in quibus directio motus diurni est contraria directioni ejusdem pertinentis ad omnia reliqua puncta Meridiani extantia supra polum.

47. Ut unico intuitu pateat, quid agendum sit, proponemus hic primo loco denominationes valorum, qui adhibendi erunt, tum formulas, & regulas pro omnibus tribus methodis propositis.

Nu-

Numeri ſecundorum temporis inventi in tribus errori-
bus, poſitivi, ſi appulſus ad axem teleſcopii ſub-
ſequatur appulſum ad Meridianum . . . . n, r'
Distantiæ a zenith punctorum Meridiani poſitivæ ver-
ſus plagam meridionalem incipiendo a maxima . . . b, b', b''
Distantiæ earundem a polo poſitivæ verſus eamdem
plagam . . . . c, c', c''
Valores $15 n' \sin. c$ . . . . e, e', e''
Arcus ZN poſitivus verſus auſtrum . . . . z
Angulus ANF poſitivus verſus orientem . . . . y

48. *Prima methodus pro inveniendo z.*

Capiantur arcus circuli (fig. 4) $ZS, ZS', ZS'' = b, b', b''$ ad læ-
vam, vel dexteram, prout fuerint poſitivi, vel negativi.

Aptatâ in circino proportionis SS' ad numerum $e - e'$, capiatur linea reſpondens numero $e - e''$, & fiat ipſi æqualis SM in SS' producta verſus S'', vel S, prout $e - e'$, $e - e''$ fuerint ejuſdem ſigni, vel ſignorum oppoſitorum.

Ducatur $S''M$, & ipſi parallelus radius CN in directione eâdem.

Valor z erit arcus ZN poſitivus, vel negativus; prout jacuerit ad ſiniſtram, vel ad dexteram.

49. *Secunda methodus pro inveniendo z.*

Inveniantur valores chordarum SS', SS'' dupli ſinus dimidiorum arcuum $b - b'$, $b - b''$.

Inveniatur $SM = \frac{e - e''}{e - e'} \times SS'$.

Inveniatur angulus $MS''S$ in triangulo, cujus latera SS'', SM inventa, & menſura ânguli intercepti ad $S = \frac{1}{2} S'S'' = \frac{1}{2}(b' - b'')$.

SP menſura dupli ejus ſupplementi addatur arcui $SS'' = b - b''$, & capiatur complementum ejus dimidii, quod erit $S''N$.

Valor $ZS'' - S''N = b'' - S''N$, erit valor z quæſitus.

50. In prima harum ſolutionum Geometria ipſa exhibebit in caſibus omnibus directiones rectarum, & per ipſas poſitionem puncti N reſpectu Z. In ſecunda haberi poterunt mutationes angulorum in eorum ſupplementa, & ſummarum in differentias, ac viceverſa, quæ determinandæ ſunt per leges generales transfor-
ma-

rationis locorum geometricorum. Infinitum eſſet perſequi ſingillatim caſus omnes diverſos. Satius eſt delineare cum aliqua accuratione ſchema conforme ſolutioni primæ, quod dirigat calculum numericum. Trigonometria adhiberi poterit ad majorem accurationem: quanquam ipſa constructio abunde hic erit, ubi ipſe valor ZN determinatur per quantitates e, e', e'' nimis exiguas, ut idcirco non poſſit obvenire accuratus, quæ tamen accuratio nec eſt neceſſaria, cum debeat adhiberi ad determinandos valores, x, y, admodum exiguos.

51. *Tertia methodus pro inveniendo z.*

Hæc methodus conſiſtit in ordine calculi numerici pro evolutione formulæ numeri 45 exhibentis valorem $tan.z$. Inventis valoribus e, e', e'', obtinebuntur per ſubtractionem coefficientes $e - e'$, & $e - e''$: ſinus, & coſinus arcuum b, b', b'' aſſumentur e tabulis naturales, non logarithmici: inde obtinebuntur per ſubtractionem coefficientes $sin.b - sin.b'$, $sin.b - sin.b''$, $cos.b - cos.b'$, $cos.b - cos.b''$: coefficientibus $sin.b - sin.b'$, & $cos.b - cos.b'$ adſcribendi ſunt ipſorum logarithmi: logarithmus idem coefficientis $e - e'$ additus utrique *ſeorſum exhibebit* logarithmum primi termini *tam numeratoris, quam denominatoris, quorum numeri invenientur in tabulis*. Eodem modo *invenientur logarithmi primorum coefficientium ſecundi termini tam numeratoris, quam denominatoris, quibus addetur logarithmus coefficientis ſecundi* $e - e''$, & habebuntur logarithmi utriuſque ſecundi termini cum eorum numeris, ex quibus habebitur in numeris tam numerator, quam denominator, & per horum logarithmos logarithmus fractionis totius, qui cum ſit logarithmus tangentis arcus z, invenietur arcus ipſe. Sinus, & coſinus aſſumi poterunt ad radium 10000, ad evitandam neceſſitatem partium proportionalium in aſſumendis logarithmis coefficientium: obveniet eo pacto valor z non quidem accuratus, ſed tamen ſatis proximus pro inveniendis cum ſufficienti accuratione exiguis erroribus, pro quorum determinatione is arcus eſt ultimo adhibendus.

52. Invento arcu z habebuntur in æquatione IV numeri 42 arcus $b - z$, $b' - z$, adeoque & eorum ſinus, quos itidem ſatis eſt

assumere ad radium 10000. Valor $e - e'$ divisus per horum differentiam exhibebit valorem anguli ANF $= y$: nam ex ea æquatione eruitur valor $y = \frac{e - e'}{sin.(b - z) - sin.(b' + z)}$ satius erit dividere numeratorem per denominatorem immediate sine logarithmis, cum satis esse debeant in angulo ita exiguo notæ duæ, vel ad summum tres. Habito autem z, & y, habetur per quamvis e tribus æquationibus numeri 41 valor x, ut per primam, e qua eruitur $x = e - y\,sin.(b - z)$.

53. *In pluribus casibus formula pro valore z potest reddi multo simplicior*. Si altera ex *observationibus extremis fiat in horizonte*; $sin.b$, vel $sin.b''$ erit $= 1$, & $cos.b$, vel $cos.b'' = 0$. *Si tertia, vel secunda fiat in ipso zenith*; erit $sin.b''$, vel $sin.b' = 0$, $cos.b''$, vel $cos.b' = 1$. Termini habentes pro factore aliquam quantitatem evanescentem in iis casibus evanescent.

54. Porro potest observatio tertia institui in horizonte, *si nimirum habeatur fixa habens distantiam a polo æqualem altitudini poli*, & satis clara, ut trans vapores horizontis videri possit in horizonte ipso, in quo *appelleret ad Meridianum* infra polum; quia posset *momentum transitus per Meridianum determinari per observationem altitudinum correspondentium ante*, & *post eam maximam depressionem*: *id non posset* fieri ex parte australi pro primo valore b; quia fixa appellens ad Meridianum ex ea parte in *horizonte nunquam habet altitudinem*, quæ *possit observari*.

55. Facile esset persequi casus singulos, & evolvere formulam pro iis; sed res abiret in longum cum exigua utilitate: satis est in singulis casibus expungere eum terminum, qui fit $= 0$. Hinc, iis omissis, progrediemur ad eruendam hac methodo determinationem singulorum e tribus erroribus pertinentibus ad positionem axium dependenter a tribus valoribus x, y, z inventis ope *illarum trium æquationum* numeri 41, in quibus *supponuntur cogniti tres errores* e, e', e'' *instrumenti indicantis appulsum ad Meridianum* in tribus ejus punctis *distantibus a polo* P *per tres arcus* cognitos c, c', c''.

56. Error deviationis axis telescopii a positione perpendiculari

respe-

respectu axis conversionis, qui est error axium primus, est (numer. 39) ipse valor x inventus. Reliqui bini facile invenientur per valores y, & z in fig. 3 Tab. II, ex qua erutæ sunt *illæ* tres æquationes numeri 41. Ibi OEH est arcus circuli maximi habentis polum in N occurrens arcubus NG, NB in H, & I. Is debet transire per O, & per E, cum utrumque ex iis punctis distet a puncto N per quadrantem, punctum quidem O, quia id est polus Meridiani transeuntis per N, punctum vero E, quia id est polus circuli maximi FNG. *Hinc arcus* NI est quadrans æqualis *quadranti* ZB, *adeoque dempto intermedio* ZI remanet arcus NZ $= z$ æqualis arcui IB, qui metitur angulum EOD, quamobrem *is angulus est jam* cognitus. Angulus autem HNI $=$ MNs $= y$, habet pro mensura arcum HI, qui debet esse æqualis arcui OE, cum OI, & EH sint quadrantes ob punctum O polum Meridiani, & E polum circuli FNG. Hinc arcus OE est $= y$, & angulus EOD $= z$, adeoque secundus error OD $= y\cos.z$, & tertius ED $= y\sin.z$. Quare existente primo errore $= x$, habentur omnes tres errores quæsiti per tres valores x, y, z erutos ex *illis tribus* æquationibus numeri 41.

57. Patet, *correcto primo errore* x *pertinente ad axem telescopii, vel jam semel invento, pro instrumento portatili, cujus translatio non mutat positionem mutuam* axis ejusdem respectu axis *conversionis, ut monuimus numero* 38, inveniri hic etiam, & *quidem multo facilius* reliquos duos valores y, & z per solos duos errores e, & e' ope duarum tantummodo priorum æquationum ejus numeri. Eæ evadent $y\sin.(b-z) = e - x$, & $y\sin.(b'-z) = e' - x$, ubi si valores $e - x$, & $e' - x$ jam cogniti dicantur m, & m', erit $\sin.(b-z) : \sin.(b'-z) :: m : m'$, quod reddet multo simpliciores omnes tres methodos adhibitas pro eruendo valore z ex illa proportione complicatiore.

58. *Pro* prima methodo adhibente constructionem fiet (fig. 4) $m - m' : m :: SS' : SM'$, & ducetur recta M'C, quæ determinabit punctum *N: erit enim* SH $= \sin.$NS $= \sin.(b-z) :$ S'H' $= \sin.$NS' $= \sin.(b'-z) ::$ SM' : S'M' $:: m : m'$, ut oportebat. Pro methodo trigonometrica si concipiatur radius CA,

qui ſecet biſariam arcum SS'; idem ſecabit biſariam etiam c' quadam SS' in B, & innoteſcet tam BM' = SM' = $\frac{1}{2}$SS', quam CB = $cos.\frac{1}{2}$SAS' = $cos.\frac{1}{2}(b - b')$, adeoque invenietur angulus BCM' per ſuam tangentem $\frac{BC}{BM'}$, cujus menſura, cum ſit arcus NA, & habeatur AS = $\frac{1}{2}$SAS' = $\frac{1}{2}(b - b')$, innoteſcet ZN = ZS — NA — AS = z: tum etiam y, cujus valor erit $\frac{e - x}{sin.(b - z)}$ e prima æquatione numeri præcedentis. Pro tertia methodo algebraica habebitur $m' sin.(b - z) = m sin.(b' - z)$, nimirum $m' sin.b\, cos.z - m' cos.b\, sin.z = m\, sin.b'\, cos.z - m\, cos.b'\, sin.z$, ſive $m' sin.b\, cos.z - m\, sin.b'\, cos.z = m' cos.b\, sin.z - m\, cos.b'\, sin.z$, ac demum $tan.z = \frac{sin.z}{cos.z} = \frac{m' sin.b - m\, sin.b'}{m' cos.b - m\, cos.b'}$.

59. Ope valorum x, y, z, invenitur error tranſitus per Meridianum male indicati ab inſtrumento pro quovis alio puncto Meridiani, cujus ſit data diſtantia b a zenith, quæ debet conſiderari poſitiva, vel negativa, prout id punctum jacebit inter zenith, & cardinem auſtralem A, vel inter ipſum, & cardinem borealem B. Erit enim (num. 41) valor $e = x + y. sin.(b - z)$. Is erit = $15 n\, sin.c$, exiſtente c diſtantia puncti Meridiani, ad quod aſtrum appellit, a polo, & n numero ſecundorum temporis, qui debet addi momento appulſus ad inſtrumentum, ut habeatur momentum appulſus ad Meridianum, vel inde auferri, prout valor n, qui erit = $\frac{e}{15 sin.c}$, fuerit poſitivus, vel negativus. Porro ſigna valorum x, y, z pendebunt a ſignis trium valorum b, b', b'', & trium e, e', e'' adhibitorum in illis tribus æquationibus ejuſdem numeri 41, in quibus quivis valor b erit poſitivus, vel negativus, prout punctum appulſus jacuerit ad auſtrum, vel ad boream reſpectu zenith, & valores e pendebunt a valore $15 n\, sin.c$, ubi n erit valor poſitivus, vel negativus, prout appulſus ad inſtrumentum fuerit anterior, vel poſterior reſpectu appulſus ad Meridianum, & $sin.c$ valor poſitivus, vel negativus, prout in noſtro

stro hemispherio *punctum* appulsus jacuerit inter polum, & cardinem australem, vel inter ipsum, & borealem.

60. Ea signa indicabunt plagas, in quas tendent errores axium. Angulus, quem continet directio axis telescopii tendens ab ejus intersectione, cum axe conversionis tendente ab eadem intersectione versus orientem, erit acutus, vel obtusus, prout valor x fuerit positivus, vel negativus: axis conversionis elevabitur supra horizontem ex parte orientali, vel deprimetur infra, prout signa valorum y, & z fuerint conformia, vel *difformia*, *quia valor* DE $= y sin.z$ erit positivus in *primo casu*, & *negativus in secundo*; idem autem *deflectet versus boream*, *vel versus austrum*, prout solus valor y erit *positivus*, *vel negativus*; quia signum valoris OD $=$ $y cos.z$ pendet a solo signo valoris y, cum sit positivus cosinus tam arcus positivi, quam negativi.

61. Licet possit adhiberi hoc instrumentum etiam erroneum ad habendas determinationes accuratas adhibendo formulam pro novo valore e propositam numeris 30, 37, 59, ex quo eruitur n; adhuc tamen præstat corrigere errores axium inventos, pro instrumento fixo in quopiam *observatorio omnes*, & *pro portatili saltem primum*, *qui pertinet ad constructionem instrumenti*; *nam reliqui duo*, *qui pertinent ad collocationem ipsius*, *pro quavis nova collocatione renovantur*. *Exposuimus numero* 17 *difficultatem correctionis per objectum terrestre remotum*, quæ oritur a difficultate *edendi signa*, & per proximum, quæ oritur a confusione imaginis objecti parum remoti, & filorum micrometri. Exponam hic uberius hanc secundam difficultatis originem, & methodum eam evitandi, quæ mihi ita successit, ut telescopio pedum trium obtinuerim etiam in distantia pedum tantummodo 20 visionem objecti, & filorum micrometri, sine remotione ipsorum ab objectivo satis distinctam pro hoc usu: tum adjiciam methodum, quæ adhiberi *potest* ad obtinendam correctionem errorum, qui per methodos *traditas fuerint inventi*.

62. Manente *tota apertura objectivi*, & *directo* telescopio in objectum nimis *proximum*, *debet evadere confusa* visio vel objecti, vel filorum, si ocularis, & fila remaneant in ea positione,

ne, in qua adhiberi debent pro objectis remotis: Ad hoc, ut fila appareant distincta, & sine parallaxi, debent collocari in foco objectivi, ubi imago objecti est maxime distincta, ubi nimirum radii digressi a singulis objecti punctis colliguntur ad sensum in totidem punctis, sive ob errorem diversæ refrangibilitatis, & figuræ sphæricæ, qui semper remanent utcumque imminuti etiam in telescopiis acromaticis, colliguntur ii radii in circellis perquam exiguis: lens autem ocularis debet poni in ea distantia, in qua & imago objecti, & *fila cum ea congruentia appareant simul maxime distincta*, *quæ distantia est circiter illa foci lentis ocularis* ipsius, paullo major pro *presbyta*, *minor pro myope*.

63. At si objectum sit *nimis proximum*; *focus*, in quo *uniuntur radii digressi a singulis* ejus punctis, recedit magis. Si objectivum *habeat* distantiam focalem pedum trium pro objecto sito in distantia pedum 20, focus recedit adhuc plus quam per dimidium pedem. Hinc in loco, in quo fila aptata sunt pro objectis remotis, ii radii occupant circellum, cujus diameter est major parte septima diametri totius aperturæ objectivi; ac proinde radii provenientes ab uno *puncto* objecti *miscentur* cum radiis provenientibus a punctis circumpositis, unde oritur confusio. At si agatur de *linea* nigra in campo albo; poterit obtineri ejus visio distincta, quantum est satis ad rem præsentem, etiam si ea sit posita in ea exigua distantia. Obtegatur apertura *objectivi* chartâ nigrâ crassiore, relinquendo tamen in medio intervallum oblongum per totam diametrum ipsius, & arctam: radii digressi ab eodem quovis puncto objecti non diffundentur in circulum, sed in spatiolum oblongum, & arctum, quod non habebit latitudinem, nisi partis septimæ intervalli relicti; licet retineat longitudinem tanto majorem, quanto major est longitudo ejus intervalli latitudine. Campus ille albus apparebit minus lucidus ob imminutam quantitatem radiorum, sed adhuc ita apparebit, *ut si* illud intervallum liberum in apertura objectivi *relicta ponatur* in directione lineæ nigræ, & ea linea sit satis crassa, appareat etiam ipsa linea nigra in eodem campo albo: radii digressi a punctis campi albi proximi lineæ nigræ protendentur in directione ejus-

juſdem, & habebunt ita exiguam extenſionem in latus, ut relinquant locum nigredini in ſitu, qui reſpondet dimidiæ craſſitudini ejuſdem lineæ. Facile eſt, ductâ lineâ certæ craſſitudinis in charta albâ, & paratis pluribus operculis aperturæ objectivi cum intervallis liberis plurium craſſitudinum, ſeligere illud, quod relinquat pro certa quadam diſtantia objecti ſatis ſenſibilem nigram lineam.

64. Cavendum tamen, ut apertura relicta habeat accurate in medio centrum objectivi. Si *objectivum eſt*, *ut appellant*, bene centratum; id *punctum remanet in centro aperturæ*: ſecus remanet ad *latus*, *quo caſu* cavendum, ne educatur e ſua theca ad abſtergendas ſordes, quas *forte contraxerit*, quin prius notentur bina puncta, alterum in margine ipſius objectivi, alterum ipſi contiguum in theca, ut reponatur in poſitione accurate eadem, quod ni fiat, mutatur directio axis teleſcopii, & verificatio, ac rectificatio nova requiritur. Habentur plures regulæ pro inveniendo eo *objectivi* centro, quæ inveſtigatio pertinet ad Opticam: de ipſa egimus Tomo II Opuſc. I Cap. I adnot. ad num. 27. Si illa apertura relicta arcta, & *oblonga non habeat id* centrum in medio; *linea fiduciæ reſpondens* eidem *non erit eadem accurate*, ac *linea fiduciæ reſpondens* aperturæ *toti liberæ in hoc* caſu, in quo focus abit ad diſtantiam *multo majorem* diſtantiâ filorum. Cavendum *igitur*, *ut id* centrum remaneat in medio craſſitudinis relictæ. Teleſcopio ita præparato, poterit procedi ſequenti methodo ad corrigendos tres errores axium jam inventos.

65. Paretur tabella plana verticalis apponenda in diſtantia, quæ poſſit determinari, in eo ſitu reſpectu inſtrumenti, quem ſitum nominabimus pro correctione ſingulorum ex iis tribus erroribus inventis, ac paretur charta alba cum linea recta nigra craſſiore, quæ charta applicari poſſit ei tabellæ, eo modo, quem pro ſingulis *indicabimus*, & promoveri antrorſum, retrorſum.

66. *Pro errore axium primo*, *qui eſt error directionis axis teleſcopii*, & *deviationis axis converſionis* a *cardinibus*, *orientali* & occidentali, *collocetur* ea *tabella* contra *teleſcopium* ex parte boreali, vel auſtrali, & *applicetur* ei charta, ita, ut ejus linea

nigra

nigra ſit verticalis, ac *jaceat* intra campum *teleſcopii*, cujus objectivum habeat aperturam obtectam juxta num. 63, & 64. Captâ diſtantiâ tabellæ ab objectivo ope partium ſcalæ cujuſpiam, fiat ut radius ad tangentem erroris *x*, ita diſtantia inventa ad numerum earundem partium, qui dicatur *m*: is reſpondebit errori *x*, quem in ea diſtantia ſubtendet, ut demonſtrabimus. Adjutor promoveat chartam in latus, donec linea illa aſpecta per teleſcopium congruat cum filo verticali: tum illam promoveat adhuc per numerum particularum inventum *m*. Si charta eſt appoſita verſus *auſtrum*, ea debet promoveri in *occidentem*, vel in orientem, prout valor *x* inventus fuerit poſitivus, vel negativus: contraria debet eſſe directio ejus motus, ſi charta eſt collocata verſus boream: demum immotâ & chartâ, & inſtrumento, promoveatur filum verticale, donec iterum congruat cum recta promota. Is error ita erit correctus.

67. Si fila fuerint aptata laminæ perforatæ, quæ intra thecam quadratam promoveri poſſit in latus, ante quam firmiter figatur ope cochlearum in ſitu immobili; tum ea correctio, ut monuimus etiam numero 15, facile fiet inducto motu laterali, dum objectum tranſpicitur: ſecus utendum erit attentatione, extractâ per vices, & repoſitâ lente oculari, donec filum congruat cum linea objecti.

68. Pro deviatione axis converſionis a cardine *orientali*, qui eſt error axium ſecundus, uſui erit eadem *tabella*: adductâ illa chartâ ad poſitionem, in qua filum verticale congruat cum ipſius linea verticali, fiat, ut radius ad tangentem ejus erroris indicati ab arcu OD, & expreſſi num. 56 per *ycos.z*, ita diſtantia tabellæ a medio axe converſionis ad numerum particularum *m'*, qui reſpondebit ei errori, ut mox demonſtrabimus: promoveatur ea charta in latus per intervallum = *m'*. Si ea fuerit collocata ad auſtrum reſpectu inſtrumenti; is motus debebit fieri verſus occidentem vel orientem, prout is error inventus fuerit per regulas numeri 59 verſus auſtrum, vel verſus boream: ſi charta fuerit collocata ad boream; debebit fieri motus huic contrarius: promoveatur *fulcrum* mobile motu horizontali, donec filum verticale

con-

congruat cum positione ejus lineæ ita promotæ : eo motu adhibito is error erit correctus.

69. Pro corrigenda inclinatione axis conversionis ad horizontem licebit progredi hoc alio pacto parum absimili ; si in directione ipsius in aliqua distantia, quæ possit determinari per actualem mensuram, collocetur eadem tabella cum charta. Charta ipsa ita collocanda erit, ut linea recta, quæ hic poterit esse tenuis, remaneat horizontalis : parandum autem erit aliud telescopium, cujus tubus produci *possit*, *quantum necesse est*, *ut ea linea appareat distincta in ea distantia : in foco objectivi* respondente radiis *inde divergentibus*, qui erit prope focum citeriorem lentis ocularis, apponendum erit filum, quod appareat distinctum unà cum illa linea horizontali nigra : id telescopium adducatur ad ipsum axem conversionis, ut acquirat positionem ad sensum parallelam ipsi, filum autem illud positum in foco objectivi sit *ad sensum horizontale*, & perpendiculare directioni ejusdem axis, ac in ea positione id ipsum telescopium adnectatur axi eidem : tum charta elevetur, vel *deprimatur*, donec filum horizontale congruat cum *ejus linea nigra : fiat ut radius ad tangentem inclinationis indicatæ ab arcu* DE, & *expressæ eodem num.* 56 per *ysin.z*, *ita* distantia chartæ a *fulcro immoto ad intervallum*, quod *respondebit huic tertio* errori : *deprimatur*, vel elevetur *charta per id intervallum*, prout axis fuerit ex ea parte elevatus juxta num. 59 supra horizontem, vel depressus : si hic error fuerit positivus, & charta fuerit apposita ex parte orientali ; deprimenda erit charta per intervallum inventum : adducatur ope fulcri mobilis axis, & telescopium ad positionem, in qua filum horizontale congruat iterum cum nova positione chartæ, & is etiam error erit correctus.

70. In correctione primi erroris determinatus est motus chartæ per *distantiam a* centro *objectivi*, quia per ipsum (num. 8) transit radius *ad sensum irrefractus*, qui a *puncto* objecti viso in intersectione filorum *abit ad intersectionem ipsam*, & eum ibi appellavimus axem telescopii. *Hinc motu fili* verticalis in latus mutatur positio ejus axis per angulum, quem continent intra tele-

scopium binæ rectæ ductæ a centro objectivi *immoti ad binas* positiones *fili* ejusdem, ac extra telescopium directiones earundem productæ, quæ se intersecant in eodem centro, & continent ibi binos angulos ad verticem oppositos æquales: distantia ab *intersectione* potest assumi pro radio, & *intervallum inter* crura pro tangente ejusdem anguli.

71. Pro demonstranda methodo proposita corrigendi secundum errorem sit (fig. 5) positio *præcedens* axis conversionis CC', cum axe telescopii GF *collocato in directione proxime* horizontali, quæ ipsi C'C occurrat *in H: secunda positio sit C'c, cum* axe telescopii *ghf: jaceant autem omnes eæ rectæ in eodem plano* saltem proxime *horizontali. Binæ directiones* GF, *gf*, occurrent sibi invicem in quodam puncto I, quod jacebit intra exiguum angulum CC'*c*, & patet, angulum FI*f*, qui est mutatio prioris directionis, fore æqualem angulo CC'*c*, quo mutatur directio C'C abiens in C'*c*, & ferens secum sibi affixam priorem GF abeuntem in *gf*. Hinc si IF, I*f* producantur usque ad tabellam in *Bb*; mensura anguli CC'*c* erit *eadem*, ac anguli *BIb*; in quo IB quamproxime *æqualis HB potest assumi* pro radio, & B*b* pro tangente.

72. Pro *tertio* errore sit (fig. 6) CC' prior positio axis conversionis elevata non nihil supra horizontem, HB axis telescopii ipsi adnexi cum recta C'H indicante eorum axium *junctionem. Si a*xis prior deprimatur in plano verticali per angulum CC'*c*; posterior ipsi semper adnexus, & delatus ad directionem *hb* occurrentem priori HB in I, deprimetur utique per angulum BI*b* ipsi æqualem, puncto I cadente inter H, & *h*, & pro ejus anguli tangente ad radium I*b* ad sensum æqualem distantiæ fulcri C' a charta assumi poterit B*b*, sive depressio lineæ horizontalis existentis in ipsa charta facta per hujus motum. Cum ejus depressionis assumpta sit ea magnitudo, quæ *reddat angulum BIb æqualem* errori CC'*c* invento, is *error corrigetur per eum motum*.

73. Directiones *motuum lineæ, cum qua filum* verticale debet congruere, *factæ sunt in plagas oppositas directioni* errorum, ad eos nimirum corrigendos. In errore axis telescopii valor *x est* po-

siti-

sitivus, vel negativus (num. 47), prout axis telescopii ex parte objectivi deflectit in orientem, vel occidentem: hinc motus chartæ factus est in primo casu in occidentem; in secundo in orientem. Quod pertinet ad secundum errorem, qui est error horizontalis axis conversionis, ipso existente positivo, ejus productio versus orientem deflectebat a cardine orientali versus boream, adeoque debebat retrahi versus austrum: id obtinetur per motum axis telescopii perpendicularis ei axi, & producti versus austrum, qui motus fiat in occidentem, *quod est præscriptum*. *Pro* tertio errore in casu, *in quo is supponebatur positivus*, axis ex parte orientali erat elevatus supra horizontem: hinc charta apposita ex parte orientali respectu *telescopii adjecti* depressa est, ut oportebat. In singulis casibus valoris positivi, vel negativi singulorum errorum, & chartæ appositæ versus unam horizontis plagam, vel versus oppositam, patebit etiam primo aspectu, quid fieri debeat, ut corrigatur error, cujus cognita jam sit & magnitudo, & directio.

74. *Sæpe* accidet, ut locus non permittat ejusmodi correctiones, cum non habeatur accessus ad situm positum in directione axis telescopii, & *axis conversionis*, in quo collocari possit tabella, & *fieri motus ejus chartæ*. In eo casu *longa attentatione utendum est adhibitis motibus incertis*, *donec tempora* appulsuum ad instrumentum *congruant cum appulsibus* ad Meridianum determinatis per altitudines correspondentes. *Sed* nostra hic proposita determinatio trium errorum axium per tres observatos temporum appulsus, dum determinat magnitudinem, & plagam singulorum, reddit multo magis expeditam attentationem ipsam. Facto semel motu in eam plagam, in quam est factus, per quantitatem tantummodo æstimatam utcumque, possunt repeti observationes temporum; & ex iis iterum deduci errores axium. Apparebit effectus, quem is motus inducit in eos errores temporarios, illos minuendo, unde judicium formari poterit de novo motu præstando.

75. *Situs pro collocanda tabella facilius* deerit in directione axis conversionis *pro corrigenda ejus inclinatione* ad horizontem. In directione telescopii *habetur semper apertura*, per quam transpici possint astra appellentia ad Meridianum, at in directione

fulcrorum, *quibus* axis idem innititur, plerumque *nulla habetur* apertura. *Tum* correctio *ejus* erroris fieri posset per fixam quampiam proximam zenith. Per altitudines correspondentes potest determinari momentum, quo fixa quæpiam appellit quodam die ad Meridianum, & per motum horologii exactum ad motum *solis*, vel *fixarum* potest determinari momentum, quo debet appellere postridie. Correctis jam aliis erroribus, observetur ingressus fixæ ipsius in telescopium, & elevatione, vel depressione fulcri mobilis adducatur *intersectio filorum*, vel *filum*, quod debet collocari in plano Meridiani, ad *ipsam fixam*; *tum motu continuo* cochleæ præbentis eum motum fiat, *ut filum ipsum comitetur id astrum*, usque *ad* momentum *cognitum appulsus ad Meridianum*: ibi motu *abrupto habebitur* correctio etiam ejus erroris, ut patet.

76. Si desint vel in instrumento, vel in situ commoda necessaria ad correctiones propositas, vel pigeat iis uti, vel ipsis substituere attentationes longas & molestas; tum per formulas propositas pro inveniendo errore pertinente ad quodvis *aliud* Meridiani punctum computari *potest tabella* errorum temporis respondentium pluribus *ejus punctis assumptis per intervalla* aliquot graduum. Si *habeatur ejusmodi* tabula; *instrumentum habens* omnes *tres errores positionis* axium exhibebit *sine nova applicatione numerorum* ad formulas appulsum ad Meridianum æque, ac si nulli ejusmodi errores adessent. Satis est, ipsum instrumentum *sit ita* firmæ constructionis, & collocationis, ut directum ad eadem Meridiani puncta exhibeat semper eosdem errores temporarios. Ii errores inventi, & in tabulam redacti, exhibebunt correctiones adhibendas tempori immediate exhibito ab ipso instrumento ad habendum accuratum tempus appulsus ad Meridianum.

77. Posset hæc tabula sine usu formularum computari assumendo plures fixas, quæ appellant ad puncta Meridiani a se invicem distantia certis intervallis, determinato pro singulis errore per altitudines correspondentes: sic *haberetur tabula errorum* pro iis punctis. Eæ *fixæ non appellent* accurate *ad puncta* Meridiani distantia a se invicem *intervallis æqualibus*. Verum præterquam quod errores exigui non mutantur ad sensum mutato per unum

vel

vel duos gradus puncto Meridiani ; facile ex erroribus *observatis* per *intervalla* parum inæqualia deducuntur errores pro *intervallis* æqualibus redigendi in tabulam : satis est adhibere methodum communem tabulis omnibus innixam proportionalitati differentiarum exiguarum.

78. Id quidem ita præstari posset per observationes immediatas, sed labor est admodum longus, & nimis magnus observationum numerus requiritur ad eam rem. Id incommodum evitant formulæ erutæ ex erroribus *appulsus indicati ab instrumento* pro tribus tan*tummodo fixis*, *vel aliquot ternariorum*, ad habendam *majorem confirmationem*, ad quem usum erit admodum utilis tota hæc series per*quisitionum*, & determinationum hujus Opusculi.

OPUSCULUM XII.

DE ERRORIBUS LINEÆ MERIDIANÆ ITA DEPREHENDENDIS, UT OBSERVATIONES PER EAM INSTITUTÆ CORRIGI POSSINT (*).

1. OCCASIONEM *præbuit huic Opuſculo Eminentiſſimus* Cardinalis Luynius, *Præsul amplissimus*, *Astronomiæ* non *solum amator*, & *protector*, sed etiam, quantum *per gravissimas ejus* occupationes *licet*, cultor eximius, plurimis observationibus accuratissimis institutis per se ipsum, quibus etiam in lucem editis Astronomiam identidem locupletavit. Cum plura egregia, quibus utitur, instrumenta mihi ostenderet *in* eodem conclavi, in quo & meridianam lineam duxit, *in* quam sæpe inquirit per observationes correspondentes, petiit regulam, qua ex errore *invento semel pro uno anni tempore*, *si* quis aliquando *occurreret*, *deduci posset error pro alio quovis*, *ut* computatâ *tabellâ errorum ejusmodi pro reliquis omnibus anni temporibus*,

(*) Tam hoc argumentum, quam verificatio machinæ parallacticæ habet maximam affinitatem cum verificatione instrumenti transituum, de qua egimus in Opusculo præcedenti; sed bini errores, qui possunt occurrere in linea meridiana, de quibus agitur in hoc Opusculo, sunt prorsus iidem, ac bini e tribus ejus instrumenti, ut patebit in fine ipsius. Idcirco hoc illi immediate subjungimus: addemus ipsi in sequenti aliud, quod habet analogiam non quidem cum illo præcedenti, sed cum hoc, cum inter cætera doceat modum ducendi lineam meridianam per tria quæcumque puncta extrema umbræ notata in plano horizontali. Id quidem non pertinet ad correctionem errorum in instrumentis, sed est analogum argumentis hujus tomi, qui agit de instrumentis astronomicis, docet enim etiam methodum delineandi horologia solaria, quæ sunt itidem quædam instrumenta pertinentia in origine ad Astronomiam, ad quam ultimo reduci potest Gnomonica, ut ejus pars quædam. Post eam veluti digressionem regrediemur ad machinam parallacticam multo magis analogam instrumento transituum, ad quod ipsa reducitur in una ex ejus positionibus. Analogia hujus Opusculi cum præcedenti evolvetur in ejus fine, ut innui, & osten-

ſus, ex linea meridiana etiam aliquantulum erronea poſſit, adhibitâ correctione, haberi hora meridiei æque accurata, ac ſi meridiana ipſa linea eſſet accuratiſſima. Solutio ejus problematis utilitatem habet maximam in Aſtronomia practica; qua tamen illa ejus meridiana linea non indigebat. Per eos etiam ipſos dies is invenerat conſenſum ſummum momenti meridiei indicati ab ea linea cum eruto ex altitudinibus correſpondentibus ita, ut ne unius quidem ſecundi error obvenerit.

2. Inveni regulam *admodum expeditam pro caſu, in quo pes gnomonis ſit accurate definitus, & linea* per ipſum accurate *traducta, vel ſi pes ipſe inveniri* non poſſit, ut ibi non poterat, foramine, per quod radius ſolis traducebatur, extante extra feneſtram in metallica lamina parieti affixa; deprehendi poſſit, an linea ipſa jaceat accurate in eodem plano verticali cum centro foraminis ipſius. In ductu meridianæ lineæ admitti potest error non *ſolum in ejus directione*, ſed etiam in poſitione, quæ tranſeat ad latus pedis gnomonis, nimirum ita, ut recta verticalis ducta per centrum foraminis *illius*, *quæ determinat* in plano horizontali eum *pedem*, *cadat extra ejuſmodi lineam*, quo *caſu planum* tranſiens *per eandem rectam*, & per *ipſum foraminis centrum* inclinetur ad *horizontem*. Idcirco cenſui, *fore operæ pretium*, *ſi* is etiam *caſus* revocaretur *ad trutinam*. In eo requiruntur bini erro-

ostendetur, in quo differant figuræ, & denominationes hìc adhibitæ cum formulis inde erutis ab iis, quæ ibi habebantur pro exprimendis iiſdem valoribus. Diſcrimen provenit ex eo, quod hoc Opuſculum eſt conſcriptum independenter ab illo. Multa hìc adjecta fuerant, pertinentia ad inſtrumentum tranſituum, quod præter eos duos errores communes poteſt habere alium, quem ibi appellavimus primum: ea hinc tranſlata ſunt illuc, & aptata iiſdem figuris, & denominationibus: ſed ea, quæ pertinent directe ad lineam meridianam, retinui ita, ut erant conſcripta, ne irrito labore mutarem omnia: addam in fine comparationem figurarum, & valorum, ut innoteſcat, quid habeatur commune, quid contineat novi aliquid, quod dum exhibet methodum deprehendendi eos binos errores lineæ meridianæ, continet methodum adhuc diverſam ab adhibitis ibidem, per quam in ipſo inſtrumento tranſituum carente primo e ſuis tribus erroribus ibidem expoſitis ipſi peculiari deprehendi poſſint etiam pro ipſo reliqui duo communes, quin & formulam pro uno e valoribus ad id requiſitis ſimpliciorem.

errores determinati binis anni temporibus, ex quibus si linea ipsa sit accurate recta, determinari potest error pro alio quovis anni tempore: facile autem in rectitudinem inquiritur filo tenso per ipsius lineæ extrema puncta. Id patebit in sequenti perquisitione, quæ rem perficiet per duo problemata cum suis corollariis, & scholiis.

3. *Problema* 1. *Invento semel errore lineæ meridianæ ductæ in plano horizontali ita, ut transeat per pedem gnomonis, sed habeat deviationem exiguam a directione debita, invenire errorem pro quovis alio anni tempore.*

4. Si Meridiana, utut erronea, est *recta linea horizontalis transiens per pedem gnomonis*; planum ductum per ipsam, & per centrum foraminis transmittentis radios occurrit superficiei sphæræ cælestis in circulo maximo transeunte per zenith. Cum enim tota terra respectu ejus superficiei habenda sit pro unico puncto posito in ejus centro, id planum est quædam sectio sphæræ facta per id centrum, quæ idcirco debet esse ejus circulus maximus: debet autem transire per *zenith*, cum linea ducta per pedem gnomonis, & centrum foraminis, quæ est *verticalis*, & producta sursum tendit ad ipsum zenith, jaceat in illo plano. Patet utique, centrum imaginis solaris transmissæ per id foramen usque ad pavimentum debere appellere ad eam lineam meridianam erroneam eo momento temporis, quo centrum solis appellit ad eum circulum transeuntem per ipsam, & per ejusdem foraminis centrum.

5. Sit (Tab. VII fig. 7) AZPB Meridianus, in quo Z zenith, P polus, tum AOB semihorizon orientalis, in quo A cardo australis, B borealis, O orientalis: occurrat autem ille circulus transiens itidem per zenith Z horizonti ex parte australi in puncto C posito versus occidentem, & ex parte boreali in puncto D, quod cum sit diametraliter oppositum puncto C, jacebit versus orientem. Sol appellet prius ad Meridianum in quodam puncto S, quam ad eum circulum in s. Intervallum temporis inter eos appulsus reductum ad secunda erit error temporarius ejus meridianæ lineæ, quorum secundorum numerus dicatur n, & is quidem in-

no-

notescet, si per altitudines correspondentes determinetur momentum appulsus solis ad Meridianum, & notetur per observationem momentum appulsus centri imaginis solaris ad eam lineam, quod erit idem, ac momentum appulsus centri solis ad Meridianum. Dicatur B sinus distantiæ ZS solis ipsius a zenith, D sinus ejus distantiæ a polo, qui erit cosinus declinationis. Porro arcus P*s* erit utique æqualis arcui PS, & ob tantam viciniam punctorum S, *s* poterit etiam arcus ZS accipi pro æquali arcui Z*s*.

6. *Factâ conversione temporis in arcum æquatoris, erit angulus* SP*s*, *sive* ZP*s* $= 15n$, *qui cum sit exiguus*, *poterit accipi pro suo sinu*. *In triangulo* PZ*s* *erit* $sin.Zs = B : sin.Ps = D :: sin.ZPs = 15n : sin.PZs = \frac{15nD}{B}$, & si pro quovis alio anni tempore adhibeantur n', B', D'; idem sinus PZ*s* erit $= \frac{15n'D'}{B'}$. Comparando hosce binos ejus valores eruitur $n' = \frac{nD}{B} \times \frac{B'}{D'}$.

7. Porro habetur pro quovis dato die declinatio solis, quam hic satis est etiam adhibere tantummodo veræ proximam; adeoque habetur *ejus cosinus*, *qui est sinus D*, vel D' distantiæ a polo: *habetur itidem distantia* solis a *zenith*, *quæ est summa*, *vel differentia ipsius declinationis*, & *latitudinis loci*; prout ea fuerit australis, vel borealis; *adeoque habetur* etiam sinus B, *vel B' ipsius distantiæ a zenith*. Quare dato per observationem errore temporario *n* pro uno quopiam anni tempore, invenietur & valor n' pro alio quovis. Q. E. F.

8. *Corol.* Sinus anguli AZC est idem, ac sinus ejus supplementi PZ*s* inventus $= \frac{15nD}{B}$. Cum ipse angulus AZC sit itidem exiguus; is valor poterit assumi pro arcu ipsum metiente, qui idcirco exhibebit numerum secundorum ejusdem anguli. Porro valores sinuum B, D, B', D' sunt semper positivi in zona nostra temperata, *in qua sol tam respectu poli*, quam *respectu zenith* appellit ad Meridianum *semper versus austrum: hinc tam novus error* n', quam angulus AZC *erunt positivi*, vel negativi, prout primus error *n* fuerit positivus, vel negativus. Inde habebitur

hujusmodi theorema: *Si sol semel appulerit ad Meridianam erroneam post meridiem, vel ante; quovis alio anni tempore appellet itidem post, vel ante, ac in primo casu angulus circuli verticalis, in quo jacet ipsa Meridiana erronea, jacet versus occidentem, in secundo versus orientem*. Id theorema deductum ex ea formula patet etiam immediate e sola inspectione figuræ.

9. *Schol.* 1. Regula pro inveniendo errore respondente cuivis alteri diei erit hujusmodi. *Inveniatur semel pro die observationis distantia solis a polo, & distantia ipsius meridiana a zenith, addendo declinationem australem, vel demendo borealem pro illa a gradibus 90, pro hac a latitudine loci: capiatur logarithmus sinus prioris, & numeri* n, *ac complementum arithmeticum sinus posterioris: eorum trium valorum fiat summa deinde constanter adhibenda: tum inventis eodem modo distantiis a polo, & a zenith pro quovis alio die, & captis e contrario complemento logarithmico sinus prioris, & complemento sinus posterioris, hi duo valores addantur simul cum illa summa constanti, ac habebitur logarithmus numeri secundorum horariorum pro illo alio die*. Nam illa summa est logarithmus valoris $\frac{nD}{B}$, cui addendo *log.* B' + *complem. log.* D', additur *log.* $\frac{B'}{D'}$.

10. Poterit per eam regulam facile computari tabula errorum aptata singulis gradibus declinationis tam australis, quam borealis. Quoniam autem iisdem diebus anni redeunt declinationes fere eædem, nam irregularitas anni bissextilis inducit inæqualitatem minorem dimidio gradu intra sæculum idem; potest tabula aptari mensibus, & diebus; nam error, qui sit solum aliquot secundorum temporis in linea meridiana, quæ supponitur parum abludens a vera, non potest pati mutationem sensibilem, mutatâ declinatione per dimidium, & vero etiam per integrum gradum: posset etiam aptari divisionibus ipsius lineæ meridianæ, quæ iis respondent.

11. *Scholium* 2. Pro computando angulo AZC habebitur hujusmodi regula. *Capiatur logarithmus numeri* 15, *numeri secundo*

rum

rum n, *sinus distantiæ solis a polo* D, *& complementum logarithmicum sinus distantiæ ipsius Meridianæ* B *pro die observati erroris* n: *fiat summa eorum 4 valorum, quæ erit logarithmus numeri secundorum ejus anguli*.

12. Is angulus erit æqualis illi, quem in plano horizontali continet vera Meridiana, cum erronea in pede gnomonis. Quare si fuerit determinatus is pes, lineâ erroneâ transeunte per ipsum, facile ducetur linea meridiana accurata, ductâ ad eum angulum rectâ a pede gnomonis versus occidentem, vel versus orientem, prout error *n* fuerit *positivus*, vel *negativus*: voco autem hìc positivum, *cum sol advenit ad eam lineam serius*, quam ad Meridianum. *In eo casu arcus ZSA respectu ZsC* jacet ad orientem, ut figura exhibet, adeoque linea meridiana vera tendens ad partem oppositam ob transitum radii per foramen, abibit ad occidentem lineæ erroneæ, & in casu opposito ad orientem.

13. *Schol.* 3. Si habeatur secunda determinatio erroris facta per observationem pro alio quopiam anni tempore; facile determinabitur, an revera ea linea transeat per pedem gnomonis, quod propositum fuerat numero 2. *Satis erit deducere ex primo errore observato errorem pro tempore secundæ observationis ope methodi hìc adhibitæ. Si is obveniat ex eo calculo idem*, ac *observatus*, habebitur *is transitus* : *secus*, ea *linea habebit* eum etiam *errorem* ; & *tunc* ope eorum binorum errorum invenietur error *pro alio* quovis anni tempore. Verum ad eam rem seligendi sunt pro iis binis observationibus bini dies, quibus respondeant binæ declinationes solis admodum remotæ a se invicem, sive appulsus ad puncta ejus lineæ admodum remota, ne exiguus observationis error, plus æquo perquisitionem perturbet. Methodum adhibendi binas observationes ad eam rem persequemur in problemate sequenti.

14. *Problema* 2. *Inventis binis erroribus lineæ meridianæ, quæ nec transeat per pedem gnomonis, sed parum ab eo distet, invenire errorem pro quovis alio anni tempore.*

15. Planum transiens per eam lineam meridianam erroneam, & per centrum foraminis continuatum usque ad superficiem sphæræ cælestis determinabit in ipsa circulum maximum, qui tamen non

transibit per zenith, cum illa recta verticalis transiens per centrum foraminis, & pedem gnomonis, quæ tendit ad zenith, jaceat extra id planum.

16. Sit in figura 8 Meridianus itidem AZPB, semicirculus autem, cujus planum transit per lineam meridianam erroneam, & per centrum foraminis transmittentis radios, sit CED, atque is semicirculus occurrat Meridiano in puncto E, quod distabit a zenith Z per quendam arcum ZE. Bini arcus errorum datorum sint Ss, $S's'$, quorum prior sit remotior a polo P: dicantur autem n, n', ut prius, errores temporarii ipsis respondentes, qui errores censeantur positivi, vel negativi, prout centrum imaginis solaris devenerit ad lineam meridianam erroneam post meridiem, vel ante: sinus arcuum PS, PS' semper positivi, qui erunt iidem, ac cosinus declinationum, sint itidem D, D', sed B, B' designent sinus arcuum ES, E'S' adhuc incognitorum ob punctum E nondum determinatum.

17. Primo quidem invenietur ipsum punctum E hoc pacto. Erit, ut num. 8, angulus $EPs = 15n$, quo assumpto pro suo sinu, & Es pro ES, erit $sin.Es = B : sin.PS = D :: sin.EPs = 15n : sin.PEs = \frac{15nD}{B}$, prorsus ut ibi respectu puncti Z, cui hic substituitur E. Eodem pacto sinus anguli PEs', erit $\frac{15n'D'}{B'}$, qui cum sit idem ac prior, erit $\frac{nD}{B} = \frac{n'D'}{B'}$, adeoque B ad B', ut nD ad $n'D'$: sunt autem B, B' sinus arcuum ES, ES', & valores nD, $n'D'$ dati, datis declinationibus, & erroribus observatis: quare erit illorum semidifferentia ad semisummam, nimirum tangens semidifferentiæ eorum arcuum ad tangentem semisummæ, ut $nD - n'D'$ ad $nD + n'D'$: differentia arcuum ES, & ES' est SS', qui arcus est etiam differentia distantiarum a zenith, adeoque si hæ distantiæ dicantur d, d', erit $SS' = d - d'$. Quare tangens semisummæ eorum arcuum erit $\frac{nD + n'D'}{nD - n'D'} \times tan.\frac{1}{2}(d - d')$. Arcus, cujus hæc est tangens, dicatur p, & eorum arcuum major ES erit $p + \frac{1}{2}(d - d')$. Cognito eo arcu, & puncto Meridiani S, habebitur punctum quæ-

situm

ſitum E, cujus diſtantia EZ a zenith $= z$ erit $= ES - ZS = p + \frac{1}{2}(d - d') - d = p - \frac{1}{2}(d + d')$.

18. Si jam ſit S'' punctum aliud Meridiani quodcumque, pro quo quæratur error n''; is invenietur per quatuor ſinus B, D, B'', D'', arcuum ES, PS, ES'', PS'', & errorem n pertinentem ad punctum S eodem modo, quo numero *6* inventus eſt error n' per valores iis analogos, ſubſtituto puncto E jam cognito pro puncto Z. Jam habebatur arcus PS adhibitus etiam ibi, & arcus ES inventus eſt hìc numero ſuperiore: *innoteſcet per ipſam diſtantiam imaginis ſolaris a pede gnomonis diſtantia puncti* S'' *a zenith* $= d''$, *cui ſi addatur complementum* altitudinis poli PZ, quod dicatur q, *habebitur* $PS'' = d'' + q$, & ſi ei addatur arcus $EZ = z$, habebitur $ES'' = d'' + z$, adeoque habebuntur ſinus B, D, B'', D''. Porro eodem modo, quo numero præcedente habebatur ſinus anguli $PEs = \frac{15nD}{B}$, habebitur hìc ſinus anguli $PEs'' = \frac{15n''D''}{B''}$: cumque hi anguli ſint idem angulus, vel alter alterius ſupplementum, *ſi forte punctum* E abeat ad auſtrum, valore z *evadente negativo*, & *cadat inter puncta S, S''*; erit $\frac{15n''D''}{B''} = \frac{15nD}{B}$, adeoque $n'' = \frac{nD}{B} \times \frac{B''}{D''}$. Q. E. Inveniendum.

19. Corol. Habebitur hìc angulus AEC, ut in problemate primo, angulus AZC figuræ *7*. Sinus ipſius erit idem, ac ſinus anguli PEs, qui numero ſuperiore inventus eſt $= \frac{15nD}{B}$, & ob ejus exiguitatem is ipſe valor exhibebit eum angulum exprimens numerum ſecundorum ipſius per valores datos n, D, & inventum B.

20. *Scholium*. Valor ejus anguli non habebit eundem uſum immediatum pro determinatione lineæ meridianæ veræ per erroneam, quem habuit angulus AZC figuræ *7*. Is ibi erat æqualis angulo, quem *in ipſo pede gnomonis* continebant eæ binæ lineæ, quarum utraque tranſibat *per ipſum*: hìc nec habetur eorum angulorum æqualitas, nec earum linearum concurſus fit in pede gnomonis. Adhuc tamen ope ipſius, & diſtantiæ EZ a zenith inventæ $= z$ ob-

obtinetur per valores simplicissimos, & *elegantes tam distantiæ concursus* earundem linearum a pede gnomonis, quam anguli, quem eæ ibidem continent.

21. Pro determinando eo concursu referat in fig. 9 F verticem, N pedem gnomonis, AZBN circulum meridianum sphæræ habentis centrum in F, radium FN: sit autem CED circulus ejus sphæræ determinatus a plano transeunte per verticem gnomonis F, & lineam meridianam erroneam, idem ac in fig. 8: linea meridiana vera sit NH, erronea G*h* occurrens priori in puncto G, quod quæritur, cum *angulo* HG*h* *jacente in plano* horizontali, in quo jacent GH, G*h*.

22. *In primis punctum* G *debet jacere in recta* EF *producta*, *cum ea sit intersectio plani* meridiani AEB, cum plano CED, *& in iis planis jaceant* rectæ GH, G*h*. Hinc NG distantia intersectionis G a pede gnomonis N, est tangens anguli NFG ad radium FN. Is angulus datur, cum sit æqualis angulo EFZ *habenti* pro mensura arcum EZ inventum $= z$: patet autem, *intersectionem* ipsam G debere cadere ultra pedem gnomonis N, vel citra, prout E ceciderit *respectu zenith* Z ad boream, ut figura exprimit, vel ad austrum.

23. *Deinde pro inveniendo angulo*, quem *continent* in puncto invento G *Meridiana vera*, & *falsa*, concipiatur punctum S distans per quadrantem ES a puncto E, & radius SF occurrat Meridianæ veræ in H, *s*F erroneæ in *h*; angulus planus SF*s* erit idem, ac sphæricus SE*s*, sive AEC inventus num. 19: ipsi æqualis est HF*h* ad verticem oppositus, qui ad quæsitum HG*h* debet esse, ut HG ad HF: nam H*h* perpendicularis plano Meridiani confunditur ad sensum cum arcu circuli descripti tam radio FH, quam radio GH, & anguli sunt, ut arcus intercepti cruribus divisi per radios, adeoque arcu H*h* existente communi, sunt hic reciproce ut radii FH, GH, nempe directæ, ut GH ad FH: est autem GH ad FH, ut radius ad sinum anguli HGF, ob angulum GFH rectum, qui angulus est complementum anguli GFN, sive EFZ, & hujus mensura est arcus EZ inventus *numero* præcedenti, adeoque habentur sequentia theoremata.

24. 1°. *Ut radius ad tangentem arcus* EZ, *ita altitudo gnomonis ad distantiam intersectionis quæsitæ a pede ipsius gnomonis*. 2°. *Ut radius ad cosinum ejusdem arcus* EZ, *ita angulus* AEC *inventus num.* 19 *ad angulum, quem ibi continet linea meridiana erronea cum vera*. Si angulus AEC fiat $= a$, altitudo gnomonis $= m$; habebuntur expressiones analyticæ simplices utriusque valoris quæsiti. Distantia ejus intersectionis a pede gnomonis erit $= m\,tan.z$, & angulus quæsitus $= a\,cos.z$.

25. Punctum E potest abire hìc citra zenith Z, ut figura exprimit, vel ultra, ac in fig. 8 potest abire vel citra punctum S', vel inter puncta S, S', vel ultra S, & angulus AEC potest abire vel versus occidentem, vel versus orientem. Ea omnia pendent a valoribus formularum, ac ab iis determinabuntur per sua signa positiva, vel negativa. Proponemus hìc & denominationes, & formulas videndas unico intuitu. Erunt valoris positivi, vel negativi errores temporarii n, n', n'', prout appulsus ad Meridianam erroneam fiet post, vel ante meridiem: distantiæ solis a zenith, d, d', d'', complementum altitudinis poli q, distantiæ solis a polo $d+q$, $d'+q$, $d''+q$, harum sinus D, D', D'', altitudo gnomonis m, ea omnia erunt valoris positivi hìc in nostra zona temperata. Ab his pendebunt valores reliqui, qui inveniuntur per ipsos. Si obvenerint positivi valores EZ, AEC, NG, HGh; jacebit E respectu Z versus boream, C respectu A versus occidentem, G respectu N ultra ipsum versus austrum, linea meridiana vera GH respectu erroneæ Gh versus occidentem. En omnes valores, & formulas.

Errores in secundis temporis inventi binis diebus datis, & quæsitus pro alio quovis . . . . n, n', n''

Distantiæ solis a zenith . . . . d, d', d''

Complementum altitudinis poli . . . . q.

Distantiæ solis a polo . . . . $d+q$, $d'+q$, $d''+q$.

Earum sinus . . . . D, D', D''

Arcus cujus tangens $\dfrac{nD + n'D'}{nD - n'D'} \times tan.\tfrac{1}{2}(d - d')$ . . . . p

Arcus EZ $= p - \tfrac{1}{2}(d + d')$ . . . . z

Si-

Sinus arcuum $d+z$, $d'+z$, $d''+z$ . . . . . . B, B', B''

Error quæsitus n'' . . . . $\frac{nD}{B} \times \frac{B''}{D''}$

Angulus AEC $= a$ . . . . $\frac{15nD}{B}$

Altitudo gnomonis . . . . m

Distantia NG concursus G a pede gnomonis . . . . . . $m\,tan.z$

Angulus HGh lineæ meridianæ erroneæ cum vera . . . $a\,cos.z$

26. *Hìc etiam æque facile computabitur tabula errorum.* Inventis semel valoribus n, n' per *observationem*, & D, D' per distantias a zenith d, d' debitas diebus earum *observationum*, invenietur arcus p, tum z, & $d+z$. *Inde obtinebitur itidem* valor B, *inveniendus* semel, ac numerus logarithmicus *log.n* + *log.*D + *compl. arithm. log.*B: tum pro singulis aliis diebus oportebit invenire d'', b'', D'', B'', ac logarithmum B'', & *complementum* logarithmicum D''. Horum summa addita *summæ inventæ* semel, & constanter adhibendæ erit logarithmus *valoris* quæsiti n''.

27. Facile perspicitur, hos errores, & hasce correctiones esse communes lineæ meridianæ erroneæ, cum eo *telescopio* mobili meridiano, quod appellari solet instrumentum transituum. In eo considerandi sunt bini axes: axis *telescopii*, qui transit per centrum objectivi, & intersectionem *filorum positorum in ejus foco*, & axis, circa quem is convertitur. Si axis *telescopii* est perpendicularis axi conversionis; is productus usque ad superficiem sphæræ cælestis describit ibi circulum maximum habentem pro axe axem conversionis productum itidem, cum describat planum perpendiculare ei axi, si is sit accurate horizontalis, & perpendicularis lineæ meridianæ. Si fuerit horizontalis, sed non perpendicularis ei lineæ; tum circulus descriptus ab axe conversionis producto transibit per zenith Z, ut circulus CZD in *fig.* 7: si autem ille axis nec *fuerit horizontalis; hic circulus* maximus nec transibit per *zenith*, *sed transibit per aliud quodpiam* punctum Meridiani E, *cum omnes circuli maximi debeant* se mutuo secare. In primo casu patet, æque huic instrumento applicari proble-

ma

ma primum, in secundo problema secundum; cum methodis, quæ adhibitæ sunt ibi pro determinando errore instrumenti pro quovis alio anni die.

28. Verum id instrumentum potest habere, ut diximus, tertium errorem provenientem ab axe telescopii, non perpendiculari axi conversionis, in quo casu is circulus non est maximus. Nulli alii errores possunt occurrere in eo instrumento, si sit satis solidum, ut nimirum axis conversionis remaneat semper immotus, & axis telescopii retineat constanter eandem inclinationem cum ipso axe conversionis. Adhuc tamen etiam in casu ejus tertii erroris in constructione instrumenti facile admodum per formulas generales inveniuntur omnes tres ii errores, inventis per observationem tribus erroribus momenti meridiei male indicati ab ipso instrumento, in tribus diversis ejus positionibus, ac fiet tabula exhibens omnes ejusmodi errores pro reliquis positionibus omnibus. Id est præstitum in præcedenti Opusculo; sed, ut monui in ipsa prima adnotatione hujus, adhibita est alia denominationum series, & aliæ plagæ assumptæ sunt pro positivis, & negativis: hic persequar ea discrimina.

29. In primis error commissus in tempore appulsus ad Meridianum indicato hic a linea meridiana erronea, ibi ab erronea collocatione instrumenti, habitus est hic pro positivo, quando appulsus ad lineam meridianam erroneam est posterior appulsu ad Meridianum, ibi e contrario quando appulsus ad instrumentum male collocatum præcedit: eam ob causam etiam figura habet positionem non nihil diversam. Hæc figura 8 respondet figuræ 3 Tabulæ II, quam delineatam pro verificatione quadrantis muralis adhibui in superiore Opusculo etiam pro verificatione instrumenti transituum. In utraque AOB est semihorizon orientalis, AZB semimeridianus cum suo zenith Z, & polo P, ac designantur iisdem litteris: punctum s est utrobique idem, & pertinet ad semicirculum superficiei cælestis respondentis hic plano transeunti per lineam meridianam, & per centrum foraminis, ibi axi telescopii suppositi perpendicularis axi conversionis, & appulsus ad eum circulum est is, qui exhibetur a linea meridiana, & ab instrumento

transituum carente suo errore primo, qui consistit in deviatione axis telescopii a perpendicularitate respectu axis conversionis, quo casu hìc productus usque ad superficiem sphæræ cælestis describit ibi circulum maximum. Verum ob plagam erroris positivi assumptam hìc contrariam assumptæ ibi punctum *s* jacet hìc versus occidentem respectu Meridiani, dum ibi jaceret versus orientem.

30. Hìc dimidium ejus circuli, quod extat supra horizontem designatur per CED, ibi per FNG, *existentibus hìc* C, & D ejus concursibus, australi, & boreali *cum horizonte*, ibi F, & G, intersectione cum Meridiano *ibi* N, *hìc E: jacet autem hìc* punctum C ad occidentem *respectu cardinis australis* A, & D ad orientem respectu *borealis B*, *ibi autem* e contrario F ad orientem, G ad occidentem: *ibi etiam* intersectio N jacet ad austrum respectu zenith Z in *quadrante* ZA, hìc E ad boream in *quadrante ZB*, angulo ANF *jacente ibi* ad orientem respectu Meridiani, *hìc AEC* ad occidentem. Hoc idem discrimen conservaretur *etiam* pro casu, in quo *semicirculus transiens* per *puncta s* esset verticalis, si *haberetur etiam ibi figura pro eo casu*, *quæ habetur* hìc, & est *figura 7*, *ubi intersectio E figuræ 8 abit in Z*, *ibi autem abiret intersectio N ejus figuræ 3 in idem ejus punctum Z:* angulus AZC hìc *jacet etiam in fig. 7 ad occidentem*, *ibi AZF jaceret* ad *orientem respectu quadrantis ZA*. *Demum* hìc *puncta S* sunt ea, quæ *ibi* puncta M pertinentia ad Meridianum.

31. Hæc pertinent ad figuras: sunt autem diversæ etiam denominationes: comparabimus eas, quæ hìc occurrunt, cum iis, quæ habentur ibi in determinatione valorum, e quibus eruuntur ibidem postremi duo errores axium per observationes exhibentes binos tantummodo errores appulsuum methodo postrema, nam ii soli sunt communes, ut diximus, meridianæ lineæ, & illi instrumento. Ea methodus ibi incipit a numero 39, ubi extenditur ad casum, in quo habeantur omnes tres errores axium determinandi per tres errores appulsuum, tum a numero 57 restringitur ad casum, in quo habeantur tantummodo ii bini postremi, quod reddit formulas multo simpliciores.

32. Hìc appellantur a, & z in fig. 8 angulus AEC, & arcus EZ, quibus ibi respondent in fig. 3 Tabulæ II angulus ANF, & arcus NZ, qui ibi dicuntur y, & z, ut idcirco valor z exprimat idem utrobique. Ii duo valores determinant ibi secundum, & tertium errorem axium, qui evadunt (num. 56) $y\cos.z$, & $y\sin.z$. Determinantur ibi valores y, & z, hìc a, & z, per valores cognitos, quorum diversa denominatio efficit, ut non possit primo aspectu dignosci, in quo congruant inter se formulæ, quæ eos valores exprimunt, in quo *discrepent*, & *quo pacto hæ hìc inventæ reduci possint ad valores respondentes denominationibus ibi adhibitis*, vel viceversa. Eam comparationem hìc persequemur.

33. Ibi invenitur prius num. 58 valor z per suam tangentem $= \frac{m'\sin.b - m\sin.b'}{m'\cos.b - m\cos.b'}$, tum $y = \frac{e-x}{\sin.(b-z)}$, sed cum sit (num. 57) $m = e - x$, $m' = e' - x$, & x sit primus error axium, qui hìc supponitur $= 0$, evadit $\tan.z = \frac{e'\sin.b - e\sin.b'}{e'\cos.b - e\cos.b'}$, & $y = \frac{e}{\sin.(b-z)}$. Sunt autem *ibi* valores b, & b' distantiæ loci appulsus ad Meridianum a *zenith*, quæ hìc dicuntur d, & d': valores autem e, & e' *sunt* ibidem errores *momenti* appulsus *angulares*, *redacti* ad *secunda* arcus circuli *maximi*, nimirum arcus ibi *in illa fig.* 3 SM, S''M'', sive evanescente primo errore Ss, arcus sM, s''M'', qui hìc in hac fig. 8 sunt arcus Ss, S's'.

34. Hìc itidem invenitur numer. 25 prius valor $z = p - \frac{1}{2}(d + d')$, invento prius p, cujus tangens $\frac{nD + n'D'}{nD - n'D'} \times \tan.\frac{1}{2}(d-d')$, tum angulus $a = \frac{15nD}{B}$. Hic secundus valor congruit cum illo valore $y = \frac{e}{\sin.(b-z)}$, si comparentur inter se denominationes: est enim hìc *numerator* $15nD$ idem, ac ibi e, nimirum valor secundorum erroris *observati*, & *reducti* ad partes circuli maximi, qui obtinetur multiplicando errorem temporarium n per 15, ut reducatur ad errorem angularem, tum iterum multiplicando id

productum per sinum distantiæ a polo, qui hìc dicitur D: denominator quoque B hujus valoris est idem, ac ille $sin(b - z)$. Nam distantia astri a polo ibi dicitur b, hìc d, & z exprimit eandem distantiam intersectionis binorum circulorum ibi N, hìc E, a zenith, sed ibi is valor assumptus est positivus versus austrum, hìc versus boream, adeoque hìc est z, quod ibi $-z$, est autem hìc B sinus arcus $d + z$ juxta catalogum valorum numeri 25, adeoque reductis hisce denominationibus ad illas hìc valor B evadit idem, ac ille $b - z$, & requirit eundem calculum numericum.

35. Primus valor z hìc habet expressionem diversam non solum respectu denominationis mutatæ pro iisdem valoribus; sed etiam respectu formæ terminorum, ex quibus componitur, & requirit diversum calculum numericum, licet exprimat quantitatem eandem. Videtur esse complicatior, cum requirat prius inventionem valoris p per suam tangentem $\frac{nD + n'D'}{nD - n'D'} \times tan.\frac{1}{2}(d - d')$, tum subtractionem arcus $\frac{1}{2}(d + d')$. Verum reipsa calculus numericus applicatus ad hanc formulam est multo simplicior. Nam hi valores nD, $n'D'$ sunt simpliciores, quam illi soli e, e', qui componuntur ex erroribus temporariis n, n' multiplicatis per 15 pro reductione ad errores angulares, tum per sinus distantiarum a polo, quæ in toto illo Opusculo dicuntur c, & habent $sin.c$ pro hoc D. Hinc illi valores e, e' reducti ad hasce denominationes evadunt $15nD$, & $15n'D'$, magis compositi, quam hi nD, $n'D'$: valor 15 etiam ibi evanesceret, si valores e, e' reducerentur ad formam primitivam $15 n sin.c$, $15 n' sin.c'$, quia inveniretur in omnibus terminis tam numeratoris, quam denominatoris ejus fractionis exprimentis immediate valorem z per suam tangentem. Ibi autem singuli valores e, e' ducendi sunt adhuc in suos $sin.b$, $sin.b'$, quæ nova multiplicatio hìc evitatur.

36. Inventis binis hisce numeris simplicioribus nD, $n'D'$, statim per summam, & subtractionem invenitur numerator $nD + n'D'$, & denominator $nD - n'D'$, arcus vero $\frac{1}{2}(d - d')$ cujus tangentis logarithmus addendus est logarithmo ejus numeratoris, & com-

ple-

plemento logarithmico denominatoris, facile habetur per solam subtractionem valoris d' a d. Hinc multo facilius invenitur valor hujus fractionis exprimentis tangentem p, quam illius exprimentis immediate tangentem z': subtractio autem valoris $d + d'$ a valore p invento, vix quidquam difficultatis addit. Multiplicationes, & divisiones reddunt calculos operosiores, etiam ubi adhibentur logarithmi; nam pro logarithmis summarum, & differentiarum calculus est multo longior, & molestior: summæ, & differentiæ nihil difficultatis habent.

37. Hinc habetur hic *nova methodus pro inveniendo valore* z: *ea addi potest methodis tribus ibi propositis* numero 58, quarum *tertia adhibet formulam pro ejus* tangente primo aspectu simpliciorem, quam sit hæc, quæ novâ hac methodo pertinente ad errores lineæ meridianæ inventa est, & continet novam solutionem problematis quærentis errorem secundum, ac tertium instrumenti transituum carentis primo: atque id fuerat indicatum in fine adnotationis positæ in ipso initio hujus Opusculi.

OPU-

OPUSCULUM XII.

DE DETERMINANDA LINEA MERIDIANA UNA CUM LINEA ÆQUINOCTIALI, ALTITUDINE POLI, ET DECLINATIONE SOLIS PER TRIA EXTREMA PUNCTA UMBRÆ GNOMONIS NOTATA IN PLANO HORIZONTALI, VEL VERTICALI. ACCEDUNT, QUÆ PERTINENT AD HOROLOGIUM SOLARE.

1. HOC Opusculum non *pertinet ad verificationem instrumentorum*, quæ *in Astronomia* solent adhiberi, sed potius ad *constructionem* unius ex iis, quæ diu *in* ipsa sunt adhibita inter *præcipua* Astronomiæ instrumenta. Adhibentur nunc etiam ingentium gnomonum meridianæ *lineæ ductæ* in locis amplioribus ad determinandum meridiei punctum, & dirigenda horologia oscillatoria, *uti* erat *illa*, quæ præbuit occasionem Opusculo præcedenti, & *cujus occasione hoc* inseritur huic Tomo, *quanquam*, *ut* hìc exhibetur, *pertineat non* ad accuratos usus *Astronomiæ*, *sed* ad Gnomonicam, quæ, ut *diximus* in adnotatione ad *initium Opusculi præcedentis*, ipsa demum est quædam Astronomiæ *applicatio ad usus civiles*. Adhibebitur *enim umbra styli brevioris*, ad ducendam lineam meridianam, quæ solaribus horologiis inserviat.

2. Solet duci linea meridiana in plano horizontali determinando duo puncta extrema umbræ styli æquè distantia a pede gnomonis, methodo notissima. Facto centro in eo pede, nimirum in eo puncto plani horizontalis, cui imminet ad perpendiculum vertex styli, per quem transit radius solis determinans punctum umbræ extremum, intervallo puncti ipsius umbræ notati binis, vel *ternis horis* ante meridiem describitur *circulus*, tum *expectatur momentum* temporis, quo *post* meridiem vertex umbræ *ipsius* redeat ad eum circulum: nam umbrâ curtatâ ob elevationem solis auctam continuo usque ad meridiem, is vertex ingreditur eum circulum, &

acce-

accedit perpetuo ad pedem styli, fit brevissima umbra ipsa in meridie, tum iterum crescit, eo vertice perpetuo recedente ab ipso pede, donec intervallo temporis a meridie vel accurate æquali priori elapso a præcedenti observatione usque ad meridiem, ut in solstitiis, vel satis proximè ad usus gnomonicos extra ea anni tempora, fiat iterum æqualis ei, quæ habebatur in illa eadem priori observatione, vertice ipsius redeunte ad eundem circulum. Reditur igitur post intervallum aliquanto brevius, & expectatur momentum, quo is vertex ad eum *circulum appellit* iterum, ac notatur id punctum: *recta, quæ conjungit ea puncta*, dividitur *bifariam, & per eam divisionem ducitur alia* recta ipsi perpendicularis, *quæ censetur linea meridiana* quæsita.

3. Solent autem etiam præparari plures *circuli* habentes centrum in pede styli, expectari mane appulsus verticis umbræ ad plures ex ipsis, tum reditus ad eosdem post meridiem, ut habeantur plures determinationes, quæ correctiorem exhibeant ductum lineæ quæsitæ assumpto medio quodam æstimato inter ipsas. Ii circuli duci non possunt post collocationem styli vel accurate, vel proxime verticalis, *pede gnomonis impedito* a crassitudine, quam habet ibidem ipse *stylus*. *Ad evitandum id incommodum* possunt delineari *plures circuli concentrici* in charta *separata*: tum, delineatâ circa centrum *illud commune figurâ* quavis, ut quadrato, *paullo ampliore, quam sit ipsius styli basis, & factâ* incisione secundum *latera* omnia dempto uno, potest inseri stylus in aperturam, quæ relinquitur, cedente charta ejus vertici, & plicata circa latus residuum non incisum: trahendo ipsam chartam in latus secundum unam directionem, facile ipsa adducitur in locum, in quo vertex styli æque distet a binis punctis circuli oppositis in ea directione: tum ea trahendo in directione perpendiculari priori directioni, adducitur ad locum, in quo ipse vertex distet æque ab aliis binis punctis circuli ejusdem positis in ea directione: patet, *pedem styli tum esse* in ipso eorum *circulorum* centro. Si in ea *positione affigatur charta plano ipsi dato* per tenues lamellas ceræ *interpositas, & præparatas prius* ad eum usum; puncta notata in ipsa transferuntur facile in id planum, vel in char-

tam

tam ipsi agglutinatam per pressionem cuspidis alterius puncti circini.

4. Remanet molesta expectatio reditus verticis umbræ ad circulum eundem. Ego quidem ad eam evitandam soleo ante meridiem accedere per exigua intervalla temporis, & in ea charta notare plura puncta umbræ, tum intervallo proxime æquali redire post meridiem, & notare plura alia parum a se invicem distantia: per utramque punctorum seriem duco levi manu lineam, quæ denotat viam verticis umbræ: assumo circino distantiam verticis styli ab uno e punctis lineæ matutinæ, & eodem circino translato ad lineam vespertinam, ac alterâ ejus cuspide delatâ per eam lineam alterâ directâ versus verticem styli ejusdem, quæro in ipsa punctum, quod æque distet ab eo vertice: per ea duo puncta ita inventa duco rectam, quam seco bifariam, & per illud punctum medium duco aliam perpendicularem eidem rectæ, vel potius facto centro in utroque ex iis punctis, assumo binas æqualium circulorum intersectiones, per quas duco rectam, quæ erit utique linea meridiana, tanquam si esset definita per appulsus cuspidis umbræ ad circulum habentem centrum in pede gnomonis: ductus autem linearum viæ umbræ exhibet commodum seligendi plura punctorum binaria, quæ exhibeant plures determinationes, ut illi plures circuli concentrici.

5. Patet utique, bina puncta ita inventa jacere in eodem aliquo ex ejusmodi circulis mente conceptis: si enim concipiatur recta perpendicularis ducta e vertice styli in planum ipsum, quæ ibi determinat verum gnomonis pedem, utcumque etiam stylus sit non nihil obliquus, vel etiam intortus; habebitur pro utrovis puncto triangulum rectangulum, cujus unum latus erit ipsa recta perpendicularis mente concepta, quæ erit altitudo gnomonis, alterum recta itidem concipienda, quæ tendit a pede ipso ad id punctum, hypothenusa autem radius, qui a vertice styli tendit ad idem punctum. Cum circino deprehensa sit æqualitas inter binas hasce hypothenusas, & latus illud primum, quod est altitudo styli, sit commune binis triangulis rectangulis pertinentibus ad ea bina puncta; erunt æqualia etiam latera ipsorum, quæ ad

ea tendunt ab ipso styli pede : adeoque ea puncta jacent in peripheria circuli habentis centrum in eodem pede .

6. Cum vellem evitare tam expectationem molestam momenti reditus ad eundem circulum , quam binas series punctorum , per quæ ducenda erant binæ viæ cuspidis umbræ ; quæsivi constructionem , quæ mihi exhiberet lineam meridianam per tria puncta ejus cuspidis quæcumque , ac inveni admodum elegantem , & expeditam , quæ commodissime adhiberi potest ad hunc usum . Eadem constructio paucissimis lineis adjectis exhibuit mihi intersectionem plani æquatoris cum plano horizontali dato , ex qua fluit determinatio altitudinis poli , occursus axis æquatoris cum plano dato , & determinatio declinationis solis , quæ facillime obtinentur per continuationem constructionis ejusdem . Hæc postrema usum non habet , nisi pro geometrica contemplatione , sed priores tres inserviunt delineationi horologii solaris , quanquam , quod pertinet ad hunc etiam usum , altitudo poli pro loco , pro quo ejusmodi horologium delineari debet , potius supponi potest cognita , & quidem accuratius , ex ipsis mappis geographicis , e quibus eruitur ejus loci latitudo æqualis ipsi altitudini poli , & ex hac potius deducitur constructio pro intersectione plani æquatoris cum plano horologii delineandi , & occursus axis cum eodem plano , quæ duo dicuntur æquator , & polus horologii ipsius : ea potius deducenda sunt ex altitudine poli , quam hæc ex ipsis . Adhuc tamen eorum omnium determinatio per constructionem geometricam simplicem , & commodam meritum habet suum saltem pro geometrica contemplatione , & exercitatione graphica .

7. Eam ob causam censui , fore operæ pretium , si hasce methodos hic insererem , atque id eo magis , quod constructio analoga adhibens tria puncta cuspidis umbræ notata in quovis plano verticali , dum determinat eadem omnia respectu loci alterius , qui habeat horizontem parallelum plano dato , exhibet determinationem itidem admodum simplicem pro ducenda in eodem plano linea meridiana ipsius loci , in quo ea puncta notata sunt , cum linea æquinoctiali , & polo horologii delineandi in eo ipso plano , ac determinat declinationem plani ipsius a plano Meridiani , &

lineas horarias, quæ pro horis Europæ communibus incipientibus numerationem a meridie, & media nocte ducuntur admodum facile in plano horizontali post determinatum polum horologii, & æquatorem, minus facile in plano verticali communibus methodis: ducuntur tamen admodum facile etiam ipsæ per continuationem constructionis ejusdem. Hæc omnia exponam in hoc Opusculo, & adjiciam occasione arrepta methodum pro delineandis etiam tropicis, qui horologium terminent, & indicabo methodum expeditam determinandi per *constructionem etiam lineas* horarias horologii Italici.

8. In demonstratione constructionum, quas proponam, *considerabo*, uti fit in Gnomonica, terram immotam, circa quam revolvatur sphæra cælestis habens pro centro ipsam, quin immo verticem styli, habitâ semidiametro terræ pro unico puncto respectu semidiametri ejus sphæræ: considerabo motum solis diurnum, ut factum in circulo parallelo æquatori, nimirum neglectâ, uti fit, mutatione declinationis exigua intra unum diem, & refractione, quæ duo pariunt effectus *nimis exiguos* respectu usus civilis, cui hæc horologia sunt *destinata*. *Suppositio motus* diurni facti in eo circulo *parallelo* æquatori, qui *habet* centrum in *hujus* axe, efficit ut radius digressus a centro solis, & appellens ad verticem styli describat in utroque æquinoctio planum perpendiculare axi æquatoris ducto per eum ipsum verticem, cujus intersectio cum plano horologii solaris est recta linea, quæ dicitur ipsius æquator. Reliquis anni diebus is radius describit superficiem coni recti habentis pro basi circulum motus diurni solis, pro axe illum ipsum axem æquatoris, pro vertice verticem styli, & continuatio ejus radii ultra hunc verticem describit conum inversum habentem eundem axem, & verticem: coni sectio quæcumque perpendicularis axi est circulus habens centrum in ipso axe, & abscindens a vertice styli, qui est vertex communis coni utriusque, latera inter se æqualia: ejus circuli planum est parallelum plano æquatoris, cum utrumque sit perpendiculare eidem axi, adeoque ejus intersectio cum plano horologii solaris est parallela lineæ æquinoctiali, & utraque in plano horizontali perpendicularis lineæ meridianæ, quæ est

inter-

intersectio plani Meridiani cum eodem plano. Utramque superficiem conorum ad verticem oppositorum secat planum horizontale, & verticale quodvis intra zonas temperatas, & intersectio est duplex ramus hyperbolæ: eæ, quæ pertinent ad duos tropicos, sunt bini rami hyperbolæ oppositi, qui appellantur tropici ipsius horologii, quod ii terminant.

9. Pro vertice umbræ accipiam, uti pariter fit in Gnomonica, id punctum plani dati, ad quod terminatur radius transiens per verticem styli. Magnitudo disci apparentis solis generat eam, quæ dicitur penumbra: ea arctat umbram, & minuit; sed ea itidem *hìc negligitur*, & *consideratur* sol totus, tanquam unicum punctum *radians*. *Ubi stylus est longior*, *effectus penumbræ est magis sensibilis*, ac *ad ipsum minuendum in vertice styli* ipsius additur globulus pro cuspide, & consideratur pro vertice umbræ styli medium umbræ globuli ipsius, quæ circumquaque restringitur a penumbra, quanquam ipsum medium ejus umbræ, quæ induit formam ovalem, non respondet accurate illi radio digresso e centro disci solaris, & transeunti per centrum ejus globuli: sed ea omnia negligi solent in Gnomonica, ubi ad usus civiles satis est considerare verticem umbræ tanquam determinatum a solo radio centrali. In eo sensu hìc accipimus nomen verticis umbræ, dum proponimus determinandam lineam meridianam per tria puncta extrema umbræ appellando ipsa etiam vertices umbræ: vertex ita acceptus percurrit in æquinoctiis illum horologii solaris æquatorem rectilineum, & in solstitiis illos hyperbolicos tropicos: porro intelligam hunc ipsum verticem, ubi nominavero simpliciter punctum umbræ.

10. Iis præmissis progrediar ad determinationes propositas, incipiendo a constructione pro linea meridiana determinanda in plano horizontali per tres umbræ vertices.

11. *Problema* I. *Dato styli vertice*, *&* *tribus punctis umbræ notatis in plano horizontali*, *ducere in eodem plano lineam meridianam*.

12. Sit (Tab. VIII. fig. 1) T vertex styli positus in sublimi, & A, A', A'' sint tria puncta umbræ notata in plano horizonta-

 li,

li, in quo jacet etiam punctum S, cui perpendiculariter imminet punctum T: id impeditur a crassitudine pedis styli jam erecti juxta num. 3: sed eo hic non indigebimus pro constructione problematis: adhibebitur pro demonstratione, pro qua satis est ipsum mente concipere. Unum ex iis tribus punctis habebit distantiam a vertice styli minorem, quam reliqua duo, sive ea habeant distantias æquales, quo casu obtinetur linea meridiana methodo expositâ numero 2 sine ope puncti tertii, sive inæquales, pro quo casu adhibetur hæc alia methodus, quæ exhibebit solutionem hujus problematis pro *casu, in quo omnes tres* eorum punctorum distantiæ *sint inæquales. Seligantur ea duo, quorum* alterum habet *distantiam maximam*, & alterum minimam, quæ sint A, & A', *tertio* A'' *habente* intermediam. Possent seligi duo quæcumque, sed quædam intersectionum puncta possent *ita* longe recedere, ut ad ea deveniri non posset.

13. Factis centris in A, & A', & aperto circino prius ad distantiam AT (*), tum ad A'T, inveniatur in plano horizontali intersectio duorum arcuum circularium in *t*: ducantur rectæ *t*A, *t*A', AA', & hæ binæ postremæ producantur indefinite: aperto circino ad intervallum TA'', & applicatâ alterâ ejus cuspide ad *t* inveniantur cuspide altera in recta *t*A, & in *t*A' productâ puncta *b*, *b'*: ducatur recta *bb'*, quæ rectæ AA' necessario occurret in aliquo puncto C: ducatur per A'', & C recta linea, quam dico primò debere esse perpendicularem lineæ meridianæ quæsitæ: Inveniantur in hac linea ope circini applicati ad T, & aperti ad distantiam arbitrariam majorem eâ, quam id punctum habet ab ea ipsa linea, duo puncta F, F': facto centro in F, & F' inveniatur intervallo arbitrario aliquanto minore una intersectio binorum arcuum circularium inter stylum, & eam lineam in M, & alia aliquanto majore altera in M' ad partem oppositam: ducatur recta MM', quam dico secundo fore lineam meridianam quæsitam.

14. Nam

(*) Rectæ lineæ, quæ sunt in plano horizontali dato, ducuntur hic tractu continuo, quæ autem extra id planum per puncta, quo facilius distinguantur ab illis, ut ST, & tres TA, TA', TA'', quarum secunda producta.

14. Nam in primis rectæ TA, TA', TA'' sunt tres positiones radii transeuntis per verticem styli describentis planum æquatoris in æquinoctiis, & superficiem coni recti extra ea tempora, cui casui generali aptata est figura. Si concipiatur, totum planum trianguli AtA' converti circa rectam AA' immotam; punctum t abibit in T ob latera tA, tA' æqualia lateribus TA, TA' per constructionem, & puncta b, b', quæ erant in recta tA, & in tA' producta, abibunt in rectam TA in B, & in TA' productam in B', punctum autem C manebit in recta AA' immota. Hinc puncta A, B, B' posita in lateribus superficiei coni descriptæ a radiis ad distantias æquales a vertice coni T jacebunt in circulo quodam, cujus planum erit perpendiculare axi ipsius coni, & is circulus vel erit æquator ipse, vel in casu generali habebit planum parallelum ejus plano. Cum in eo plano sint puncta B, B', erit in ipso recta tota BB', adeoque & ejus intersectio C cum recta AA'; cum ea intersectio sit etiam in plano horizontali, & punctum A'' sit itidem tam in plano ejus circuli, quam in plano horizontis; recta A''C erit intersectio ejus plani cum horizonte: ea intersectio debet esse perpendicularis plano Meridiani, cum huic plano sit perpendiculare tam planum horizontale, quam planum ejus circuli, quod nimirum est perpendiculare axi æquatoris jacenti in eodem plano Meridiani, in quo est & vertex styli, qui concipitur, ut centrum sphæræ cælestis, & polus æquatoris sphæræ ejusdem. Debet igitur ea intersectio esse perpendicularis etiam lineæ meridianæ quæsitæ jacenti in eodem Meridiani plano.

15. Porro satis patet, rectam FF' debere secari bifariam in I a recta MM' ducta per illas binas intersectiones M, M'. Si autem concipiantur mente rectæ FT, F'T, FS, F'S, TI, quæ non ducuntur, ne confundatur figura plus æquo; patebit, in triangulis rectangulis TSF, TSF' habentibus latus ST commune, & hypothenusas TF, TF' æquales æqualia fore etiam latera SF, SF', adeoque triangulum FSF' erit isosceles: cum recta SI secet bifariam hujus basim FF'; secabit ipsam etiam ad angulos rectos, adeoque congruet cum recta MM', quæ itidem transit per I, & est

per-

perpendicularis eidem FF', ut vidimus. Eadem FF' est etiam perpendicularis rectæ TI, quæ secat itidem in I bifariam eandem basim trianguli FTF' isoscelii; adeoque, ea recta est perpendicularis plano STI, in quo jacent eæ duæ rectæ: cum ipsa FF' debeat esse perpendicularis plano Meridiani transeunti itidem per rectam ST; planum illud ipsum erit planum Meridiani, & recta SMM', ejus intersectio cum plano horizontali erit linea meridiana quæsita, quod erat alterum propositum.

16. *Scholium* 1. Si *distantia* A''T, quam supposuimus mediam inter duas reliquas AT, A'T, esset æqualis alteri earum; casus recideret in illum simplicem duorum punctorum æque *distantium* a *vertice* styli, quam exhiberet hæc ipsa *constructio*, & simul ostenderet tertium punctum evadere inutile. Si essent æquales TA'', TA; recta TB evaderet æqualis rectæ TA, & punctum C abiret in A cum puncto B, adeoque recta A''C evaderet ipsa A''A, quæ secanda esset bifariam per illas duas intersectiones M, & M' ad inveniendam lineam meridianam MM': si autem essent æquales TA', TA''; puncta B', C abirent in A', & recta A''A' præstaret idem officium. Patet autem, eo minus fore periculum errandi, quo discrimen distantiarum maximæ, & minimæ fuerit minus, punctis A, A' existentibus parum remotis a se invicem, dummodo tertium punctum A'' sit satis remotum ab ipsis: nam intervallum AA', intra quod debet cadere punctum C, eo erit brevius, & distantia major puncti A'' ab ipso C reddet minus erroneam directionem rectæ A''C, determinatam per puncta A'', & C non penitus accurata. Hinc ad hunc usum præstabit assumere bina puncta ante meridiem, & ad intervallum exiguum, tertium autem post ad intervallum a meridie medium inter intervalla præcedentium ab eodem, vel viceversa. Verum res adhuc bene procedet, utcumque intervallum inter puncta distantiæ maximæ, & minimæ non sit exiguum; dummodo punctum distantiæ intermediæ assumptum sit satis remotum ab ipsis.

17. Si pro punctis distantiarum extremarum assumeretur unum ex iis punctis, & alterum distantiæ mediæ; recta *bb'* non secaret basim AA' nisi productam, & si distantia reliqua differret parum ab altera

tera præcedentium ; intersectio C abiret longissime , quod facile demonstrari potest : quamobrem seligenda erant puncta distantiarum maximæ , & minimæ , uti est præstitum , quod cavendum monuimus num. 16.

18. *Scholium* 2. Si haberetur punctum S ; determinatio esset simplicior. satis esset ducere per id punctum rectam SM perpendicularem rectæ A''C , quæ esset Meridiana quæsita : id punctum non erat necessarium pro solutione hujus problematis , ut nec erit pro solutione sequentis : sed id requiretur pro *tertio cum ipsa magnitudine rectæ perpendicularis ST , quam appellabimus* altitudinem styli , *& punctum S ipsius pedem* , utcumque ipse stylus sit forte *inclinatus* , vel *etiam intortus* : Poterit tamen id punctum haberi in eadem charta cum punctis umbræ , & *omnibus lineis* , quæ habentur in hac figura , si adhibeatur charta illa perforata per foramen quadratum , de qua mentio est facta numero 3 . Nam in ipsa ante sectionem per illa tria latera quadrati , loco integrorum circulorum habentium centrum in eo puncto , quod per operationem ibi indicatam debet adduci ad locum , in quo ipsi perpendiculariter immineat vertex styli , possunt *duci solâ circini cuspide* sine atramento binæ rectæ sibi invicem perpendiculares ad sensum , & in iis assumi quatuor segmenta inter se æqualia , notatis in eorum fine quatuor punctis : *factâ sectione* , & plicato quadrato circa *latus non sectum* , inseretur stylus intra aperturam , & charta adducta ad planum poterit moveri in latus , donec circino applicato inveniatur æqualitas illorum quatuor punctorum a vertice styli : constabit utique , locum intersectionis binarum rectarum respondere pedi styli S . Affixâ ipsa chartâ plano dato ope ceræ , ut possit avelli , cum libet , notabuntur in marginibus ipsius oppositis quatuor lineolæ excurrentes ultra ipsos supra plani ipsius superficiem , quarum ope charta ipsa inde detracta poterit , cum libuerit , reponi in locum priorem . In ea ita collocata poterunt excipi *puncta umbræ* , & *inveniri punctum* t , duci *latera* tA , tA' , & in iis inveniri *puncta* b , b' *centro* t *intervallo* TA'' , & ductâ bb' , quæ determinet punctum C , duci recta A''C : tum detractâ charta ipsâ , & reducto illo quadrato ad locum priorem ha-

be-

bebitur in charta eâdem etiam punctum S in illâ intersectione binarum rectarum, in quibus notata fuerant illa quatuor puncta: Per id punctum poterit duci recta linea perpendicularis rectæ A''C: vel ope normæ, vel per methodos notas, quæ habentur in Geometria pro ducenda per punctum datum recta perpendiculari rectæ datæ. Eadem charta poterit adhiberi pro constructione eorum e sequentibus problematis, quæ requirent ipsum punctum S; vel ejus ope poterunt transferri in aliam chartam ipsi suppositam ea puncta figuræ in ea delineatæ, quæ necessaria erunt ad constructiones ipsas, & ad earum continuationes pro aliis operationibus, quæ non requirent nisi partem præcedentium determinationum, omissis lineis, quæ ductæ fuerant pro obtinendis determinationibus ipsis, ne multitudo linearum, quæ nullius sint ulterioris usus, figuram confundat.

19. *Problema* 2. *Ex iisdem datis invenire intersectionem plani æquatoris cum eodem plano horizontali.*

20. Per punctum t ducatur recta parallela rectæ bb', quæ occurrat in D rectæ AA' productæ, quantum oportet, tum e puncto D recta parallela rectæ A''C, quæ occurrat lineæ meridianæ in E: ea erit intersectio quæsita.

21. Si enim planum trianguli AtA' convertatur, ut prius, circa rectam AA', donec punctum t abeat in T; recta tD abibit in TD, & erit parallela rectæ BB', in quam debet abire recta bb'. Si autem concipiatur planum æquatoris transiens per verticem styli T, id erit parallelum plano illius circuli transeuntis per puncta A'', B, B', adeoque ejus intersectio cum plano ATA', quæ debet transire per punctum T, debet esse parallela intersectioni BB' plani ejusdem circuli cum plano ejus trianguli: hinc ea debet congruere cum recta TD, & proinde punctum ipsum D, quod est itidem in plano horizontali, erit simul in hoc, & in plano æquatoris, & idcirco debet pertinere ad intersectionem eorum planorum. Intersectio autem eadem plani æquatoris cum plano horizontali debet esse parallela intersectioni A''C plani illius circuli transeuntis per puncta A'', B, B', cum planum æquatoris, & planum ejus circuli sint parallela. Quare intersectio quæsita est

illa;

illa ipsa recta DE, quæ ducta est per punctum D parallela ipsi A''C, ut oportebat.

22. *Scholium*. Pro hac operatione puncta A, A' non debent esse nimis proxima, ne brevitas rectæ *bb'*, cui debet duci parallela recta *t*D, augeat errorem, qui committi potest in ejus directione. Quare proximitas eorum punctorum, quæ prodest accurationi lineæ meridianæ, nocet accurationi lineæ æquinoctialis. Hinc vel seligenda sunt tria puncta umbræ, quæ omnia habeant distantias inter se satis ingentes, ad habendam per idem ternarium punctorum umbræ utranque determinationem minus erroneam, vel seligenda bina ternaria diversa, pro utrovis suum ipsi magis opportunum.

23. *Problema* 3. *Invenire occursum axis æquatoris cum plano horizontali, nimirum polum horologii solaris, & altitudinem poli.*

24. Sint in fig. 2 puncta S, E eadem, ac in fig. 1: ducatur e puncto S recta perpendicularis rectæ ES, in qua inveniatur punctum T' centro E, & intervallo æquali rectæ ET figuræ 1: ducatur recta ET', & ipsi perpendicularis per T' recta occurrens rectæ ES in P. Erit P polus quæsitus, & angulus SPT' quæsita poli altitudo.

25. Si enim in fig. 1 concipiatur in plano Meridiani EST recta ducta per T perpendicularis rectæ ET, quæ occurrat Meridianæ M'EMS productæ in P; erit PT ibi axis æquatoris, qui debet jacere in plano Meridiani, & esse perpendicularis plano æquatoris, adeoque etiam rectæ TE: nam hæc jacet in ipso æquatoris plano, cum id planum transeat per T, & occurrat plano horizontali in recta DE: elevatio autem ipsius axis supra planum horizontale, in quo jacet recta PSE, est angulus SPT, quæ idcirco est elevatio poli. Porro comparando figuram 1, & 2, in triangulo rectangulo EST illius, & EST' hujus latus ES est idem utrobique, & hypothenusa ET' hujus æqualis hypothenusæ ET illius per constructionem, adeoque & ST' hujus est æqualis ST illius, & angulus SET' hujus angulo SET illius. Hinc etiam triangulum ET'P hujus æquale triangulo ETP illius ob angulos ad E æquales, angulos ET'P, ETP rectos itidem æquales, & latus ET'

hujus æquale lateri ET illius. Quare etiam latus TP utrobique idem cum polo P communi, & angulus EPT', sive SPT' hujus, æqualis angulo ETP, sive SPT illius, nimirum altitudini poli.

26. *Scholium* 1. Si observatio fiat die æquinoctii; puncta A, A', A'' jacebunt in directum, nimirum in eadem recta æquinoctiali, quæ quæritur, quam debet percurrere eo die vertex umbræ: recta ACD congruet cum recta AA'', evanescente angulo A''CD, adeoque evanescet etiam angulus ADE, puncto ipso E abeunte in rectam eandem. Quamobrem die æquinoctii nullum opus erit tertio puncto: præstabuntur omnia multo facilius per sola quæcunque duo puncta umbræ notata horis quibusvis. Per ea duo puncta ducetur recta indefinita, quæ erit intersectio plani æquatoris cum plano dato, nimirum recta æquinoctialis quæsita: in ipsa invenientur illa duo puncta FF', per quæ determinabuntur puncta M, M', & linea meridiana transiens per ipsa. Sed cavendum, ne accipiantur duo puncta parum distantia a se invicem, ne exiguus error in notatione punctorum, & is, qui oritur a mutatione declinationis solis, quæ impedit motum diurnum ipsius accurate circularem, deflectat plus æquo lineam æquinoctialem, & lineam meridianam ipsi perpendicularem a directione ipsis debita.

27. *Scholium* 2. Si non supponatur punctum S inventum in fig. 1 ope illius chartæ perforatæ, invenietur facile ipsum, & fiet omnis reliqua operatio sequenti pacto. Ductâ in figura 2 rectâ arbitrariâ, assumatur in ipsa segmentum M'M æquale rectæ MM' figuræ 1: centro facto prius in M, & intervallo distantiæ MT figuræ 1, tum centro M' figuræ secundæ, & intervallo M'T figuræ 1 inveniatur in fig. 2 intersectio, quæ exhibebit in hac punctum T' respondens puncto T illius. Ductâ in hac ex T' rectâ T'S perpendiculari ad MM', patet, hanc debere respondere rectæ TS illius, quæ idcirco exhibebit & pedem styli S, & altitudinem ipsius ST' æqualem altitudini ST illius: ductâ autem hìc, ut prius, rectâ T'P perpendiculari ad rectam ET', habebitur eodem modo & locus poli P, & ejus elevatio SPT' supra horizontem.

28. Altitudo poli poterat haberi etiam ante ductam T'P in triangulo ET'S, cujus angulus ST'E est æqualis angulo SPT', cum uter-

terque sit complementum ejusdem anguli PT'S, ille ob angulum ET'P rectum, hic ob angulum PST' rectum in triangulo SPT'. Hinc poterat inveniri altitudo poli productis lateribus T'S, T'E, & applicato ad T' semicirculo diviso in gradus, sed multo adhuc accuratior capiendo in scala exhibente partes admodum exiguas valorem rectarum ST', SE, quorum posterior divisus per priorem exhibet tangentem anguli ST'P quæsiti, vel assumendo valorem hypothenusæ ET in ipsa figura 1, & valorem distantiæ puncti T a plano dato, quæ altitudo facile obtinetur superposito cuspidi styli plano quopiam, ut tabellâ, vel etiam facie plana regulæ cujuspiam positæ in plano proxime parallelo horizonti, & assumptâ ope circini distantiâ eorum planorum: valor ejus altitudinis divisus per valorem ejus hypothenusæ exhibet cosinum quæsitæ altitudinis poli.

29. *Problema* 4. *Invenire declinationem solis*.

30. *Sit in fig.* 2 punctum A' idem, quod in fig. 1, vel si ea figura est facta in charta nova, inveniatur in hac punctum A' per intersectionem binorum arcuum circularium habentium centra itidem in M, & E, & aperturas circini æquales intervallis EA', MA' figuræ 2, quæ intersectio respondebit, ut patet, puncto A' figuræ 1: centro S intervallo SA' inveniatur in linea meridiana ex parte utrâvis punctum *a*: centris P, & T', intervallis PA', & T'*a* inveniatur punctum *a*', & ducatur recta T'*a*': angulus ET'*a*' erit declinatio quæsita.

31. Nam in figura 1 angulus PTA' erit is, quem continet radius TA' cum axe PT, cujus differentia ab angulo recto PTE, quem continet radius æquinoctialis TE cum axe eodem, erit declinatio quæsita ejus momenti, in quo facta est observatio, & ea declinatio erit borealis, vel australis, prout is angulus fuerit acutus, vel obtusus. Quare ad inveniendam eam declinationem satis erat in figura 2 efficere angulum PT'*a*' versus rectam T'E, qui sit æqualis angulo PTA' figuræ 1. Id autem est præstitum per operationem indicatam.

32. Si enim concipiatur in fig. 1 recta PA'; translatum est triangulum PA'T figuræ 1 in P*a*'T' figuræ 2 per æqualitatem laterum

P*a*', T'*a*' hujus cum lateribus PA', TA' illius. Est enim latus P*a*' hujus æquale lateri PA', quod est idem utrobique, tum ob latus ST' hujus æquale lateri ST illius, & S*a*' hujus æquale SA', quod itidem est idem utrobique, ac ob angulum in S utrobique rectum, etiam hæc hypothenusa T'*a*' hujus est æqualis hypothenusæ TA' illius. Cum igitur etiam basis PT' trianguli PT'*a*' hujus sit æqualis basi PT trianguli PTA' illius; erit etiam angulus hujus PT'*a*' æqualis angulo illius PTA', & ejus differentia a recto PT'E *declinatio*, quæ erit *borealis*, vel *australis*, prout recta T'*a*' ceciderit respectu rectæ T'P citra T'E, ut figura exhibet, vel ultra, angulo PT'*a*' existente acuto in *primo casu*, & obtuso in secundo.

33. *Scholium*. Si O sit occursus rectæ T'*a*' cum linea meridiana PE, assumpto etiam valore rectæ SO in eadem scala, & diviso per valorem ST', habebitur tangens anguli ST'O, & is angulus, qui ablatus ab angulo ST'E æquali, *ut vidimus*, *altitudini poli*, exhibebit declinationem *quæsitam*.

34. *Problema* 5. *Invenire eadem omnia in plano verticali una cum positione ipsius respectu plani Meridiani.*

35. Sit in fig. 1 T itidem vertex styli, & TS recta perpendicularis plano verticali dato, cujus positio, quæ erat verticalis, dum ageretur de plano horizontali, evadit horizontalis, dum agitur de verticali, & dicetur non altitudo, sed longitudo gnomonis, utcunque stylus ipse sit inclinatus, vel etiam intortus. Habitis tribus punctis umbræ A, A', A'', haberi potest constructione præcedenti eadem recta A''C intersectio plani propositi cum plano circuli transeuntis per puncta A'', B, B', quod planum est perpendiculare axi æquatoris, tum recta linea MM' perpendicularis eidem A''C, quæ ibi erat linea meridiana, hìc appellatur substylaris: esset autem Meridiana ejus loci, qui habet horizontem suum parallelum ei plano verticali, nimirum ejus loci, qui habet pro suo zenith punctum superficiei cælestis, ad quod tendit recta horizontalis ST producta usque ad ipsam. Eodem pacto per rectam *t*D parallelam rectæ *bb*' potest inveniri punctum D, quod hìc itidem est in intersectione plani æquatoris transeuntis per verticem styli

habiti

habiti pro centro sphæræ cælestis cum plano, in quo notata sunt puncta umbræ, & recta DE parallela rectæ A''C, quæ erit itidem intersectio plani æquatoris cum eodem plano verticali, nimirum pro horologio solari linea æquinoctialis, quam percurret vertex umbræ diebus æquinoctii utriusque.

36. Operatio, quæ requirit punctum *S*, & *transitum per ipsum* pro invenienda intersectione axis *cum illo plano*, adhibenda pro polo horologii fieret itidem *eodem modo*: sed hic non potest adhiberi charta illa *perforata ad eum finem*, *si* agatur de stylo longiore, *uti adhiberi solet pro horologiis* solaribus, & vero etiam *pro linea meridiana murali*: superiores etiam operationes admodum *difficulter fierent* in plano verticali, *etiamsi* adhiberetur stylus exiguus; sed difficultas augetur, ubi *stylus* est *ingens*. Transferenda sunt puncta in chartam, uti præstitum est in fig. 2; sed *dum ibi* assumptæ sunt dimensiones eædem, hic erit opportunum *eas assumere minores in* aliqua ratione data, quibus ita translatis *fient operationes omnes in* eadem charta, tum ea ex inventis, quæ erunt conservanda *pro horologio*, vel Meridiana murali transferentur in murum per partes *itidem proportionales*.

37. Ea translatio fiet admodum facile. Ducatur *in muro* per A recta verticalis GA, quod facile fiet ope fili sustinentis pondus, si id *adducatur ante punctum* A, collocato oculo ita, ut id *punctum ab eo tegatur*, *determinabitur punctum* G, quod tegatur itidem *in eadem oculi positione*: tum ope *libellæ inveni*entur puncta N, N', in quibus ei rectæ occurrent lineæ horizontales, quæ concipiantur ductæ per puncta A', A'', & habebuntur in partibus scalæ cujuspiam tam rectæ AN, AN', quam distantiæ NA', N'A''. In charta adhibenda ducetur recta AG, & in ea accipientur e scala particularum multo minorum segmenta AN, AN' continentia *eosdem* numeros harum particularum minorum: ducentur per N, & N' *in eadem charta* rectæ perpendiculares ipsi AG, & in iis sumentur *segmenta* NA', N'A'' continentia eosdem numeros partium minorum, *quos* numeros *majorum continebant* illæ horizontales in muro: *sic habebuntur* in charta tria puncta A, A', A'' respondentia tribus punctis umbræ notatis in muro: tam positione

ne mutua, quam respectu lineæ verticalis ductæ in muro per A & in charta itidem per suum A, quod illi respondet, quæ linea refert eandem lineam verticalem muri. Tum centris A, & A' inventis in ea charta, ac intervallis assumptis in scala minore, quæ respondeant distantiis AT, A'T assumptis in muro, & translatis in scalam majorem invenietur in ipsa charta punctum *t*, & intervallo, quod eodem modo respondeat distantiæ A''T assumptæ in muro, invenientur in charta puncta *b*, *b'*, & fiet ibi tota constructio problematis primi, & secundi. Iis inventis poterit sine ulla necessitate novæ figuræ fieri in eadem charta habente puncta A, M, E, & liberum locum pro puncto S eadem constructio, quæ facta est in figura 2, qua tamen hic utemur, ne lineæ veteres confundantur cum novis.

38. Invenietur punctum T' ejus figuræ per intervalla ET', MT' non quidem æqualia, ut prius, sed proportionalia iisdem assumptis in muro, & factâ reliquâ constructione, ut ibi, invenietur polus P. Ductâ per ipsum lineâ PQ parallelâ lineæ GA *figuræ 1*, ea erit linea meridiana loci, in quo assumpta sunt puncta umbræ: nam linea meridiana est intersectio plani Meridiani cum plano muri proposito, in quam intersectionem debebit semper cadere vertex umbræ in meridie, cum is debeat jacere in plano Meridiani eo momento temporis, quo sol appellit ad Meridianum ipsum, & transire per verticem styli T figuræ 1 jacentem in eodem plano Meridiani cum polo P invento, & jacente cum ipsa in eadem intersectione. Porro intersectio plani Meridiani, quod est utique planum verticale, cum quovis plano verticali, ut est planum muri, quod hic refertur a plano chartæ, debet esse verticalis, & debet transire per punctum P, in quo axis æquatoris incurrit in planum datum verticale, cum is axis jaceat in ipso Meridiani plano. Rectâ autem ductâ ex P parallelâ rectæ GA figuræ 1, quæ ibi respondebat rectæ verticali determinatæ in muro, debet & ipsa respondere rectæ verticali transeunti in ipso muro per ejus punctum P.

39. Quando linea PE figuræ 2 erat horizontalis, & ST' respondebat stylo verticali; angulus SPT' exhibebat altitudinem poli res-

li reſpondentem elevationi axis PT' ſupra horizontem PS : at hìc ubi planum chartæ jam exprimit planum datum verticale, recta ST' refert ſtylum perpendicularem plano verticali, qui idcirco habet poſitionem horizontalem. Hinc altitudo poli exhibetur ab angulo ST'P, rectâ T'P referente hìc etiam axem, cujus elevationem ſupra lineam horizontalem ST' poſitam in plano Meridiani exhibet angulus ST'P. Hìc eſt complementum anguli SPT', qui exhiberet altitudinem poli oppoſiti ſupra horizontem loci illius, qui habet horizontem ſuum parallelum plano verticali dato. Hinc tangens altitudinis poli pro loco, in quo fit obſervatio, habetur dividendo e contrario valorem SP per valorem ST'.

40. *Declinatio ſolis inveniretur hìc etiam, ut prius : nam hìc* etiam T'E refert *interſectionem plani æquatoris cum plano* Meridiani, & angulus PT'*a* eſt æqualis illi, qui reſpondet angulo contento a radio ſolis, & axe æquatoris, adeoque hìc etiam is angulus exhibet declinationem ſolis quæſitam.

41. Angulus, quem continet murus cum plano Meridiani invenietur ductâ SR perpendiculari lineæ meridianæ PQ : ejus tangens erit valor ST' diviſus per SR. Si enim triangulum PST' convertatur circa rectam PS, donec ST' acquirat poſitionem horizontalem, quam habet ſtylus reſpectu muri, ac in ea poſitione verticis T' concipiatur recta T'R ; orietur triangulum PT'R, *cujus planum erit ipſum* planum Meridiani, cum tranſeat per axem, & per lineam PQ, quæ eſt interſectio plani Meridiani cum muro : habebitur etiam triangulum T'RS, cujus planum erit horizontale, cum ſit horizontalis tam recta SR, quæ continet angulum rectum cum verticali PR, quam recta ST', quæ tum referet ſtylum horizontalem. Hinc angulus SRT' contentus a rectis RS, RT', quæ in ea poſitione ſunt perpendiculares interſectioni plani Meridiani, & plani muri PRS, exhibet eum, quem ea plana continent, nimirum inclinationem eorum planorum. Porro in eo triangulo SR eſt latus adjacens angulo in R, & ST' latus oppoſitum, adeoque hoc diviſum per illud exhibet tangentem ejus anguli.

42. Si linea meridiana PQ tranſiret per S, evaneſcente rectâ

SR;

SR ; *stylus ST* *jaceret in ipso* plano *Meridiani* , cui posset perpendiculare planum muri , quo casu tangens ejus anguli evadit infinita . E contrario valor rectæ SR divisus per valorem styli exhibet angulum , quo aspectus muri declinat a cardine horizontis australi versus plagam orientalem , vel occidentalem , prout punctum R respectu puncti S jacet ad sinistram, *vel ad dexteram aspicientis* murum ipsum.

43. Hinc habentur per *tria* puncta umbræ notata in plano verticali ea omnia , *quæ inventa fuerant per tria puncta* notata in plano horizontali , & *præterea positio plani ejusdem respectu* plani Meridiani , quod hic *erat propositum* .

44. *Scholium* 1. *Superiores methodi sunt propositæ ad ostendendum usum trium punctorum* umbræ notatorum tam in plano horizontali , quam in quovis plano verticali . Cæterum pro invenienda linea meridiana in plano verticali , & declinatione muri a positione respiciente directe cardinem australem , commodissima mihi videtur methodus , qua uti soleo , determinandi in tabella quadrata habente stylum sibi perpendicularem , & collocata in positione horizontali , in *qua unum ejus latus* applicetur ipsi muro , lineam meridianam per duo puncta umbræ *æqualiter distantia* a vertice styli , vel per tria quæcunque : tum altera die applicato eodem modo ad murum eodem *latere* ejus *tabellæ* , expecto momentum , quo vertex umbræ devenit ad lineam meridianam *tabellæ* ipsius , & eo momento noto in muro verticem umbræ styli muralis jam collocati : duco per id punctum lineam verticalem , quæ est Meridiana quæsita.

45. Si quis velit accurationem majorem ; potest adhibere horologium oscillatorium bene directum per altitudines correspondentes dierum præcedentium , quod exhibeat momentum meridiei accuratum , & eo momento notare verticem umbræ styli cuspidati , vel centrum umbræ globuli ipsi adjecti ; per quod *linea* meridiana duci debet . Si pro umbra gnomonis *adhibeatur* potius radius solis transmissus per exiguum foramen *laminæ* metallicæ , quæ solet etiam adhiberi pro Meridianis *muralibus* ; eodem pacto determinari potest centrum imaginis ovalis exhibitæ ab incursu

radii

radii transmissi in murum momento meridiei determinato per horologium, per quod centrum ducatur linea verticalis exhibens Meridianam quæsitam.

46. Ubi adhibetur stylus applicatus muro, distantia SR (fig. 2) mediæ basis ipsius a linea meridiana, una cum ejus longitudine ST' exhibebit positionem muri respectu plani Meridiani. Si stylus est bene perpendicularis muro, & ejus basis ad S bene circularis; facile invenitur distantia ipsa SR, assumendo nimirum distantiam lineæ meridianæ ab ipsa basi, & ei addendo dimidium ejus crassitudinis: longitudo autem ST (fig. 1) facile determinatur methodo superius indicata, nimirum si ipse stylus desinit in cuspidem, applicando ad ipsam cuspidem planum quodpiam, ut latus regulæ, in positione ad sensum parallela muro, & capiendo per aliam regulam, vel ope circini distantiam muri ab eadem priore regula prope ipsam basim, ne exiguus error commissus in parallelismo regulæ ipsius a plano muri inducat errorem sensibilem in mensuram distantiæ quæsitæ. Si stylus ad minuendos errores natos a penumbra desinit in globulum; determinatâ eo pacto distantiâ plani paralleli ipsi muro tangentis eum globulum, satis est demere semidiametrum globuli ipsius ad habendam distantiam ST centri, quod est adhibendum pro longitudine styli in reliquis determinationibus pertinentibus ad constructionem horologii solaris. Nam pro usu simplicis meridianæ lineæ nullum est opus ipsarum SR, ST' figuræ 2: satis est invenire punctum umbræ momento meridiei, & ducere lineam verticalem.

47. Ad habendam positionem muri respectu plani meridiani adhiberi potest ipsa positio lineæ meridianæ ductæ in ea tabella respectu ejus lateris applicati ad murum ipsum: angulus, quem ea linea continet cum muro, est utique is, quem planum muri continet cum plano Meridiani. Is angulus facile determinatur ducendo in eadem superficie tabellæ, vel in charta ipsi applicata, in qua notata sunt puncta umbræ, & ducta est linea meridiana, lineam huic parallelam, quæ pertingat usque ad id latus. Assumpto ope circini in hac linea parallela intervallo noto in partibus scalæ particularum exiguarum a concursu ejusdem lineæ cum

latere *tabellæ*, *tum distantiâ* extremi *puncti ejus intervalli* a latere *ipso*, *quæ* facile obtinetur ope circini ejusdem, habetur sinus anguli quæsiti, dividendo hanc distantiam per *illud* intervallum.

48. Hæc methodus est multo facilior, quam præcedens per rectas SR, T'R, & multo magis accurata, ac tuta, quam ea, quæ adhiberi solet ope acus magneticæ, pro quo usu fiunt instrumenta, quæ adducto latere regulæ indicantis gradus in limbo instrumenti ipsius ad murum, & capsulâ continente acum magneticam ad consensum hujus cum puncto, quod debet respondere ejus declinationi, obtinetur per indicem simplicem, vel etiam per nonium numerus graduum, vel graduum & minutorum anguli respondentis ei positioni regulæ applicatæ. Declinatio acus magneticæ mutatur etiam intra eundem diem mutatione sensibili: præterea ejus directio mutatur facile a ferramentis parum remotis, & vero etiam a clavibus, quas quis habeat in pera: ipsi etiam lateres, quando muri sunt lateritii, sæpe habent admixtas particulas ferreas. Usus acus magneticæ est admodum periculosus etiam in mensuris geodeticis, quam ob causam ego cum pro additamento ad mensuram graduum Meridiani construxi cum meo Adjutore P. Maire mappam geographicam totius Pontificiæ ditionis, nunquam sum usus acu magnetica, perficiendo omnia per triangula methodo magis operosâ, sed magis exactâ, & magis tutâ.

49. *Scholium* 2. Habitis punctis P, S, E, T' figuræ 2, admodum facile est delineare in plano horizontali horologium solare pro horis incipientibus numerationem a meridie, & a media nocte, quod appellant in Italia horologium Gallicum, est autem commune toti Europæ extra Italiam, & ditionem Turcarum, quanquam etiam in pluribus Italiæ provinciis adhibetur jam illud idem commune. In Italia olim incipiebant numerationem ab occasu solis: tum detractâ semihorâ usus invaluit, ut numerentur a fine vividioris crepusculi adhibendo pro initio noctis momentum distans ab occasu solis per dimidiam horam. Hinc in eo horologio punctum fixum pro occasu solis est hora $23\frac{1}{2}$, variabiles autem sunt horæ tam ortus, quam etiam meridiei, & mediæ noctis, dum in horologio Europæ communi puncta fixa sunt meri-

dies, & media nox, quæ semper exprimuntur per horas 12, ac variatur hora ortus, & occasus.

50. Ii, qui assueverunt horis Europæ communibus, ægre intelligunt, quo pacto Italicum horologium possit horam exhibere diversis anni temporibus diversam pro meridie, & media nocte, & e contrario in iis Italiæ locis, in quibus substitutæ sunt horæ illæ communes horis Italicis, quæ innovatio cœpit me non solum nato, sed adulto, summam initio difficultatem habuit populus pro concipiendo, quo *pacto sine errore enormi, & continuo variabili, occasus solis, pro quo semper agnoverant horam fixam* $23\frac{1}{2}$, *posset admittere variationem plurium* horarum: inde autem frequentes altercationes, utra methodus esset erronea.

51. Reipsa erronea est utraque, si carentem errore censeamus eam, quæ exhibeat mensuram temporis accuratam per divisiones æquales. Intervallum temporis non est æque longum omnibus anni diebus, nec si sumatur a meridie præcedente ad sequentem, nec a solis occasu præcedente ad sequentem. Dividitur utrumque in partes 24, quæ *appellantur horæ* in utraque numerandi ratione, & horæ *singulæ in 60 minuta, singula minuta* in 60 secunda; sed *hæ ipsæ horæ, hæc minuta, hæc secunda habent durationem diversam tam eodem die in binis methodis capiendi initium, & finem periodi horarum 24, & in utravis methodo diversis anni diebus. Hinc idem numerus horarum, & minutorum non semper exprimit idem temporis* intervallum, quod non animadvertunt ii, qui ab infantia consideraverunt horas, & minuta, ut aliquid fixum in se ipso, ad quod omnes durationes temporariæ reducantur.

52. Discrimen inter periodos horarum 24 pertinentes ad diversos anni dies est quidem multo majus in horis Italicis, quam in horis Europæ communibus, sed in utraque numerandi methodo est *aliquod, & quidem omnino sensibile*. In horologio, quod semper *haberet progressum uniformem, periodus* 24 horarum Italicarum *inveniretur uno anni tempore tribus minutis longior*, quam alio, & id discrimen eundo versus polum augetur, versus æquatorem minuitur. Periodus 24 horarum communium vix per

 dimi-

dimidium minutum variatur, quæ variatio in omnibus terræ locis est eadem. Hinc horologium, quod habeat velocitatem constantem, neutri ex hisce binis numerandi methodis potest respondere, sed necessario errat, nisi per accelerationem, & retardationem aptatam diversis anni temporibus adducatur ad repræsentationem horarum congruentem; sed is error, & ea correctionis quantitas per motum idoneum impressum longitudini penduli, vel laminæ elasticæ est multo major in methodo Italica, quam in communi.

53. Idcirco Astronomi, qui indigent mensura æquabili, & constanti, ad quam omnes inæqualitates reducantur, considerarunt tempus, quod appellarunt *medium*, appellato vero eo, *quod dividit intervallum quodcumque inter meridiem præcedentem*, & *sequentem*, ac differentiam inter tempus medium, & verum appellarunt æquationem temporis, qua nimirum additâ, vel ablatâ motus inæqualis reducitur ad æqualitatem numerariam. Cum acceleratio, & retardatio motus facta per variationem vis agentis noceat horologiis, multi horologia sua dirigunt ad tempus medium ita, ut appulsus solis ad meridianum jam præcedat horam duodecimam indicatam ab eorum horologio tot minutis, & secundis, quot exigit æquatio computata pro diversis anni temporibus, cujus additione, vel subtractione utuntur ad reducendam horam indicatam ab eorum horologio, ad horam veram civilem. Fiunt autem horologia, in quibus habentur bini indices, altero, cujus motus est semper æquabilis, indicante horas temporis medii, altero, cujus motus per machinamentum adhibitum acceleratur, ac retardatur per vices, indicante horas temporis medii.

54. Hujus duplicis indicis usum præstant non quidem respectu temporis medii, & veri, sed respectu horarum Europæ communium, & Italicarum motus verticis umbræ per superficiem, in qua alia linearum series exhibet horas priores, alia horas Italicas, quando in eadem superficie habetur delineatio utraque: intervalla diversa inter lineas horarias in locis, per quæ is vertex incedit diversis anni temporibus, efficit, ut indicetur ab eodem illo indice utrumque id horarum genus, quod accurate indicaretur, nisi exigua discrimina orirentur aliunde, ut a retractione.

55. In-

55. Indicabo hìc prius methodum obviam, & communiter notam delineandi lineas horarias ope illorum quatuor punctorum, quæ inventa sunt (num. 48) in fig. 2. in plano horizontali, tum indicabo methodum delineandi hyperbolas, quæ pertinent ad binos tropicos, ac determinandi mea quadam methodo lineas horarias Italicas, & innuam, quæ pertinent ad invenienda eadem omnia in plano verticali. Ea omnia indicabo potius, quam exponam per integras delineationes, quod nimis in longum abiret, & pertinet ad fusiorem tractatum de re gnomonica, non ad simplicem applicationem linearum, quæ inventæ sunt mea methodo deducendi polum, ac lineam meridianam, & æquinoctialem e tribus punctis umbræ notatis in plano horizontali, vel verticali pro delineatione horologiorum solarium.

56. *Problema 6. Delineare in plano horizontali omnes lineas horarias indefinitas horologii solaris Europæ communis per ea, quæ inventa sunt in primis tribus problematis.*

57. Sint in fig. 3 puncta P, S, E, T' eadem, ac in fig. 2: ducatur per E recta AB perpendicularis rectæ PE, posito A ad sinistram, B ad dexteram aspicientis in directione EP, nimirum facie obversa ad austrum, ad quem tendit polus horologii respectu styli, qui nimirum tendit ad plagam oppositam respectu poli cælestis remanentis a tergo. Ea erit linea æquinoctialis, nimirum continuatio rectæ ED inventæ in figura 1, parte EA tendente ad orientem respectu solis, & EB ad occidentem, ac umbrâ, quæ tendit ad partes oppositas, denotante in æquinoctiis horas vespertinas in priore, matutinas in posteriore.

58. In recta PE producta capiatur ET'' = ET', tum T''E' = T''E: centro T'' intervallo T''E describatur arcus circuli non multo minor quadrante versus plagam EA; centro E intervallo ET'' inveniatur in eo arcu punctum F, apposito ad F numero 4: secetur arcus EF bifariam in 2, tum singula dimidia iterum bifariam in 1, & 3, ac assumatur arcus F..5 = F..3 versus partem oppositam: applicatâ regulâ ad T'', & successive ad 1, 2, 3, 4, 5, inveniantur in recta EA puncta I, II, III, IV, V (punctum III invenietur facilius centro E intervallo ET''): centro E intervallis

E..I,

E..I, E..II, E..III, E..IV, E..V inveniantur in recta EB puncta XI, X, IX, VIII, VII: ducantur per P, & omnia puncta notata numeris Romanis rectæ lineæ, quæ erunt horariæ horarum iis numeris expressarum: apponatur ad E numerus XII., & linea PE, quæ est meridiana jam delineata, erit hora XII: ducatur per P recta parallela æquinoctiali AB, cui adscribatur utrinque numerus VI indicans horam sextam vespertinam e parte sinistra, matutinam e dextera, & pro iis locis, in quibus sol oritur ante horas matutinas V., & IV occidens post VII, & VIII, producantur ultra P lineæ horariæ terminatæ ad puncta notata iisdem numeris Romanis, matutina pro horis vespertinis, & vespertina pro matutinis.

59. Habebitur eo pacto horologium solare ejus generis completum: vertex umbræ appellens ad lineas numeris Romanis designatas indicabit horas ipsis respondentes.

60. Demonstratio est facilis. In primis, qui aspicit austrum habet partem horizontis orientalem ex parte sinistra, & occidentalem e dextera: hinc sol ante meridiem debet esse respectu lineæ meridianæ ex parte sinistra A, & projicere umbram versus partem oppositam, nimirum versus dexteram B. Is, qui figuram delineatam spectet directione opposità, conversus nimirum versus boream, habebit e contrario horas matutinas ex parte sinistra, vespertinas e dextera.

61. Si autem triangulum PT'E erigatur ita, ut evadat perpendiculare plano chartæ referenti planum horizontale; id jacebit in plano Meridiani: in quo ST' erit altitudo styli, PT' positio axis, per quem cum transeant omnia plana circulorum horariorum sphæræ cælestis, omnes eorum intersectiones cum plano horologii, debent transire per punctum P. Eæ autem debent esse lineæ horariæ indicantes per verticem umbræ horas, quibus sol appellit ad ea plana circulorum horariorum cælestium, adeoque omnes lineæ horariæ debent transire per ipsum polum P horologii solaris.

62. Si autem concipiatur completus circulus EFDE'F'D'E, in quo T''E' sit continuatio radii ET'', & ED, ED' sint quadrantes, ac planum ejus circuli convertatur circa rectam AB, donec

recta

recta E'E'' abeat in rectam ET' sibi æqualem; planum ejus circuli congruet cum plano æquatoris. Dum intersectio radii solis advenientis versus verticem styli T' cum eo circulo percurrit semicirculum DE''D', intersectio continuationis ipsius tendentis ad verticem umbræ percurret semicirculum oppositum D'ED, & vertex umbræ rectam æquinoctialem BEA.

63. Si intersectio illa radii advenientis ad stylum consideretur, ut locus solis in æquatore, per cujus arcum fertur ea intersectio motu respondente *motui solis ipsius in æquatore cælesti*; dum sol advenit ad E', *vertex umbræ debet abire ad* E. Si autem sit *punctum F' oppositum e diametro* puncto F, arcus E'F'. erit æqualis arcui EF *habenti radium* pro chorda, adeoque erit graduum 60, respondens parti sextæ revolutionis diurnæ, nimirum horis quatuor. Hinc horâ quartâ pomeridianâ sol ille fictitius erit in F', ubi appositus est numerus 4', & intersectio radii progredientis cum eodem circulo transibit per F, ubi est appositus numerus 4; ac umbra terminabitur ad punctum IV lineæ æquinoctialis AB. Diviso autem arcu EF in partes æquales quatuor; singuli arcus *ejus divisionis respondebunt singulis horis*, & *habebitur ab F ad 5 arcus respondens adhuc uni horæ. Horis pomeridianis 1, 2, 3, 4, 5 sol fictitius erit in punctis 1', 2', 3', 4', 5', intersectio radii progredientis in punctis 1, 2, 3, 4, 5, vertex umbræ in I, II, III, IV, V*. Horâ sextâ sol fictitius debet esse in fine quadrantis in D', intersectio radii progredientis in D, ejus positione T''D evadente parallela rectæ EA, quæ est perpendicularis radio T''E, ut illa directio, adeoque concursus radii cum recta æquinoctiali ita abibit in infinitum, ut nusquam jam sit.

64. Lineæ horariæ debent intersecare lineam æquinoctialem in iis punctis, in quibus ad eam appellit radius transiens per verticem styli eo momento, quo sol appellit ad circulos horarios ipsis respondentes: cum igitur debeant etiam transire omnes per polum horologii *P; patet, rectas, quæ ductæ sunt per eum polum*, & per puncta *vespertina lineæ æquinoctialis notata numeris* Romanis, esse lineas horarias respondentes *iis numeris*. Patet itidem, puncta horarum matutinarum, quæ invenirentur diviso eodem modo qua-

dran-

drante ED', & altero E'D ipsi respondente ; debere jacere in recta EB opposita rectæ EA in distantiis iisdem a puncto E, & ea pertinent ad horas matutinas XI, X, &c. æque distantes a meridie, ac distant vespertinæ I, II, &c. Quamobrem & ipsæ sunt bene determinatæ. Linea meridiana PET''E' est utique linea horæ duodecimæ : linea horæ sextæ, quæ deberet tendere ad puncta lineæ æquinoctialis digressa in infinitum, debet esse parallela ipsi lineæ æquinoctiali, uti est ea, quæ ducta per polum P notata est utrinque per numerum Romanum VI. Demum horæ a se invicem distantes per horas 12 pertinent utique ad eundem circulum horarium, qui cum sit circulus maximus, debet secare æquatorem in duobus punctis diametraliter oppositis. Quare lineæ, quæ respondent horis vespertinis VII, & VIII, debent tendere a polo P ad partes oppositas iis, quæ respondent matutinis designatis per eosdem numeros, distantibus nimirum per horas 12 ab ipsis vespertinis, & viceversa. Patet igitur, recte determinatas esse lineas omnes, ad quas vertex umbræ advenit horis tam matutinis, quam vespertinis.

65. *Scholium*. Longitudo utilis harum linearum non est hic definita : vertex umbræ horis indicatis debebit utique appellere ad aliquod punctum linearum ipsis respondentium, & diversis anni temporibus adveniet ad diversa singularum puncta : ea puncta continentur intra certos limites, nimirum inter hyperbolas, quæ sunt intersectiones superficierum, quas describit radius solaris sole percurrente tropicos in binis solstitiis. Quidquid excurrit ultra eos limites, est inutile, & quidquid continetur intra ipsos, est necessarium, si horæ determinari debent per verticem umbræ styli. Eos limites determinabimus in problemate sequenti : hic interea notandum illud, satis esse exigua etiam segmenta earum linearum, si pro stylo verticali adhibeatur stylus habens inclinationem axis PT' : nam hujus umbra debet singulis horis congruere cum rectis horariis, cum ipsa etiam debeat transire per P, & terminari ad punctum, ad quod tendit umbra verticis styli figuræ cujuscumque. Hinc loco styli habentis eam positionem solet etiam adhiberi lamina formæ triangularis P*st*, quæ potest habere longitudinem

dinem quamcumque, dummodo latus Pt, quod debet umbram determinare, habeat directionem axis PT', nimirum dummodo angulus sPt sit æqualis altitudini poli. Sed iis tantummodo indicatis, progrediar ad determinationem limitum hyperbolicorum, qui viam sternent ad meam methodum determinandi horas Italicas, quam invenio admodum commodam pro usu constructionis graphicæ.

66. *Problema 7. Determinare limites linearum horariarum per arcus hyperbolarum pertinentium ad binos tropicos.*

67. Intersectionem conorum descriptorum a radiis habentium pro basi binos tropicos esse binas hyperbolas, diximus numero 8. Cum sol non possit abire extra zonam cælestem conclusam iis circulis; vertex umbræ projectæ a stylo non potest egredi extra spatium terminatum iis hyperbolis, quas ipse vertex debet percurrere diebus solstitialibus. Eæ hyperbolæ, quas in meis Elementis appello potius ramos oppositos ejusdem hyperbolæ, sic facile determinantur, & construuntur per puncta, per quæ manu ducitur linea continua quæsita.

68. Sint in figura 4 puncta P, S, E, T' itidem eadem, ac in fig. 2, & 3: fiat angulus ET'A versus stylum ST', & ET'A' ad partes oppositas, æqualis uterque inclinationi eclipticæ ad æquatorem, quæ parum differt a gradibus $23\frac{1}{2}$ (nunc quidem est $= 23°.28'$ quamproxime, & parum mutatur intra integrum sæculum, effectu mutationis insensibili respectu usus civilis horologiorum solarium) punctis A, A' collocatis in recta PE, & in ejus productione ultra E. Sectâ bifariam AA' in puncto C, id punctum erit centrum C hyperbolæ habentis nimirum axem transversum AA': ductis AB, A'B' perpendicularibus ad axem PT', recta media proportionalis inter ipsas erit semiaxis conjugatus, cujus magnitudo facile invenietur, capiendo in recta A'B' producta segmentum B'D = AB, secando A'D bifariam in F, & inveniendo in recta B'P producta, si opus sit, punctum G per centrum F, & intervallum FA': erit enim B'G æqualis semiaxi conjugato quæsito: per punctum A' ducatur recta perpendicularis axi hyperbolæ AA', & in ipsa inveniantur centro A' intervallo B'G hinc, & inde puncta H, H': ducantur per C, & per hæc duo puncta binæ rectæ indefinitæ, quæ erunt bi-

næ aſymptoti hyperbolæ quæſitæ : applicatâ regulâ ad punctum A', & circumactâ ita, ut occurrat alteri aſymptoto ut CH in I, & alteri H'C in K, aſſumatur ſecundum eandem regulam intervallum KL = A'I in directione eadem cum ipſa, & punctum L erit ad hyperbolam quæſitam.

69. *Scholium*. Hæc omnis conſtructio pendet a proprietatibus ſectionum conicarum, quas omnes cum hac ipſa inventione graphica punctorum evolvi in meo tertio Elementorum tomo. Eo pacto inveniuntur puncta L *terminata ad ramum hyperbolæ* MAN *reſpondentem tropico cancri : eodem pacto inveniri poſſunt puncta* L' *terminata ad ramum alterum* M'A'N', *qui pertinet ad tropicum capricorni aſſumendo in poſitione regulæ* I'A'K' *ſegmentum* I'L' = A'K' *in directione ipſius eadem*. Poſſent etiam inveniri eadem puncta L, & L' circumductâ regulâ circa punctum A, ut punctum L' per concurſum ejus regulæ cum aſymptoto H'C in O, & CH in Q aſſumendo in ea QL' = AO in eadem directione cum ipſa AO. Prior ramus fiet facilius, & evadet accuratior priore methodo, in qua circumducitur regula circa punctum A' poſitum extra eum ramum, & ramus poſterior methodo poſteriore adhibente punctum A. *Ductis tropicis* per ea puncta, retinendæ erunt pro uſu verticis umbræ projectæ a vertice ſtyli eæ ſolæ partes linearum horariarum, quæ remanebunt inter tropicos ipſos, & eæ ſolæ transferendæ in planum, in quo habetur ſtylus, qui determinavit puncta umbræ, ſi reliquæ conſtructiones factæ ſunt in chartis ſeparatis, quod omnino præſtabit ad evitandam novarum linearum confuſionem cum veteribus, translatis in eas iis punctis, & lineis tantummodo, quæ requiruntur ad continuandas operationes.

70. *Problema 8. Determinare lineas horarias horologii Italici.*

71. Si in ſuperficie mobili ſphæræ cæleſtis notaretur arcus congruens cum ſemicirculo occidentali horizontis, tum, eâ ipſâ retractâ verſus orientem, poſt gradus ſeptem cum dimidio notaretur *in ſuperficie immobili arcus congruens cum eo arcu tranſlato, ac alii* poſt alios quoſque quindenos ; ii eſſent arcus horarii *horarum* Italicarum. Interſectiones plani horologii cum eorum planis eſſent lineæ horariæ Italicæ. Eæ non habent punctum commune, per quod tranſeant, ut præ-

cedentis per polum horologii, quo semel invento, & inventis earum punctis pro linea æquinoctiali possunt duci omnes methodo, quam exposuimus. Determinantur æque facile puncta pro ipsis in linea æquinoctiali secando bifariam arcus quadrantis ED figuræ 3 interceptos inter E, & 1, inter 1, & 2, inter 2, & 3, inter 3, & 4, inter 4, & 5, & applicando regulam ad T'', ac ad eas intersectiones, quæ tum in linea æquinoctiali exhibebunt puncta pro horis 18, 19, 20, 21, 22, 23. Cum enim in eo horologio *occasus solis habeatur semper horâ* $23\frac{1}{2}$, & in *æquinoctiis, in quibus sol moratur supra* horizontem per horas 12, *meridies eo die fiat horâ* $17\frac{1}{2}$; hora 18 Italica tum est eadem, ac *dimidia* communis vespertina, hora 19 ipsius eadem ac $1\frac{1}{2}$ communis, & ita porro: horam 23 subsequitur occasus ante 24. Assumendo versus B puncta distantia a puncto E æque ac præcedentia, patet, haberi etiam puncta pro horis 17, 16, 15, 14, 13, 12: horâ 11 sol nondum est ortus. Pro matutinis præcedentibus per æstatem sol jam est supra horizontem in satis magna distantia *loci ab æquatore*, ubique in Italia is oritur ante horam *9: pro ipsa, & sequentibus* 10, 11 puncta sunt eadem, ac *pro* 21, 22, 23, quæ ab iis distant per horas 12, & ea usum habent pro determinanda directione earum horariarum, invento alio *puncto pro singulis*, per quod *ducendæ sunt* ad partes *oppositas punctis ipsarum* inventis in *linea* æquinoctiali.

73. *Habentur* multæ methodi pro inveniendo secundo puncto singularum linearum horologii Italici, ut & communis, etiam pro quavis hora diei cujuscumque, tam per constructionem geometricam, quam per calculum trigonometricum: mihi visa est admodum expedita pro constructione practicâ sequens, quam sæpe adhibui cum successu. Determino declinationem solis, cui respondet mora solis supra horizontem horarum accurate 15, quod *facile fit habitâ altitudine* poli, ut jam videbimus; ea autem pro *nostro hemisphærio* est semper australis. Tum meridies cadit in *horam 16 accurate*, & *singulæ horæ* Italicæ habent communem sibi accurate respondentem. Delineato horologio pro horis communibus, cum suis lineis horariis, & cum ramo hy-

 per-

perbolæ pro tropico cancri, addo ramum alterius respondentem ei declinationi australi inventæ pro mora solis per horas 15. Is delineatur eodem pacto, quo in fig. 4 tropicus cancri, assumptis ibi angulis ET'A, ET'A' æqualibus ei declinationi: occurrit autem lineis horariis horologii communis, jam delineatis methodo exposita usque adeo expedita, in punctis, quæ respondent horis Italicis accuratis: horæ correspondentes habentur in prima e sequentibus lineis pro horologio Italico, & in secunda pro communi, ut singula earum puncta determinata per eum ramum hyperbolæ adhiberi possint pro singulis illarum, combinanda cum punctis singulis determinatis in linea æquinoctiali, quæ habentur in tertia.

Horis Italicis omnibus

23, 22, 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 10, 9

Respondent communes in hyperbola nova

vespertinæ matutinæ

8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 | 12, 11, 10, 9, 8, 7, 6

Prioribus duodecim Italicis respondent in linea æquinoctiali

vespertinæ matutinæ

$5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \mid 11\frac{1}{2}, 10\frac{1}{2}, 9\frac{1}{2}, 8\frac{1}{2}, 7\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}$

74. Priores duodecim lineæ horariæ Italicæ habebuntur ducendo a puncto horæ cujusvis lineæ secundæ rectam ad punctum horæ, quæ ipsi respondet in linea tertia: tres postremæ ducentur applicatâ regulâ ad puncta trium priorum horarum lineæ tertiæ, & trium postremarum lineæ secundæ, & ducendo rectam lineam a puncto secundæ ad partes oppositas puncto tertiæ. Omnes hæ lineæ continuabuntur, quantum poterunt usque ad hyperbolas duorum tropicorum, ubi eæ occurrent ipsorum arcubus delineatis in plano destinato pro horologio: nam nec integri rami hyperbolici delineari possunt, cum naturâ suâ abeant in infinitum, nec ad illum, qui respondet tropico capricorni producto etiam in infinitum, pertingerent lineæ pertinentes ad postremas primæ lineæ, quæ præcedunt ortus solis in solstitio æstivo.

75. Scho-

75. *Scholium* 1. Secundus ramus novæ hyperbolæ occurret etiam ipse aliquot lineis horariis communibus, nimirum iis, quæ in secunda e superioribus tribus lineis respondent horis, quibus sol moratur supra horizontem, ut ab hora 15 ad 24, & pro iis lineis habebuntur tria puncta, quæ debent jacere in directum, adeoque bina ex iis sufficiunt ad ducendas singulas ex iis lineis horariis. Optimum erit eas tum ducere per ea, quæ habent distantiam maximam, uti sunt ea, quæ determinantur ab iis ramis novæ hyperbolæ: illud tertium, *quod habetur in linea æquinoctiali*, non erit necessarium, *cujus inventio idcirco omitti* potest pro his horis: *sed cum adeo facile inveniantur*, *melius* est invenire ea etiam, ut *appareat an omnia tria puncta* ejusdem horæ *jaceant* in eadem recta, quod indicabit errores in constructione commissos, si qui habentur. Pro reliquis horis non habebuntur nisi bina puncta, quæ tamen sufficiunt ad eam rem.

76. *Scholium* 2. Si sol non remaneat supra horizontem per horas 15 in ea poli altitudine; vertex umbræ nunquam deveniet ad illam hyperbolam novam; adhuc tamen puncta determinata in ejus ramis methodo *proposita æque inservient pro* determinatione directionis *horariarum Italicarum*; quia si *stellæ fixæ*, quæ *habentur* extra *tropicos*, *haberent satis luminis*, *iidem circuli horarii* inservirent *pro horis computatis* ab earum appulsu ad Meridianum, *& ad horizontem*. *Hinc* pro declinatione respondente *moræ supra horizontem* horarum 15 posset assumi quævis alia, quæ respondeat cuivis numero horarum impari majore horis 12, qui semper inducet congruentiam meridiei cum hora aliqua Italica accurata. Commodissima pro Italia est declinatio respondens horis 15, quæ inducit satis magnam distantiam mutuam punctorum, per quæ duci debent lineæ horariæ Italicæ, & non requirit distantiam nimis magnam hyperbolæ novæ a linea æquinoctiali, uti induceret *declinatio* respondens horis 17, & multo magis ea, quæ respondet horis 21.

77. *Scholium* 3. Arcus *semidiurnus solis in* suo parallelo, a quo pendet relatio horarum Europæ communium cum horis Italicis, facile invenitur pro data altitudine poli, & declinatione so-

lis

lis methodis usitatis, & admodum expeditis tam per constructionem graphicam, quam per calculum trigonometricum. Circulus APBP' (fig. 5), cujus centrum C referat Meridianum cælestem, in quo sit P polus borealis, P' australis, AB intersectio plani horizontis cum ipsius plano, in quo A cardo australis, B borealis, DE intersectio plani æquatoris cum eodem plano Meridiani, cujus punctum D supra horizontem, E infra, FG intersectio plani paralleli cujusvis cum eodem, quæ erit parallela ipsi DE, & abscindet arcus DF, EG æquales declinationi solis (figura exhibet declinationem borealem, quæ inserviet pro declinatione respondente illis horis 15) ac occurret axi PP' in H, quod punctum erit centrum ipsius paralleli, ac horizonti AB in I.

78. Habitâ altitudine poli BP, poterit assumi is arcus, in circulo descripto, duci per centrum C horizon BA, per polum P, & axis PP', tum diameter æquatoris DE ipsi perpendicularis, assumi arcus DF æqualis declinationi, duci diameter FG parallela DE: habebitur ejus concursus cum axe in H, & cum horizonte in I. Centro H intervallo HF fiat semicirculus occurrens axi producto in K, qui referet dimidium circulum parallelum ejus declinationis habentem reipsa planum perpendiculare plano Meridiani, sed hic applicatum ad ipsum motu facto circa ejus diametrum FG. Ducatur ejus ordinata IL parallela axi P'P: ea abscindet arcum semidiurnum FL, qui conversus in tempus, tribuendo de more singulis 15 gradibus totidem horas, 15 minutis totidem minuta &c., exhibebit intervallum temporis inter occasum solis, & meridiem: id ablatum ab horis $23\frac{1}{2}$ exhibebit horam Italicam respondentem meridiei, nimirum horæ communi 12, ex qua relatione habetur deinde relatio omnium horarum communium, quæ respondent singulis horis Italicis, & viceversa. Pro tropicis nunc quidem declinatio est $= 23^\circ.28'$: hinc datâ adhuc altitudine poli, habetur ea relatio tota horarum correspondentium.

79. Arcus KL erit excessus arcus semidiurni FL supra quadrantem respondentem sex horis pro declinatione boreali, uti debet esse æqualis, defectus pro australi ipsi æquali: HI est sinus ejus arcus ad radium FH; sunt autem eædem rectæ HF, & HI tangen-

gentes angulorum FCH, HCI ad radium communem CH, quorum angulorum prior est complementum declinationis DCF, posterior est ipsa altitudo poli BCP. Hinc habetur hujusmodi theorema, *cotangens declinationis solis est ad tangentem altitudinis poli, ut radius ad differentiam arcus semidiurni a quadrante*. Si declinatio dicatur d, altitudo poli a, ea differentia x, erit $sin.x = \frac{tan.a}{cot.d} = tan.a\, tan.d$..

80. Per eam constructionem, aut eum calculum trigonometricum, vel eam formulam, datâ altitudine poli, & declinatione solis, habebitur differentia arcus semidiurni a quadrante, quæ conversa in tempus exhibebit, quid addendum sit horis sex ab æquinoctio verno ad autumnale, vel demendum ab hoc ad illud, ut habeatur hora communis pro occasu solis, aut demendum ab horis $17\frac{1}{2}$, vel addendum ad habendam horam Italicam pro meridie; cum nimirum in æquinoctiis occasus factus horâ prioris generis sextâ respondeat occasui horæ posterioris $23\frac{1}{2}$.

81. E contrario per theorema, & formulam numeri 79 invenietur declinatio, quæ respondet datæ cuivis differentiæ arcus semidiurni a quadrante. Dabitur sinus ejus differentiæ x, & invenietur declinatio d ipsi respondens per valorem $tan.d = \frac{tan.a}{sin.x}$, nimirum tangens declinationis quæsitæ dividendo tangentem altitudinis poli per sinum differentiæ propositæ. Sic habebitur declinatio adhibenda in solutione hujus problematis pro constructione novæ hyperbolæ respondentis moræ solis supra horizontem per horas 15: hujus moræ dimidium horarum $7\frac{1}{2}$ habet excessum $1\frac{1}{2}$ supra horas sex respondentes quadranti, cui respondet arcus $x = 22°.30'$. Per ipsum, & altitudinem poli a invenietur declinatio d, cui debent fieri æquales anguli ET'A, ET'A' figuræ 4 ad habendum axem transversum AA' hyperbolæ quæsitæ, & semiaxem conjugatum B'G medium geometrice proportionalem inter perpendicula AB, A'B'.

82. *Scholium* 4. Pro loco, cujus altitudo poli sit data, & data altitudo styli, facile ope numerorum, qui eruantur e tabula si-

sinuum, fiet constructio utriusque horologii in charta separata; ex qua traducatur ad planum, in quo stylus est erectus, & determinata directio lineæ meridianæ. Ducatur (fig. 3) recta linea, in qua destinato puncto S pro pede styli, & aperto circino proportionis ita, ut bina puncta crurum habentia numerum 100 habeant a se invicem distantiam æqualem altitudini styli: capiantur intervalla SP, SE, quæ respondeant in eodem circino cotangenti, & tangenti altitudinis poli assumptis ad radium 1000, quorum numerorum postrema nota exprimet partes decimas partium exhibitarum ab ea scala, quæ assumentur per æstimationem ultra notas præcedentes exhibitas a punctis impressis in ipso circino: assumatur ex eodem circino intervallum respondens secanti ipsius altitudinis poli: ea secans respondebit rectæ ET' ejus figuræ, sive radio ET'' circuli, quarum linearum in ea charta nullum erit opus, sed id intervallum aptandum erit inter puncta 100 binorum crurum circini proportionis magis aperti, ut gerat vices radii: ducatur per E recta AB perpendicularis rectæ PE, quæ erit linea æquinoctialis, & in ea assumantur versus A intervalla, quæ respondeant tangentibus graduum 15, 30, 45, 60, 75 pro puncto horarum communium I, II, III, IV, V, sunt autem ad radium 100 numeri sequentes 26,8: 57,7: 100: 173,2: 373,2, & eadem intervalla versus B pro punctis horarum XI, X, IX, VIII, VII: ducantur per ea puncta lineæ horariæ: addatur pro hora VI recta parallela rectæ AB: ducantur per ipsum P rectæ ad partes oppositas punctis lineæ æquinoctialis VII, VIII, V, IV, pro iisdem horis vespertinis ex parte A, & matutinis ex parte B, ac habebitur horologium commune indefinitum.

83. Pro constructione binorum ramorum hyperbolæ pertinentis ad tropicos, dempto ab altitudine poli ST'E (fig. 4) angulo = 23°. 28' & ipsi addito, habebuntur anguli ST'A, ST'A'. Horum tangentes assumptæ ope circini proportionis aperti ad radium ST' = 100, exhibebunt intervalla SA, SA' pro axe transverso AA', qui erit secandus bifariam in C: additâ iis tangentibus cotangente SP altitudinis poli, habebuntur PA, PA': capiatur semisumma logarithmorum eorum numerorum, cui addatur logarithmus sinus altitu-

dinis

dinis poli = SPT': numerus respondens logarithmo ita invento exhibebit binas A'H, A'H' pro asymptotis CH, CH'. Nam erit AB = PA × *sin*.SPT', A'B' = PA' × *sin*.SPT', horum productum PA × PA' × sin^2.SPT', quod cum sit æquale quadrato semiaxis conjugati = $A'H^2$ (num. *68*), erit *log*.A'H = $\frac{1}{2}$ (*log*.PA + *log*.PA') + *log*.*sin*.SPT'. Iis habitis delineabuntur methodo ejus numeri bini rami hyperbolæ, qui terminent horologium solare commune.

84. Pro horologio Italico assumentur in fig. 3 ab E versus A, & B intervalla respondentia angulis *7°.30' : 22°.30' : 37°.30' : 52°.30' : 67°.30' : 82°.30'*, quæ sunt *13,2 : 41,4 : 76,7 : 130,3 : 241,4 : 759,6* : eæ exhibebunt puncta æquinoctialia. Pro hyperbola nova respondente horis 15 moræ solis supra horizontem invenietur in fig. 4 declinatio ET'A = ET'A' per numer. 81 : ejus differentia ab altitudine poli ST'E, & summa, exhibebit angulos ST'A, ST'A', ut prius, & habebuntur omnia pro constructione hujus novæ hyperbolæ, ut numero præcedente pro hyperbola pertinente ad tropicos. Reliqua omnia fient, ut in solutione hujus problematis (*).

85. *Factâ delineatione in ea charta separata*, notabuntur in e-

(*) Hæc postrema tangens evadit nimis longa, nec lineæ EA, EB poterunt satis produci in ea charta, in qua fit reliqua delineatio, quod accidet aliquibus etiam e tangentibus horologii communis, & e præcedentibus hujus Italici, si stylus sit longus. Habentur modi determinandi directiones linearum, quæ a punctis propioribus deberent duci versus ea puncta ita remota, etiam tantummodo mente concepta, vel ad partes oppositas, ad quem usum solum ea adhibenda sunt, ubi tam longe distant. Si ejusmodi punctum est ipsum P; poterit assumi ab ipso versus E dimidium rectæ PE, vel ejus triens, aut quadrans, & duci ex ejus fine recta parallela rectæ AB in eadem ratione minor tangente proposita, tum e puncto P recta versus punctum extremum hujus, vel versus partem oppositam. Si punctum illud propius est aliud punctum; ducenda erit ex eo recta perpendicularis rectæ AB, & ipsius distantia a puncto E assumpta ex eadem scala addenda erit ei tangenti, vel demenda ab illa, prout ea perpendicularis jacebit ad partem oppositam rectæ PE, vel ad eandem, ut habeatur in numeris distantia ejusdem lineæ perpendicularis ab illo puncto remoto: imminuto numero hujus distantiæ, & ipsâ perpendiculari in eadem ratione, invenietur eodem pacto punctum, per quod, vel ad cujus partem oppositam ducatur linea quæsita.

jus recta PE *figuræ* 3 duo puncta centro T' *intervallo* quovis, quod erit notatum alicubi in eadem charta, & alia duo puncta in distantia a puncto S æquali eorum distantiæ notabuntur hinc, & inde in directione ad sensum perpendiculari ad directionem PE: perforatâ eâ chartâ in S, inseretur stylus in aperturam, & chartâ ipsâ applicatâ ad planum horologii conservandi ita, ut recta PE habeat directionem lineæ meridianæ determinatæ, ac tractâ in latus prius secundum directionem rectæ PE, tum secundum ipsi perpendicularem, vertex styli distet a punctis notatis per intervallum illud notatum, transferentur per impressionem cuspidis cujuspiam in planum subjectum puncta extrema linearum horariarum cum binis punctis determinantibus lineam æquinoctialem, & aliis pluribus determinantibus ramos hyperbolæ pertinentis ad tropicos, si libeat habere & ipsos, ad videndam congruentiam viæ verticis umbræ in solstitiis cum perimetro ejus hyperbolæ, non vero ramos hyperbolæ novæ, quæ nullius jam erunt usus. Detractâ chartâ, quæ fuerat adhibita pro delineatione, delineabuntur in plano subjecto lineæ horariæ cum linea æquinoctiali, & ramis hyperbolicis tropicorum, ac habebitur horologium solare liberum a lineis inutilibus.

86. *Problema 9. Determinare, quæ pertinent ad delineationem horologii solaris in plano quovis verticali.*

87. Referat jam figura 6 planum verticale, in quo puncta R, S, T', E', Q sint eadem, ac in fig. 2. Ducatur per E, ut prius, recta AEB (*) perpendicularis rectæ PE occurrens rectæ verticali

(*) Si murus habeat superficiem spectantem meridiem, utut stylus ipsi perpendicularis non dirigatur accurate ad cardinem australem, sed deflectat versus ortum, vel occasum; oriens remanebit ad dexteram spectantis murum, & occidens ad sinistram: hinc cum punctum S in hac figura jaceat ad dexteram respectu puncti meridiani R, stylus dirigitur in ea positione ad partem horizontis occidentalem respectu cardinis australis respondentis puncto R ipsi opposito. In utramvis plagam deflectat murus, semper oriens jacebit ad dexteram spectantis ipsum, & occidens ad sinistram: hinc e contrario jacebunt hic puncta A, & D respondentia horis vespertinis ad dexteram B, D', ad sinistram respectu puncti E, ac F, itidem ad dexteram respectu puncti O, cum omnibus numeris vespertinis 1, 2, 3 &c., I, II, III &c.: punctà vero B, D', cum horis vespertinis e contrario ad sinistram.

cali PQ in G: in ipsa PE producta capiatur ET'' = ET', ac centro T'', intervallo eodem T''E, describantur bini quadrantes circuli ED, ED', posito D ex parte orientali, quæ hìc jacebit ad dexteram respectu aspicientis directione T''E, dum in fig. 3 jacebat ad sinistram: nam ibi concipiebatur facies obversa austro, dum hìc spectator habens faciem obversam muro habet austrum a tergo. Recta T''G occurrat ei arcui in O, & ea erit directio radii meridiani in plano æquatoris applicati ad planum muri, qui radius in eo progrediens denotabit meridiem per appulsum verticis umbræ ad G; adeoque punctum O hìc respondebit meridiei, & puncto G adscribendus erit numerus XII. Divisiones arcus ejus circuli incipient a puncto O pro horis matutinis versus partem occidentalem oppositam soli, & pro vespertinis versus orientalem. Hinc inveniendum erit in eo circulo punctum F versus D, facto centro non in E, sed in O, & intervallo OT''. Dividatur arcus OF, in partes quatuor, appositis numeris 1, 2, 3, 4, & assumptis, si nondum fuerit deventum ad D numeris 5, 6 &c, & ex parte opposita assumantur ad easdem distantias numeri 11, 10, 9 &c. Ea puncta assumenda erunt ad id intervallum per solum semicirculum DED', non ultra ipsum; nam soli radii, qui vel adveniant ad T', sole existente supra horizontem, vel concipiantur advenire sole depresso infra ipsum, directione tendente ad puncta jacentia intra eum semicirculum, producti incurrent in rectam AEB, & ii etiam, qui concipiantur advenire a sole depresso infra horizontem, producti incurrent omnes: ad puncta eorum incursuum radii utique non advenient, impediente incursum terrâ interjectâ, adeoque ea puncta non inservient immediate ad determinandam horam per umbræ verticem, sed erunt usui ad determinandas lineas horarias, quarum eæ partes, quæ remanebunt infra continuationem HL rectæ RS horizontalis, & jacentis in plano horizontali transeunte per verticem T' styli ST', vel ST'' redditi suæ positioni horizontali perpendiculari plano muri, adeoque & rectis PE, HL existentibus in ipso muro, pertinebunt ad positionem solis elevati supra horizontem, hinc eæ erunt conservandæ post delineationem horologii in charta, & transferendæ in

murum, *deletis, ut jam inutilibus, iis, quæ extabunt supra ipsam horizontalem HL.*

88. Applicatâ regulâ ad T'', & ad omnia puncta semicirculi notata numeris Arabicis 1, 2, 3 &c., invenienda erunt in recta AB puncta ipsis respondentia, quæ erunt notanda Romanis I, II, III &c. ac pertinebunt ad lineas horarias horologii communis ducendas per polum P, & per puncta notata iis numeris, ac habebitur horologium commune indefinitum. Ducendi erunt bini rami hyperbolæ pertinentis ad tropicos, qui definientur, ut num. 68 per angulos (fig. 4) ET'A, ET'A' graduum 23, minutorum 30 demptos, & additos angulo ST'E invento (num. 38), qui non erit æqualis altitudini poli ejus loci, in quo fit horologium, *sed alterius habentis horizontem parallelum plano muri*. Pro horologio Italico determinanda erunt in fig. 6 puncta horarum in recta æquinoctiali AB per puncta semicirculi intermedia inter 0, & 1: 1, & 2: 2, & 3 &c., ac inter 11, & 12: 10, & 11: 9, & 10 &c. Ducendi rami hyperbolæ novæ pertinentis ad declinationem, quæ exhibet horas 15 moræ solis supra horizontem, per constructionem propositam pro horologio horizontali, adhibito in fig. 4 angulo ET'A, ET'A' æquali ei declinationi, qui rami in lineis horariis communibus determinabunt puncta horariarum Italicarum, ac per illa æquinoctialia, & hæc determinata ab hisce ramis ducentur, prorsus ut in horologio horizontali, lineæ horariæ Italicæ in verticali proposito.

89. *Scholium* 1. Possunt hic etiam applicari numeri assumpti e tabulis sinuum, qui reddant constructionem & simpliciorem, & accuratiorem. Assumptâ longitudine styli ST' (fig. 4) pro radio = 100, erit SP cotangens anguli SPT' inventi (num. 38), SE ejus tangens, cum nimirum sit tangens anguli ST'E æqualis ipsi, ac ET' secans ejusdem accipienda pro radio relate ad tangentes assumendas pro distantiis punctorum, quæ respondent horis, vel semihoris in linea æquinoctiali AB. Discrimen consistit in eo, quod ibi in fig. 6 idem punctum E erat initium tam pro horis a meridie, quam pro tangentibus arcuum circuli DED'; dum hic initium pro horis a meridie est O, & pro tangentibus E.

90. Hinc

90. Hinc oportet prius invenire arcum EO, qui metitur angulum ET''G: assumenda enim erit summa arcus cujusque horarii, & ejus arcus, vel differentia, prout punctum horæ jacuerit respectu puncti O ad partem oppositam puncto E, vel ad eandem, pro habendo arcu intercepto inter punctum respondens horæ cuilibet, & punctum E, cujus arcus sumenda est tangens. Porro angulus ET''G, quem metitur arcus EO', invenitur admodum facile, inventis in figura 2 rectis PR, RS, PE, ET'. Est enim in fig. 6. $PR : RS :: PE : EG = \frac{RS \times PE}{PR}$, & tangens anguli quæsiti $ET''G = \frac{EG}{ET'} = \frac{RS \times PE}{PR \times ET'}$. Quod pertinet ad ramos tam hyperbolæ tropicorum pro terminando horologio quovis, quam novæ hyperbolæ respondentis arcui diurno horarum 15 pro inveniendo secundo puncto horarum Italicarum, absolvitur eodem modo, advocato in subsidium calculo numerico, quo pro horologiis horizontalibus.

91. *Scholium* 2. *Multo accuratius obtinentur* omnia, & constructione multo *faciliore*, *saltem pro* horis solstitialibus, si adhibeatur in subsidium Trigonometria sphærica; licet accedat labor non sane exiguus resolvendi pro singulis horarum punctis singula triangula sphærica, quæ pro horis æquinoctiorum possunt reduci ad rectangula, *sed pro* solstitialibus sunt obliquangula, adeoque *resolutionis magis* operosæ. Ea methodus est multo magis utilis *pro horologiis* verticalibus, pro quibus methodus, quam proposuimus in hoc Opusculo, est magis complicata, quam pro horizontalibus. Singula triangula sphærica debent determinare pro horis singulis azimuthum solis, & ejus distantiam a zenith, quibus inventis, admodum facile invenitur punctum horæ quæsitum.

92. Sit in fig. 7 AOBD horizon, in quo A cardo australis, O orientalis, B borealis, D occidentalis, Z zenith, P polus in semicirculo AZB Meridiani, S locus solis, ZSC circulus verticalis, qui *determinat* arcum *azimuthalem* AC computatum a cardine australi, & *in quo habetur altitudo solis* CS supra horizontem. Habebitur pro quovis die arcus PS, qui est quadrans in æqui-

æquinoctiis, & complementum declinationis quovis alio tempore, nimirum summa quadrantis $= 90°$, & declinationis, si ea est australis, differentia, si borealis. Quare is arcus in solstitio æstivo est $= 90° - 23°.28' = 66°.32'$, & in solstitio hyemali $= 90° + 23°.28' = 113°.28'$: latus alterum trianguli sphærici est PZ complementum altitudinis poli, sive latitudinis loci. Quare ea latera sunt cognita, & constant eadem toto eo die, intra quem habetur quidem mutatio declinationis, sed ea in solstitiis est prorsus insensibilis, in æquinoctio exigua, & prorsus negligenda, ubi agitur de horologiis solaribus. Remanet variabilis angulus in P, qui pro aliis horis est alius, pro quavis suus.

93. Pro horologiis Europæ communibus ordo resolutionis triangulorum, est facilior, & calculus brevior, quam pro Italicis. Incipiendum est ab angulo ZPS $= 15°$, tum progrediendo per 30 45 &c. addendo semper $15°$, invenietur angulus ad Z, cujus notandum erit pro quavis hora supplementum pro azimutho computato a cardine australi, & distantia ZS a zenith: calculus continuandus erit, donec angulus ad P evaserit per continuam additionem minor eo, qui respondet arcui semidiurno pro illa altitudine poli, & declinatione respondente tropicis, vel ei æqualis. Pro æquinoctiis hora occasus est sexta, cui respondet angulus $= 90°$, hinc non habentur nisi 5 triangula, nimirum usque ad angulum $= 75°$: pro tropicis invenitur angulus semidiurnus per num. 77. Etiam distantia a zenith docet, quousque progrediendum sit: nam ubi ea nimis accesserit ad quadrantem, qui habetur in occasu, constabit, triangulum sequens fore inutile: habebitur autem idem azimuthus, & eadem distantia a zenith pro hora quavis matutina, & vespertina æque distante a meridie.

94. Pro horologiis Italicis angulus ZPS in occasu tempore æquinoctiali erit itidem $= 90°$, a quo numero oportebit demere $7°.30'$ pro hora 23, tum $15°$ pro singulis sequentibus, donec relinquatur minus 15 gradibus, azimutho tendente usque ad eum limitem versus occasum: ultimum residuum, quod erit $7°.30'$, relinquet $7°.30'$ pro hora 17 versus orientem, & additis 15 gradibus pro singulis horis præcedentibus, habebitur angulus P pro ipsis usque ad horam

ram 12, quæ relinquet 7°. 30': hora 11 sol nondum est ortus. Pro solstitiis invento arcu semidiurno, oportebit itidem demere gradus 7°. 30' pro hora 23, tum pro singulis horis præcedentibus demendi erunt gradus 15, donec habeatur residuum minus eo numero graduum, azimuthis jacentibus usque ad eum limitem versus occidentem: tum, subtracto residuo ipso a 15°, succedent horæ matutinæ cum azimutho jacente versus orientem, & subtractioni graduum 15 succedet additio, donec deveniatur ad angulum majorem semidiurno, qui jam erit inutilis.

95. Habitis azimuthis, & distantiis a zenith, facile determinabuntur puncta horarum singularum pro plano horizontali, facto centro in puncto, quod debet respondere pedi styli, quovis intervallo, describatur circulus, & ducatur ejus radius, qui poterit appellari primus, ac debet dirigi versus cardinem borealem horizontis, versus quem debet abire umbra in meridie tendens ad partem oppositam soli jacenti tum versus austrum: assumatur in eo circulo arcus æqualis arcui invento azimuthali ad plagam orientalem, vel occidentalem, prout is fuerit e contrario occidentalis, vel orientalis, ac ducatur radius ad ejus finem, in quo invenietur punctum extremum umbræ, capto intervallo æquali tangenti distantiæ a zenith assumptæ ad radium æqualem altitudini styli captæ in circino proportionis, ad cujus numeros 100 applicata fuerit ipsa styli altitudo. Facile concipitur, cur capienda sit ea tangens pro longitudine umbræ: si enim concipiatur stylus productus usque ad superficiem sphæræ cælestis; is abibit ad zenith, ac angulus, quem continebit cum radio solis adveniente ad verticem styli, erit distantia a zenith solis ipsius, cui est æqualis angulus contentus a stylo, & radio progrediente ad punctum extremum umbræ: is autem radius est hypothenusa trianguli rectanguli habentis pro binis lateribus altitudinem styli, & longitudinem umbræ oppositam angulo sito in vertice styli ipsius.

96. Inventis punctis pro horis singulis duci poterunt facile omnes lineæ horariæ etiam Italicæ sine ulla necessitate hyperbolæ illius novæ respondentis moræ solis supra horizontem per horas 15. Invenietur autem polus horologii assumpto in productione

ne *primi radii* ultra pedem styli intervallo æquali *cotangenti altitudinis* poli assumptæ ad eundem radium ex eadem apertura ejusdem circini proportionis, & linea æquinoctialis, assumpto in ipso primo radio intervallo æquali tangenti ejus altitudinis: ductâ enim ex ejus fine rectâ perpendiculari ipsi *primo radio*, *habebitur* linea æquinoctialis, in qua debent jacere omnia puncta inventa pro æquinoctiis.

97. Cum omnes lineæ horariæ horologii Europæ communis debeant transire per *polum inventum*, *habebuntur* pro singulis horis ejus horologii, *demptâ horâ sextâ*, tria puncta, quæ debebunt jacere in directum, nimirum polus ipse, punctum *horæ ipsius inventum* pro solstitio æstivo, & punctum *ejusdem*, *aut horæ distantis* ab ipsa per horas 12 inventum pro æquinoctiis: pro hora autem sexta, cujus punctum æquinoctiale abit utrâque e parte in infinitum, linea horaria habebit duo puncta, *polum*, & punctum inventum pro solstitio æstivo, quæ *debebunt* jacere in recta parallela lineæ æquinoctiali: *pro horis* autem omnibus, pro quibus inventa erunt etiam puncta pertinentia ad solstitium hyemale, accedet reliquis determinantibus eam lineam horariam etiam illud quartum.

98. Respectu horarum Italicarum puncta, quæ fuerint inventa pro æquinoctiis, *debebunt itidem jacere omnia in recta* æquinoctiali. *Habebuntur pro singulis saltem duo puncta*, *alterum respondens solstitio* æstivo, & alterum respondens æquinoctiis pro eadem hora, vel pro ea, quæ ab ea distet per horas 12, & pro iis, quæ habebunt suum punctum etiam respondens solstitio hyemali, accedet etiam tertium. Duo sufficient ad ducendam lineam horariam, plura inservient pro confirmanda constructionis exactitudine per ipsorum positionem in directum.

99. Pro horologiis verticalibus, habito puncto, cui debet respondere vertex styli ad perpendiculum, hujus longitudine, & declinatione muri operatio erit magis composita, adhuc tamen etiam pro horologio Italico res perficietur sine *ulla* hyperbola. In primis si in fig. 8 S sit *illud* punctum; *ducetur* per ipsum recta HL, quæ debet respondere lineæ horizontali denotatæ iisdem *litteris*

teris in figura *6*, tum recta ST perpendicularis huic, quæ referat *longitudinem* styli: assumptâ hac pro radio partium 100 in circino proportionis, ad cujus numeros 100 ea fuerit applicata, vel in alia scala quacumque accipietur in recta horizontali HL recta SR æqualis *cotangenti* anguli, quem planum muri continet cum plano *Meridiani ad lævam* aspicientis murum, vel ad dexteram, prout *aspectus muri* respondens directioni styli perpendicularis ipsi deflectet *versus* occidentem, vel versus orientem: ita enim, si concipiatur recta ST perpendicularis rectæ HL, & æqualis longitudini styli, cum triangulo RST, *cujus planum* reducatur ad horizontalitatem, *latus* ST referet positionem horizontalem styli, angulus TRS *inclinationem muri respectu* horizontis, hypothenusa continuationem radii solis positi *in Meridiano post transitum per verticem* styli. Ducatur per R recta RQ *perpendicularis eidem horizontali* HL, quæ erit linea meridiana.

100. *Pro* inveniendo puncto extremo umbræ pertinente ad horam *datam quamcumque*, concipiatur centro T radio TS circulus, qui referat *circulum horizontalem* figuræ 7, sed applicatum ad planum verticale: *is autem occurrat in* A *rectæ* RT jacenti in plano Meridiani ultra T & *in I* radio ST itidem producto. Respondebit hic A eidem cardini australi, ac ibi, & I puncto horizontis, ad quod tendit directio styli ST.

101. *Sit igitur in* hac *figura* 8 AC idem arcus azimuthalis, ac *inventus ibi*, & *planum* quadrantis circuli *verticalis transeuntis per solem*, qui ibi erat ZSC, erit hic planum transiens in positione circuli reddita suæ horizontalitati per rectam CT, quæ concipiatur producta usque ad rectam HL in B: angulum STB = ITC metietur arcus IC, summa vel differentia binorum, quorum alter est arcus IA constans respondens inclinationi muri, & alter arcus azimuthalis inventus AC. Sit BF intersectio *ejus plani* verticalis cum muro, quæ erit itidem verticalis transiens per B continuationem rectæ CT: in ipsam autem BF *positam in eo plano* incidet post *transitum per* T *radius solis positi in plano* eodem, ac erit angulus BFT *æqualis distantiæ solis a zenith inventæ*, cum nimirum recta verticalis FB *tendat versus zenith*, & recta FT ad solem,

Hinc si angulus constans STR, nimirum complementum ejus, quem planum muri continet cum plano Meridiani, *dicatur a, summa, vel differentia hujus, & azimuthi computati a cardine australi pro quavis hora b, distantia solis a zenith d, & sumatur* ST pro radio $= 100$, erit SR $= tan.a$, SB $= tan.b$, BT $= \frac{1}{cos.b}$, $\frac{BT}{BF} = tan.BFT = tan.d$, adeoque BF $= \frac{BT}{tan.d} = \frac{1}{tan.d \times cos.b}$, assumptis $tan.a$, $tan.b$, $tan.d$, $cos.a$, e tabula sinuum ad radium $= 100$.

102. Eo pacto *sine ulla delineatione in* charta habebitur per numeros erutos e tabulis *sinuum prius valor rectæ horizontalis SR* pro ducenda *linea meridiana* RQ, *tum pro* quavis *hora* in eadem recta horizontali valor distantiæ SB, & inde in verticali valor BF. Ii valores accipi poterunt in scala efformata e longitudine *styli* ST divisa in partes 100: libella indicabit lineam horizontalem, filum cum pondere lineam verticalem. Linea æquinoctialis poterit duci per duo e punctis horarum *remotiorum determinatis pro* æquinoctiis, in qua debent *jacere etiam reliqua omnia*.

103. *Superessent regulæ pro determinanda plaga*, versus quam *assumenda sit recta horizontalis SB*, nimirum ad dexteram, vel ad *sinistram aspicientis*, quas supplere potest figura etiam crassius *delineata*, ut & *determinatio* punctorum pertinentium ad horas, quibus *sol latet post* murum, quæ sunt necessariæ ad ducendas li*neas* horarias, quarum nondum habentur duo puncta per methodum expositam: in iis autem debet concipi radius adveniens ad murum supra lineam horizontalem HL, prius, quam ad verticem styli. Ea omnia definiri utique possent per calculos numericos analogos hic propositis, sed res in longum abiret. Verum quod pertinet ad secundum punctum inveniendum pro quavis linea horaria, pro qua habebitur semper unum respondens solstitio æstivo, satius erit invenire lineam æquinoctialem, & in ea positionem puncti pertinentis ad horas singulas methodo proposita numero 89, quæ itidem adhibet calculum, & adhuc faciliorem, ac ducere quamvis lineam horariam ope ejus puncti æquinoctialis per punctum inventum ope Trigonometriæ sphæricæ adhibitæ pro solis horis solsti-

tiali-

tialibus. Præstabit autem etiam pro hujusmodi horologiis adhibere prius delineationem in charta ope scalæ minoris, ut appareat, an omnia rite constent, & inter se conveniant. Translatio e charta in murum fiet facile ante collocationem styli ope duplicis scalæ, quarum altera brevior exhibeat partes centesimas ipsius respondentis delineationi factæ in charta, altera longior partes centesimas longitudinis ipsius adhibendæ pro muro. In ipsa charta ducetur recta perpendicularis horizontali HL, & pro quovis puncto F distantia ipsius ab ea recta accepta circino exhibebit ope scalæ minoris numerum *centesimarum styli collocandi* respondentem distantiæ *horizontali SB, ac eodem pacto invenietur* numerus centesimarum *respondentium rectæ verticali* BF.

104. Selecto puncto S, quod debeat respondere vertici styli, assumetur e scala majore tam distantia horizontalis SB, quam verticalis BF, quæ facile transferentur in murum ope fili, cui appensus sit globulus, ope cujus libere pendentis determinabitur verticalis BF, post determinatam horizontalem SB.

105. Eo pacto transferentur *in murum* puncta, quotcumque opus fuerit, ad habendas in *ipso tam lineas horarias*, quam lineam meridianam, & *æquinoctialem, ac tropicos*.

106. *Pro collocando stylo* notabuntur *in linea HL* chartæ duo puncta, & *in verticali ducta* per S *tertium ad distantiam eandem arbitrariam : invenientur iis respondentia* in muro : determinabitur *in charta* distantia puncti T ab altero e binis notatis in recta HL : tum factâ apertura in S collocabitur stylus ita, ut ejus vertex habeat distantiam ab iis tribus punctis muri respondentem inventæ in charta. Stylus ita collocatus habebit & verticem respondentem puncto S, & longitudinem debitam delineationi jam factæ.

OPUSCULUM XIV.

De verificatione Machinæ Parallacticæ.

PRÆFATIO.

I. Hoc ego Opusculum transmiseram ex Italia ad Academiam Parisiensem ineunte anno 1772, quod ipsa destinaverat typis, approbatum pro impressione a celeberrimis Academicis de La-Lande, & Cassino *filio*. *Plura alia* transmiseram prius, quorum duo sola, quæ pertinent ad orbitas cometarum prodierunt inter monumenta ejus auctoritate impressa. Quid iis acciderit, quæ altercationes sub ipsum meum adventum Parisios ea occasione exortæ sint, ut & aliæ paullo post occasione alterius mei Opusculi de novo genere *micrometri objectivi*, satis indicavi in secundo, ac tertio *hujus collectionis* Tomo. Ea me impulerunt ad repetenda quæcumque nondum impressa fuerant, quæ omnia continentur in hac ipsa Collectione, aliis perquisitionibus permixta, & aucta plurimum, ac ordine mutato. Hoc edendum censui, uti fuerat tum typis destinatum, sine mutatione ulla retinendo etiam enunciationem mearum formularum differentialium pertinentium ad Trigonometriam sphæricam, uti eas ibi enunciaveram, licet nonnullarum ex iis nullus hìc usus occurreret. Eæ inveniuntur cum suis demonstrationibus in alio Opusculo, quod huic immediate subjiciam.

II. Illud Opusculum subsequens destinaveram postremo Tomo; sed ipsum huc transferendum censui, ut haberetur in ea serie integra complementum eorum, quæ pertinent ad idem argumenti genus, quorum usus cum hìc occurrat, & occurrerit etiam in aliis nonnullis ex Opusculis præcedentibus hujus Tomi, ac id gereret vices eorum, quæ in Gallia appellantur *des pièces justificatives*.

III. Retento toto textu sic, ut fuerat destinatum typis ab ipsa Academia, adjiciam identidem adnotationes nonnullas, ubi se occasio præbuerit. Occurret usus methodorum quarundam, quas adhibui

hibui etiam in præcedentibus Opusculis hujus ipsius Tomi; sed habebitur applicatio earum amplior, & non nihil diversa: applicationes autem ad usus analogos, & formulæ, quæ hìc inde proveniunt, congruentes cum ibi inventis pro perquisitionibus analogis, omitti non poterant in Opusculo, cujus textum proposui hìc exhibendum, uti fuerat tum ab iis doctissimis viris pro impressione approbatum.

IV. Descriptionem hujus machinæ parallacticæ videre est in Astronomia ipsius de La-Lande, *opere sane immortali*, ubi is inter cætera *recentioris Astronomiæ instrumenta* ipsius formam, & *usum clarissime exposuit*. Ad eam formam, ipso curante, constructa *fuerat Parisiis pro Mediolanensi* specula ea, cujus verificatio occasionem præbuit huic Opusculo, in quo si quis alicubi hæreat, illam consulat partem ejus ipsius Astronomiæ.

§. I.

Brevis notio machinæ, & scopus hujusce Opusculi.

1. NOTISSIMA est *constructio* machinæ parallacticæ, & ejus usus *pro comparando astro positionis ignotæ cum fixa cognita*, vel *inveniendo etiam interdiu astro positionis cognitæ*. Ea *habet binos axes cum telescopio*. Axis *primus debet* esse parallelus axi *Mundi*, & *habet sibi adnexum indicem*, qui in circulo referente *æquatorem diviso* in horas, & dena, vel quina minuta denotat horarios circulos, ac pertinet ad ascensionem rectam. Secundus debet esse perpendicularis plano transeunti per axem telescopii, & rectam parallelam axi primo; habet autem sibi adnexum indicem, qui in semicirculo conjuncto cum telescopio indicat declinationes mutatas motu telescopii ipsius circa eundem axem: telescopium instruitur micrometro, quod sæpe solet esse rhombus habens alteram diametrum duplam alterius (*).

2. Si

(*) De hoc rhombo agetur in *Opusculo XVI*. Ejus usum pro hac machina videre est in ipsa Astronomia ejusdem de La-Lande: ejus ope differentia declinationis binorum astrorum habetur per differentiam distantiæ ab ejus vertice, pro differentia distantiæ ab intersectione filorum in loco imaginis.

2. *Si machina sit accurate constructa*, & *rite collocata*; axis primus debet habere illum parallelismum cum axe Mundi accuratum, ac diameter major rhombi debet esse accurate posita in plano parallelo axi primo: tum quævis fixa motu diurno percurrit intra rhombum viam parallelam axi minori, quæ bifariam secatur a majori, & æquatur distantiæ suæ a vertice ipsius rhombi propiore. Circumducto telescopio cum axe secundo circa axem primum, quodvis punctum campi percurrit circulum *parallelum* æquatori cælesti, unde nomen ducitur *machinæ parallacticæ*. *Immoto autem axe primo, si telescopium circumducatur circa secundum*, tota diameter major rhombi *semper est in eodem circulo horario*.

3. Plerumque ea machina adhibetur tantummodo ad inveniendum, ut innuimus, astrum positionis cognitæ, etiam interdiu, vel directo telescopio in astrum incognitum inveniendam ejus motu circa axem primum fixam aliquam cognitam, cum qua id conferri possit, nimirum quæ habeat declinationem ita parum diversam a declinatione astri ignoti, *ut telescopii* immoti campum subire debeat utrumque astrum: *ex eorum appulsibus* ad latera rhombi, vel si *hujus directio non nihil declinet* a positione debita, ab iis, & ab appulsu ad majorem diametrum, deducitur differentia ascensionis rectæ, & declinationis eorum astrorum. Ad eam rem satis est constructio, & positio tantummodo proxima debitæ. *Sed si eæ sint* accuratæ; usus machinæ evadit multo præstantior. Collocatio accurata solius primi axis exhibet accuratam illam descriptionem parallelorum, qua fit, ut factâ observatione alterius e binis astris, non sit expectandum, donec alterum deveniat ad campum telescopii immotum; sed statim id ipsum potest adduci ad alterum, & notato motu indicis percurrentis æquatorem, is una cum intervallo temporum, quibus deveniunt ad diametrum majorem, vel ad horarium transeuntem per verticem rhombi, determinat differentiam ascensionis rectæ: differentia declinationis invenitur ibi eo casu prorsus eadem, & eodem pacto, quo si telescopium fuisset immotum.

4. Quod si & secundus axis sit rite positus, vel innotescant erro-

errores ejus collocationis; potest immediate per unicam observationem astri ignoti haberi ejus positio sine ulla comparatione cum fixa cognita. Investigatio errorum provenientium a mala dispositione axium in machina, vel positione mala machinæ, & methodus vel corrigendi errores, vel habendi eorum rationem pro usibus propositis est argumentum hujusce Opusculi utilissimum sane.

5. Incipiemus ab axe primo. Pro cognoscendo ejus statu, & corrigendo, si supponatur accurata, & distincta divisio æquatoris, sufficiunt binæ observationes fixæ cujusvis cognitæ: sine ea suppositione requiruntur tres. Trademus unam methodum rei perficiendæ per binas observationes, tum tres diversas idem præstandi per tres, quarum postremam censemus opportunissimam, adeoque ipsi & exemplum applicabimus.

§. II.

De positione axis primi determinanda, supposità satis accuratâ divisione circuli ascensionis rectæ.

6. SI circulus ascensionis rectæ sit rite divisus; poterit haberi positio ejus axis per binos appulsus ejusdem fixæ ad campum telescopii. Sit (fig. 1 Tab. IX) P polus Mundi, A polus machinæ, S, S' sint bina loca fixæ intra campum telescopii, V, V' bina loca verticis rhombi, vel intersectionis filorum micrometri, & quæratur positio puncti A.

7. Ductis arcubus PVS, PV'S', AV, AV', VV', & AB perpendiculo in hunc postremum, innotescent arcus PS, PS' æquales complemento declinationis cognitæ ejus fixæ, & VS, V'S' habebuntur ex observatione, adeoque innotescent etiam PV, PV'. Erit autem isosceles triangulum VAV' ob motum puncti V circa polum A, & proinde basis VV' erit secta bifariam in B, ac dabitur angulus VPV' ex intervallo horario converso in partes circuli, & VAV' e divisione circuli machinæ destinati pro ascensionibus rectis.

8. Hinc in triangulo VPV' innotescet basis VV', & angulus PVV' ex datis lateribus cum angulo intercepto in P, adeoque habebi-

bebitur & VB ejus dimidium: cum igitur habeatur & VAB dimidium VAV', innotescet in triangulo VBA rectangulo ad B latus VA cum angulo BVA, quo ablato ab invento BVP, habebitur PVA, ex quo, & lateribus VP, VA habebitur latus PA, & angulus VPA, nimirum distantia a polo Mundi poli machinæ quæsiti, & positio ipsius respectu horarii PV noti ex hora, & ascensione recta fixæ datæ.

9. Si Z sit zenith; habebitur ex hora observationis, & hora cognita appulsus *fixæ ad meridianum angulus* VPZ, ex quo, & angulo VPA *invento innotescet angulus* APZ, *adeoque* ob inventum latus AP, & notum complementum *PZ altitudinis poli habebitur* tam angulus AZP, circuli verticalis *transeuntis* per machinæ *polum* A, *qui est* mensura deviationis horizontalis ipsius axis, quam *latus* ZA *complementum* altitudinis supra horizontem ipsius poli, *cujus differentia* a *complemento altitudinis* poli P exhibebit aberrationem verticalem.

10. Hæc methodus requirit prorsus accuratam mensuram anguli VAV', quæ in communibus machinis habentibus circulum pro ascensione recta exiguum haberi non potest. Accedit, quod usum habere non potest satis accuratum pro fixis parum remotis ab æquatore, quia vis determinationis pendet etiam a differentia angulorum VAV', VPV', quæ in eo casu est nimis exigua. Bina sunt, quæ quæruntur, magnitudo, & *positio* arcus PA, & bini sunt errores, per quos ea determinari *debent*, differentia arcuum VS, V'S', ac differentia angulorum VAV', VPV'. Porro utcumque mutetur etiam plurimum & positio, & magnitudo arcus PA, differentia eorum angulorum mutatur parum admodum in eo casu, cum in eo ipsa tota semper sit perquam exigua. Si enim producatur PA, utcumque in D; erit sinus anguli VPA ad sinum VAP, sive ejus supplementi VAD, ut sinus VA; ad sinum VP. Porro licet differentia arcuum VA, VP sit satis magna, differentia sinuum eorum est perquam exigua, ubi ii accedunt ad quadrantem; est nimirum ibi secundi ordinis. Quare & differentia sinuum VPA, VAD debebit esse ordinis secundi, adeoque ubi ii anguli non accedant ad mensuram quadrantis, quod fere sem-

per

per accidet, different a se invicem per differentiam ordinis secundi. Idem accidet angulis V'PA, V'AD. Quare & differentia angulorum VPV', VAV' erit ordinis secundi, adeoque inepta ad determinationem magnitudinis, & positionis arcus PA. Semper debet id, per quod aliud determinatur, habere mutationem non exiguam respectu mutationis ejus, quod est determinandum, ne exiguus error commissus in illo trahat secum errorem ingentem in hoc.

11. Huic postremo malo mederi licet, adhibendo fixas remotiores ab æquatore; sed ad evitandum usum divisionis æquatoris machinæ proferemus alias methodos, quæ rem perficiant per tres observationes arcuum VS sine ulla ope determinationis accuratæ angulorum ad A. Illi arcus ope micrometri determinari facile possunt admodum accurati.

§. III.

Determinatio ejusdem sine usu ejus divisionis per simplicem Trigonometriam sphæricam.

12. SINT P, A, Z (fig. 2) eadem, quæ prius (Z potest esse vel in quapiam PS, vel extra), ac habeantur tria loca fixæ cujusvis cognitæ S, S', S'', cum tribus distantiis VS, V'S', V''S'' a tribus positionibus verticis rhombi, quæ deberent esse æquales; si poli A, P congruerent. Si inveniantur inæquales; positio puncti A respectu P sic inveniri poterit per resolutionem sex triangulorum sphæricorum.

13. Arcus VV', V'V'' sint bifariam secti in B, B' a perpendiculis AB, AB', & in triangulis VPV', V'PV'' habebitur utraque basis VV', V'V'' cum angulis ad ipsam. Hinc in triangulo BV'B' (*) habebuntur latera V'B, V'B' dimidia earum basium cum angulo

(*) Arcus VBV', V'B'V'' non sunt arcus circuli descripti a motu puncti V circa polum A, qui essent continuatio ejusdem arcus sine angulo in A, nisi in casu, in quo AV esset quadrans circuli maximi, a qua mensura is debet hic distare non parum, cum non debeant adhiberi fixæ parum distantes ab æquatore.

gulo BV'B' *composito* ex inventis PV'B, PV'B'. *Invenientur* in *eo anguli* V'BB', V'B'B cum eorum complementis ABB', *A*B'B, & *basis* BB', quæ cum sit etiam basis trianguli BAB', habebitur in hoc latus AB. Inde in triangulo ABV rectangulo ad B habebuntur latera AB, VB $= \frac{1}{2}$VV', adeoque & AV, & angulus AVB, qui ablatus ab angulo PVV' invento relinquet PVA: ex hoc, & lateribus VP, VA, innotescet, ut prius, PA cum angulo VPA, quæ duo exhibent positionem *quæsitam*.

14. Hæc solutio est accurata, *sed molesta ob* resolutionem *tot* triangulorum. Hinc *proferemus aliam*, quæ rem perficiat methodo paullo breviore.

§. IV.

Determinatio eadem ex iisdem datis per formulas trigonometricas differentiales.

15. SUPPONI debet hìc, ut & in superioribus, machina ita proxime collocata in positione debita, ut arcus AP sit exiguus: aliter enim in conversione telescopii fixa eadem non subiret ubique ipsius campum. Hinc adhiberi potest ad solvendum idem problema methodus differentialis Trigonometriæ, quæ rem perficiet cum minore triangulorum apparatu.

16. Habeo ego ejusmodi *formulas differentiales* (*) *cum suis* demonstrationibus (eas transmisi ad Academiam Parisiensem), in qui-

---

tore. Ii arcus etiam in casu, in quo assumantur fixæ distantes ab ipso æquatore plurimum, non pertinent ad circulum descriptum a puncto V, qui est circulus minor distans plurimum a circulo maximo, sed sunt arcus circulorum maximorum, uti sunt ii omnes, qui adhibentur in Trigonometria pro lateribus triangulorum sphæricorum. Hinc ii arcus continent in V' angulum sphæricum, atque is est idem ac angulus trianguli BV'B', cujus basis BB' non confunditur cum lateribus BV', B'V', sed est minor, quam eorum summa, & continet cum ipsis angulos V'BB', V'B'B, qui ob angulos V'BA, V'B'A rectos habent pro complementis angulos ABB', AB'B.

(*) Hæ formulæ sunt ex iis, quas indicavi in præfatione hujus Opusculi: eas hìc proposueram; sed omissis reliquis, ut ibi indicavi, retinebo in numero sequenti eam solam, cujus usus hìc occurrit.

quibus si *mutentur* etiam omnia latera, & omnes anguli in quovis *triangulo* sive sphærico, sive plano, continetur nexus mutationis unius *cujusvis* ex iis sex cum mutationibus trium aliorum quorumvis. Ea omnia reducuntur ad quatuor combinationes, quarum singulæ continentur *singulis* e quatuor æquationibus continentibus quaternos terminos. Si unum, vel duo e *tribus*, quæ determinant mutationem quarti, maneant sine mutatione; ejus, vel eorum mutatio fit = o, & in hoc secundo casu eæ ipsæ æquationes exhibent illa theoremata, quæ primus cœpit considerare Cotesius, quæ *singillatim proposuit* Caillius, ac fuse demonstravit *La-Landius*. *Verum* hæ generales multo ampliorem habent usum, *ut patebit in hujus problematis* solutione, quam hìc subjiciam.

17. Interea en hìc denomina*tiones*, *combinationes*, æquationes

Latera cum angulis oppositis x, y, z, p, q, r.

COMBINATIONES.

I. Omnia latera cum uno angulo . . . . x, y, z, p

II. Bina latera cum binis angulis, quorum alter oppositus, alter interceptus . . . . x, y, p, r

III. Bina latera cum angulis oppositis . . . . x, y, p, q

IV. Unum latus cum omnibus angulis . . . . x, p, q, r

ÆQUATIONES IIS RESPONDENTES.

I. $dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dp\sin.z\sin.q = o$

II. $dx\sin.q - dy\cos.z\sin.p - dp\sin.z - dr\sin.x\cos.q = o$

III. $dx\cot.x - dy\cot.y - dp\cot.p + dq\cot.q = o$

IV. $dx\sin.r\sin.y - dp - dq\cos.z - dr\cos.y = o$

18. Prima ex hisce æquationibus rem perficiet; sed ad applicationem ipsius hæc prius notanda sunt. Si poli A, P congruerent; arcus VS, V'S', V''S'' essent æquales. Si inveniantur inæquales; fiat error VS − V'S' = e, VS − V''S'' = e'. Polis V, V', V'' concipiantur arcus transeuntes per A, qui occurrant arcubus PV, PV', PV'', in a, a', a'', & fiat Pa = m, PVA = n; qui valores si inveniantur, solvetur problema. Cum enim innotescat PV = PS − VS, ut in præcedentibus methodis, inventâ Pa

innoteſcet & $Va = VA$, adeoque invento etiam angulo $AVP = n$, invenietur, ut prius, in triangulo VAP magnitudo, & directio arcus PA. Erit autem $Pa + aV + VS = PS = PS' = Pa' + a'V' + V'S'$. Hinc demptis $aV, a'V'$, quæ æquantur æqualibus AV, AV', erit $Pa + VS = Pa' + V'S'$, adeoque $Pa' = Pa + VS - V'S' = m + e$, & pariter $Pa'' = m + e'$.

19. Consideretur jam triangulum VPV', quod abeat in VAV', factis mutationibus exiguis omnium præter latus VV', quod manet, tum VPV'', quod similiter abeat in VAV''. Mutatio in priore lateris VP abeuntis in VA est $-Pa = -m$: mutatio V'P abeuntis in V'A est $-Pa' = -(m + e)$. Ex mutationibus horum laterum, & mutatione lateris $VV' = 0$, ac mutatione anguli $PVV' = -PVA = -n$ habebitur una æquatio: altera æquatio eruetur similiter ex mutatione trianguli VPV'' abeuntis in VAV'', in qua satis erit ponere e' pro e, ac VV'' pro VV'. Combinantur hìc tria latera cum angulo *ad V*. Quare is debet appellari p in combinatione I *exhibente theorema* I, adeoque latus PV' ipsi oppositum erit x, *latera adjacentia* VV', VP erunt alterum y, alterum z.

20. Quare habebuntur sequentes denominationes, & æquationes $PV = z, PV' = x, PV'' = x', VV' = y, VV'' = y', VV'P = r, VV''P = r', VPV' = q, VPV'' = q', dx = -(m + e)$, $dx' = -(m + e'), dz = -m, dp = -PVA = -n, dy = 0$.

$$-m - e + m\cos.q + n\sin.z\sin.q = 0$$

$$-m - e' + m\cos.q' + n\sin.z'\sin.q' = 0$$

21. In iis æquationibus habentur e, e', z, z', q, q', & quæritur valor $m = Pa$, & valor $n = PVA$, qui earum ope facile inveniuntur, ut patet, & iis inventis reliqua peraguntur, ut in §. I, ob datum P, V, & inventum $AV = aV = PV - Pa$.

22. Hæc solutio, ut & præcedentes, supponit notam declinationem fixæ, requirit autem longiorem numericum calculum pro solutione æquationum. Præterea hæc methodus requirit fixas non ita proximas æquatori; nam formulæ differentiales in arcubus quadranti proximis sunt ita erroneæ, ut usui eſſe non poſſint. Habeo ego alias, quæ pertinent ad triangula etiam habentia ejus-

modi

modi arcus, & angulos, quas hìc adhibere possem, & adhibui alibi agens de cognoscendis erroribus collocationis quadrantis muralis (*): eas proponam in fine totius hujusce dissertationis pro complemento quodam: hìc potius subjiciam aliam methodum, quæ fere congruit cum quadam pariter ibidem adhibita; est autem hìc multo simplicior, aptari potest fixis quibusvis ubivis positis, & indiget solo tempore trium observationum fixæ cujusvis utcumque ignotæ.

§. V.

Determinatio eadem simplicior.

23. FACTIS iisdem tribus observationibus paragraphorum præcedentium, dicantur itidem e, e' excessus primæ VS supra reliquas V'S', V''S''. Ii soli cum intervallis horariis rem omnem perficient, si distantia PA fuerit exigua, ut in paragrapho superiore. Nam arcus circulorum Aa, Aa', Aa'' haberi poterunt pro rectis, una cum arcubus Pa, Pa', Pa'', PA, aa', $a'a''$, aa''. Ob angulos PaA rectos erunt puncta a ad circulum, cujus diameter PA, & hæc ad chordas aa', $a'a''$, aa'' subtendentes angulos aPa', $a'Pa''$, aPa'' erit, ut radius ad sinus eorum angulorum, quæ est proprietas nota chordarum circuli subtendentium angulos ad peripheriam.

24. *Cum ii anguli sint intervalla horaria redacta ad partes circuli; innotescent eorum sinus*, qui dicantur, c, c', c''; fiat autem $PA = z$, $Pa = m$. Cum sit $PS = PS'$, & $aV = AV = AV' = a'V'$, erit $Pa + VS = Pa' + V'S'$, adeoque $Pa' = Pa + VS - V'S' = m + e$, ut in paragrapho superiore, & eodem pacto $Pa'' = m + e'$. Præterea erunt aa', $a'a''$, $aa'' = cz$, $c'z$, $c''z$ ex natura chordarum indicata.

25. Jam

(*) Id *Opusculum* conscriptum aliquanto ante, paucis admodum mutatis, prodit in hoc eodem Tomo, ubi *est tertium*: *habentur methodi analogæ etiam in Opusculo XI.*, quod agit *de Instrumento transituum*: est autem his omnibus analogum etiam Opusculum XII, quod agit de erroribus lineæ meridianæ. In iis omnibus habentur methodi similes, sed ubique adsunt sua etiam discrimina.

25. Jam vero in quadrilineo $Paa'a''$ inscripto circulo est $aa' \times Pa'$ $+ a'a'' \times Pa = aa'' \times Pa'$. Quare erit $cz(m + e') + c'zm =$ $c''z(m + e)$: nimirum dividendo per z, $cm + ce' + c'm =$ $c''m + c''e$, sive $m = \frac{c''e - ce'}{c + c' - c''}$.

26. Invento eo valore habetur $Pa = m$, & $Pa' = m + e$, adeoque ob datum etiam angulum aPa', invenietur angulus $aa'P$ $= a$AP, cujus complementum aPA exhibet directionem arcus PA respectu horarii dati PV, & valor PA $= m$ divisus per ejus sinum exhibet ipsum arcum PA.

27. Si secunda observatio fiat in appulsu ad meridianum; ipse valor $Pa' = m + e$ *erit aberratio verticalis* exhibens mutationem inducendam in elevatione axis supra horizontem: erit autem $Aa' =$ $Pa' \times tan.APa'$, qui angulus est differentia horarii SPS' dati, & inventi SPA, adeoque datur: tum $PZA = \frac{Aa'}{sin.Za'} = \frac{Pa' \times tan.APa'}{sin.Za'}$ (*), qui valor datur ob datum $Za' = ZP - Pa'$, & exprimit aberrationem horizontalem, cum motu inducendo ad eam tollendam.

28. Ne error observationis nimis excrescat, oportet divisor c $+ c' - c''$ non sit nimis exiguus. Is est excessus summæ sinuum binorum angulorum horariorum partialium SPS', S'PS'' supra sinum totalis SPS''. Ne is excessus sit exiguus, oportet, ipse ille totalis angulus non sit exiguus; nam aliter erunt multo magis exiguæ ejus partes cum sinubus, & sinuum summa, ac multo minor excessus ejus summæ supra sinum totius. Quare plurium horarum intervallum requiritur inter observationes.

29. Excessus autem summæ sinuum partium supra sinum totius dati evadit maximus, ubi partes sint æquales inter se, quod admodum facile demonstratur. Si enim (fig. 3) sint AD, DB partes arcus AB, & ducantur AE, BF perpendicula in radium DC, qui chordæ AB occurrat in I; sinus erunt AE, BF, qui erunt sem-

(*) Eum esse errorem horizontalem patet ex eo, quod PZA est angulus, quem continet in zenith circulus verticalis tendens ad polum erroneum A cum Meridiano tendente ad polum verum P.

semper minores hypothenusis AI, BI, adeoque eorum summa semper minor, quam chorda AB, cui fit æqualis summa ipsa, ubi factis AD, BD æqualibus, ipse radius CD secat bifariam, & ad angulos rectos eandem chordam, ac puncta EFI abeunt in medium chordæ AB. Quare erit optimum factu, si observationes fiant ad intervalla temporum æqualia. Eo casu evadit $c' = c$, & formula $\frac{c''e - ce'}{2c - c''}$.

30. *Eo major est excessus summæ binorum sinuum æqualium supra sinum totius, quo arcus totus est major.* Si enim compleatur *diameter* ACG, & *ducatur chorda* BG cum perpendiculo BH, quod erit sinus arcus *AB; erit* AG:GB::AB:BH, adeoque AG: AG — GB::AB:AB — BH. Primus terminus manet utcumque mutato arcu AB: secundus, & tertius eo crescente crescit, cum crescat ejus chorda, decrescat autem GB, ut patet, adeoque crescit excessus constantis AG supra ipsam. Hinc quo intervallum temporis magis accedet ad horas 12, quæ exhibent (fig. 2) mensuram anguli totalis SPS'' graduum 180; eo melius res procedet. Et quidem donec ille excessus fuerit minor radio = 1, denominator $2c - c''$ augebit errorem numeratoris; ubi is fuerit major, ipsum minuet. Id jam accidit in arcu = 127°.29', cujus dimidium = 63°.44'.30'' habet sinum = 0,89681, & duplum sinum = 1,79362, dum ipse arcus totus habet pro sinu 0,79355, quo ablato ab illo duplo jam habetur 1,00007 paullo plus quam 1. Is limes invenitur directe per æquationem gradus 4. Si enim fiat AC = 1, AB = x; ex conditione AB — BH = 1, obtinetur $x^4 - 8x^2 + 8x + 4 = 0$.

31. Si arcus totus fuerit 180; evanescet ejus sinus c'', & sinus dimidii = 90° evadit = 1. Hinc formula evadit $-\frac{ce'}{2c} = -\frac{1}{2}e'$, valor simplicissimus. Eo casu evadit P$a = -\frac{1}{2}e'$, P$a' = e - \frac{1}{2}e'$. Porro in eodem casu evadit rectus etiam angulus aPa', adeoque Aa' = Pa = $-\frac{1}{2}e'$, qui valor divisus per sinum Za' exhibet immediate, & ignoto etiam e aberrationem horizontalem AZa': sinus autem Za' proximus sinui ZP assumptus pro ipso nihil

ad

ad sensum turbabit valorem ejus aberrationis exiguum. Quare habebitur hujusmodi regula. *Obſervetur quævis fixa sex horis ante, & sex horis post ejus appulsum ad Meridianum: dimidium differentiæ distantiarum a vertice rhombi dividatur per cosinum elevationis poli, & habebitur aberratio horizontalis: pro verticali obſervetur eadem fixa etiam in appulsu ad Meridianum: excessus distantiæ a vertice rhombi in obſervatione secunda, & tertia dicantur error primus, & secundus: ab errore primo dematur dimidium secundi, & residuum erit quæſita aberratio verticalis.*

32. Sunt, qui pro aberratione horizontali assumant illud dimidium secundi erroris, & præcipiant, ut illud corrigatur, *tum iterum* fiat observatio, & corrigatur dimidium novi erroris, atque ita porro, donec elidatur totus error sensibilis. Ii præcipiunt, ut fiat per longam seriem id, quod ex prima sola observatione haberi potest dividendo errorem inventum per cosinum elevationis poli.

33. Quoniam hæc methodus est omnium propositarum simplicissima, & expeditissima, ejus unius exemplum proferemus in paragrapho sequenti.

§. VI.

Exemplum cum obſervationibus pro postrema methodo.

34. INITIO Januarii anni 1772 habitæ sunt sequentes observationes, quarum secunda quam proxime in Meridiano.

Tempus	VS	Errores	Anguli horarii	Sinus ipsorum	Producta
$6^h.\ 25'$	$34'.\ 5''$	$e = 3'.\ 37'' = 217''$	$3^h = 45°$	$c = c' = 0{,}7071$	$c''e = 217''$
$9.\ 25$	$30.\ 28$	$e' = 2.\ 56 = 176$	$3 = 45$	$c + c' = 1{,}4142$	$ce' = 124{,}45$
$0.\ 25$	$31.\ 9$		$6 = 90$	$c'' = 1$	$c''e - ce' = 92{,}55$
				$c + c' - c'' = 0{,}4142$	

Hinc $m = \dfrac{c''e - ce'}{c + c' - c''} = \dfrac{92'',55}{0,4142} = 223'',4 = aP$, & $a'P$, $= m + e = 440'',4 = 7'.20'',4$

In triangulo aPa' ex iis lateribus, & angulo $aPa' = 45°$, habetur $aa'P = 29°.13' = aAP$.

Qua-

Quare $aPA = 60^\circ.47'$, & $a'PA = 60^\circ.47' - 45^\circ = 15^\circ.47'$. Sed $PZ = 44^\circ.32'$, adeoque $a'Z = 44^\circ.25'$, & $a'ZA = \frac{a'P \times tan.a'PA}{sin.a'Z} = 178'' = 2'.58''$ (*).

35. Habetur igitur aberratio horizontalis $= 2'.58''$, verticalis $= 7'.20''$, quarum prima est in occidentem, secunda sursum. Adductum est telescopium ad positionem Meridiano proximam, in quo habebatur objectum remotum, cujus capta est mensura ope micrometri sextantis, & *æstimatione in eo assumptæ ad latus dextrorsum, & sursum partes respondentes inventis erroribus*, ac *immoto telescopio respectu machinæ datus est ipsius pedibus per cochleas motus ejusmodi, ut intersectio* axium rhombi percurreret eas ipsas partes dextrorsum, & sursum. *Sic axe telescopii* abeunte in occidentem, & ascendente, polus ex parte opposita debuit abire in orientem, & descendere.

36. Facta ejusmodi correctione captæ sunt iterum distantiæ VS alio die, & inventus est error 24 secundorum, qui non pertingit ad 2'' in observatione longitudinis chordarum in rhombo facta per tempus: *is ortus est ex errorculis tot observationum auctis* a divisore 0,4142, & *errorculo illius æstimationis partium objecti*, qui *error facile correctus* exhibuit *positionem accuratam*. *Divisor* obvenit *minor* unitate, quia *assumptus est angulus totalis* 90° *minor illo* $127^\circ.29'$, qui unitatem *exhibet pro excessu dupli sinus supra sinum arcus* dupli. Id autem assumptum est ita, cum lucrum majoris divisoris sit exiguum, & incommodum longioris moræ nocturnæ multo gravius.

37. Quæ huc usque sunt proposita, pertinent ad axem pri-

(*) PZ est distantia poli a zenith Observatorii Mediolanensis, complementum altitudinis poli, quæ ibi, neglectis secundis, est $= 45^\circ.28'$, adeoque $PZ = 44^\circ.32'$, unde ablato $Pa' = 7'$, habetur $a'Z = 44^\circ.25'$. Hinc est $a'ZA = \frac{440'',4 \times tan.15^\circ.47'}{sin.44^\circ.25'} = 178'' = 2'.58''$. Porro hæc est deviatio horizontalis juxta adnotationem ad num. 27. cum nimirum angulus $a'ZA$ sit idem, ac angulus PZA. Arcus autem $a'P = 7'.20''$ est error verticalis; cum sit differentia distantiæ Za' a zenith, quam habet polus erroneus A, a distantia ZP, quam habet polus verus P ob arcum Za' æquipollenter æqualem arcui ZP.

mum: quæ pertinent ad reliquos duos, congruunt fere prorsus cum iis, quæ jam alibi proposui pro telescopio meridiano, & quadrante murali, ac ad Academiam Parisiensem transmisi (*). Rem hìc perficiam methodo paragraphi IV. applicata ad casum ipsius machinæ parallaticæ.

§. VII.

Determinatio erroris in positione reliquorum binorum axium.

38. SINT D, D' (*fig.* 4) *bini poli æquatoris* (*litteram* P *reservamus pro polo secundi axis, ad servandam analogiam hujus solutionis cum præcedenti*), & *dum immoto axe primo in positione quavis convertitur* telescopium circa secundum, sint V, V', V'' tria *loca* verticis rhombi in appulsu trium fixarum ad horarios transeuntes per ipsum: innotescant autem ipsarum declinationes, & observentur distantiæ ab ipso vertice, ac notentur tempora appulsuum ipsorum. Sit DVD' horarius primæ positionis, DV', DV'' sint

(*) Primum ex iis binis est in hoc Tomo Opusculum III, vix quidquam mutatum, sed mutatum non nihil, & suppressâ applicatione numerorum ad observationes, quam hìc retinui, cum nihil in reliquo textu mutaverim: secundum est hìc Opusculum XI, in quo retinui ea, quæ habebantur in Opusculo transmisso, sed melius digesta, & additamentis quamplurimis amplificata.

Porro methodus hìc proponenda in §. sequenti congruit penitus, vel fere penitus cum una e methodis adhibitis pro quadrante murali, & pro instrumento transituum, & quæ hìc habebuntur in §. VIII. congruunt cum alia; sed possunt facile huc transferri omnes reliquæ methodi ibidem propositæ, quæ sunt plures, potissimum in Opusculo XI pertinente ad instrumentum transituum, tam pro determinanda magnitudine singulorum errorum, quam pro iis corrigendis, vel efformanda tabula eorum, qui occurrent in reliquis punctis, ut sine correctione machinæ haberi possit eorum ratio, vel pro obtinenda formula, quæ adhibeatur ad determinandos eosdem, ubi machina portatilis reddat tabulam computatam pro una collocatione inutilem pro alia. Considerationes autem propositæ in paragrapho V pertinentes ad divisorem $c + c' - c''$, possunt applicari etiam ad eas binas machinas, & convenire instrumento transituum, in quo habetur divisor huic respondens, & arcus, ad quos pertinent hi valores c, sunt autem sinus arcuum, qui ibi dicuntur c, & possunt esse ibi magnitudinis cujusvis, dum in quadrante murali vix possunt abire non nihil ultra gradus 90. Non omnia simul, quæ utilia esse possunt, scribenti occurrunt.

sint arcus horariorum secundæ, & tertiæ, qui congruerent cum illo primo, si machina esset rite constructa, & primus axis rite collocatus. Sit autem DPD' horarius perpendicularis ipsi DVD', in cujus medio P polus hujus ipsius: tum A sit polus circuli transeuntis per puncta V, V', V'', quem in motu circa secundum axem describit punctum V, qui esset maximus, si axi secundo esset perpendicularis linea fiduciæ transiens per verticem rhombi: secus erit parallelus cuidam maximo EFE', qui occurreret horario DVD' alicubi in F, arcui PA producto in H, arcubus AV, AV', AV'' in M, M', M'': *occurrat autem posterioribus binis arcus* DFD' in *u'*, *u''*, *& arcui AH in* G. *Sint demum arcus* A*a*, A*a'*, A*a''* *descripti polis V, u', u''* usque ad PV, PV', PV'', & AI versus H = AV.

39. Quoniam machina supponitur non nimis aberrans a debita constructione; arcus V'*u'*, V''*u''*, erunt exigui, & proinde assumi possunt pro arcubus circulorum parallelorum habentium polum in D, cum nimirum ob arcum AP exiguum anguli D*u'*A, D*u''*A sint proxime æquales rectis D*u'*P, D*u''*P, & proinde ipsi *u'*V', *u''*V'' perpendiculares arcui D*u''u'*. Erunt itidem ad sensum recti arcus pertinentes ad figuram P*aa'*A*a''*, quæ idcirco etiam hic haberi poterit pro inscripta circulo, cujus diameter AP, ut §. IV. Cum autem innotescant declinationes fixarum, adeoque ipsarum distantiæ a polo, ac observatio exhibeat ipsarum distantias a vertice rhombi, innotescent distantiæ DV, DV', DV'' ipsius verticis a polo. Innotescunt & arcus V'*u'*, V''*u''* ab hora appulsus ad V', V''. Nam ex differentia ascensionis rectæ earundem fixarum innotescit tempus, quo secunda, & tertia appellit in *u'*, *u''* ad horarium primæ, adeoque innotescunt differentiæ temporis inter appulsum ad V', & V'', ac appulsum ad *u'*, & *u''*, quæ multiplicatæ per 15, & per sinus arcuum DV', DV'' cognitorum exhibebunt ipsos arcus V'*u'*, V''*u''* in partibus circuli maximi, qui cum sint errores machinæ, possunt appellari *e*, *e'*.

40. Porro cum sit P*a* + *a*V = PV = P*u'* = P*a'* + *a'u'*; addito V'*u'*, erit P*a* + *a*V + V'*u'* = P*a'* + *a'u'* + *u'*V' = P*a'* + A*u'* + *u'*V' = P*a'* + AV' = P*a'* + AV = P*a* + *a*V.

 Qua-

Quare dempto utrinque aV, erit $Pa + V'u' = Pa'$, adeoque si fiat $Pa = m$, erit $Pa' = m + e$, & eodem pacto $Pa'' = m + '$. Angulorum autem VPu', $u'Pu''$, VPu'' menſuræ ſunt arcus V' $u'u''$, Vu'', quos conſtat eſſe quamproxime æquales differentiis diſtantiarum a polo DV, DV', DV'', cum hi duo poſtremi debeant eſſe quamproxime æquales arcubus Du', Du'' ob arcus $V'u'$, $V''u''$ exiguos, & proxime perpendiculares arcui $Du''u'V$. Quare innoteſcunt & ii anguli, adeoque & ipſorum ſinus, qui ſi dicantur c, c', c'', habebitur prorſus, ut in paragrapho V, valor $m = \frac{c''e - ce'}{c + c' - c''}$, & eodem pacto ex $Pa = m$, $Pa' = m + e$ jam cognitis cum angulo aPa' habebitur angulus $Pa'a = PAa$, complementum aPA, & arcus PA, quibus cognitis habetur poſitio poli A, & ejus diſtantia a puncto P, cum quo deberet congruere.

41. Valor m erit æqualis valori VM, cum arcus Pa, VM ſint complementa arcuum Va, VA æqualium. Is nimirum erit aberratio poſitionis lineæ fiduciæ reſpectu axis ſecundi, qui error corrigi poteſt per motum teleſcopii ipſius reſpectu axis ſecundi, vel hujus reſpectu illius. Valor autem PA debet eſſe æqualis GH, cum debeant eſſe quadrantes tam PG, quam AH, qui valor eſt menſura anguli GFH; nam ob FA, FP quadrantes debet F eſſe polus circuli PAGH.

42. Cum is angulus debeat eſſe exiguus, debent arcus FV, Fu', FG, Fu'' eſſe quamproxime æquales FM, FM', FH, FM'', quos exhibent anguli ad A, & diviſio circuli declinationum ipſius machinæ. Differentia erit ordinis ſecundi ob angulos ad M, M', H, M'' rectos: arcus quoque DV', DI, DV'' debent eſſe æquales arcubus Du', DG, Du'' citra errorem ordinis primi, præter caſum, in quo diſtantia DV'' a polo evadat ipſa exigua, qui caſus fere nunquam occurrit. Hinc idem circulus exhibebit diſtantias a polo, ſive declinationes punctorum V, V', V'' citra errorem ordinis primi. Erit autem FV menſura anguli FPV, qui debet æquari invento PAa, cum uterque ſit complementum ejuſdem APa. Quare cum innoteſcat locus puncti V in circulo decli-

clinationis respondens puncto M, innotescet etiam *locus* puncti F, & *locus* punctorum G, H ab eo distans per quadrantem, versus quem locum habetur aberratio poli. Si concipiatur arcus AL polo D usque ad circulum DP, erit PL error quæsitus inclinationis axis secundi ad primum, cum exhibeat differentiam distantiæ polorum a quadrante. Is facile invenietur; erit enim ut sinus anguli inventi PAa ad cosinum anguli APD, nimirum summæ, vel differentiæ anguli inventi aPA, & anguli aPD, quem metitur arcus V''D *distantia puncti* V'' a *polo*, *ita* Pa = m ad ipsum PL. *Motus axis secundi æqualis huic arcui*, reddet axem secundum *perpendicularem* primo, qui *si* in eo motu secum ferat telescopium *habentem respectu ipsius* positionem jam correctam; omnia erunt correcta: nam LA perpendicularis horario DPD' nihil aliud efficit, nisi substituere horarium alium pro alio, quæ substitutio mutat tantummodo initium numerationis horarum, & vel corrigitur per motum indicis adfixi primo axi, vel involvitur in tabella complectente simul omnes correctiones pertinentes ad horariorum determinationem.

43. Patet inde, *quo pacto machina ipsa* ad perfectionem adduci possit, *si habeantur liberi motus pro inclinando telescopio*, & *axe secundo*. *Si ii motus non sint liberi; adhuc poterit adhiberi machina ad habendam immediate positionem astri tam in ordine ad ascensionem* rectam, quam *in ordine* ad declinationem. *In ordine ad hanc positio illa* parum erronea lineæ fiduciæ, & axis secundi, non turbabit ad sensum declinationes. Quare si divisio sit accurata, vel innotescant ejus errores, ac semel inveniatur error cujuspiam declinationis pro corrigendo initio numerationis; unica observatio sine novis comparationibus exhibebit *declinationem*. Poterit autem inquiri in ipsam divisionem capiendo *ope* ipsius declinationes plurium fixarum cognitarum. In ordine *ad ascensionem* rectam, ea facile corrigi poterit per tabellam errorum, *quam exhibebit ipsa positio* puncti F, *& angulus* GFH. Data enim distantia cujusvis alterius loci V', vel M' ab invento F invenietur M'u', *qui erit valor illius* anguli multiplicatus per sinum FM', ex quo, & errore M'V' constanti = m, innotescet

scet $V'u'$, qui divisus per cosinum declinationis, *ostendet* pro quavis *declinatione* errorem ascensionis rectæ ortum ex eo errore machinæ. In casu a figura expresso inventâ *declinatione* puncti F, ad inveniendam eam correctionem pro quavis alia declinatione M' puncti V' cujusvis calculus sic expedietur. Arcus PA $= z$ metiens angulum ad F ducatur in sinum differentiæ earum declinationum FM'; a producto subtrahatur valor constans V'M' $= m$: residuum dividatur per sinum distantiæ a polo V'D, nimirum per cosinum *declinationis* V', ac *habebitur valor quæsitus*. Si differentia *declinationum punctorum F, V' sit* $= f$, *declinatio* $V' = g$; valor quæsitus erit $\frac{z\sin.f - m}{\cos.g}$. *Facile autem patebit in singulis casibus mutatio signorum*, si qua occurrat in valorum numericæ substitutione: quod si præterea occurrat error indicis ostendentis horarium diversum ab eo, in quo erat fixa in observatione indicata a littera V; is additus, vel ablatus exhibebit totum errorem horarii respondentem cuivis declinationi, & eorum errorum tabella construi potest. Potest tamen motu indicis solius corrigi error respondens æquatori. Ea correctione additâ errori prius invento, vel inde ablatâ, haberi poterit tabella exprimens errores respondentes omnibus declinationibus, in qua error respondens declinationi zero, sit & ipse $=$ zero.

44. Tabella ita constructa, indice ibi immobiliter affixo axi primo, inserviet pro illo horario, in quo erat fixa in prima observatione: eadem exhibebit errores debitos cuivis alteri horario, si divisio æquatoris machinæ fuerit accurata: si ea habeat errores suos, requiretur alia tabella horum errorum respondens horis diversis: summa, vel differentia errorum erutorum ex iis tabulis in alio casu quovis exhibebit totam correctionem horariam pro quavis observatione, in qua index declinationis præbebit argumentum primæ tabulæ, & index horarius argumentum secundæ.

45. Facile construetur hæc secunda tabula, ubi semel methodo §. VI. fuerit collocatus axis primus in positione accurata. Dirigatur telescopium in fixam quampiam, & circumducatur circa axem primum, ponendo indicem ipsius ad omnes divisiones æquatoris, & no-

& notando *momentum* appulsus ad diametrum majorem rhombi in singulis ejusmodi positionibus: si negligantur refractiones; illi ipsi numeri correcti per errorem horologii exhibebunt correctiones pro secunda tabula: incipiendo enim ab appulsu ad Meridianum, tam ad horas anteriores, quam ad posteriores, differentia inventa inter horas indicatas ab horologio, & exhibitas ab indice erit correctio ponenda in tabula. Sed satius est adhibere correctiunculam respondentem refractioni, quæ per formulas differentiales facile inveniri potest, *computato per ipsas effectu refractionis in ordine ad horarium. Pro horis ab horologio indicatis facile invenietur horarius loci apparentis fixæ*, qui collatus cum horario exhibito ab *indice exhibebit correctiones* ponendas in tabula: ad eam rem aptissimæ sunt fixæ circumpolares, quæ præbebunt verificationem totius æquatoris. Quod si assumantur earum multæ; confirmabitur tabula, & evadet correctio accuratior, & tutior assumendo medium inter plures conformes.

46. Sic facile reducentur binæ ipsæ tabulæ eo, ut in hora machinæ meridiana XII pro æquatore correctio sit nulla, tum in altera habeatur correctio *pro singulis divisionibus* æquatoris, in altera pro singulis *declinationibus*, indice *utroque* ita *collocato*, ut innuimus, *ut pro æquatore* in Meridiano correctio *sit zero*. *Hisce autem tabulis addi potest alia summæ itidem utilitatis*, *quæ definiat positionem diametri majoris rhombi ope horarii*. Commodissimus *rhombi usus* est, ubi diameter major congruit cum arcu circuli horarii, quo casu diameter minor congruit cum parallelo: tum via motus diurni est ipsi parallela, ac bifariam secta a diametro majore, & æqualis distantiæ verticis rhombi ab ipsa. Bini appulsus ad sola latera exhibent in eo casu appulsum intermedium ad horarium transeuntem per verticem pro ascensione recta, & longitudinem viæ deducendam ex mora exhibentem distantiam *eandem* a vertice pro declinatione. Si diameter *major non habeat eam* directionem; adhuc inveniri potest utrumque observando *appulsum etiam ad ipsam diametrum majorem*; nam ex inæqualitate temporum *inter latera*, & eam diametrum facile eruitur angulus, quem ea continet cum horario transeunte per verticem.

ticem. *Si nimirum summa eorum temporum, sive tempus totale fiat* $=t$ *differentia* $=dt$; *facile demonstratur, fore tangentem ejus anguli* $=\frac{2dt}{t}$ (*). Ex eo angulo facile derivatur tam momentum appulsus ad horarium transeuntem per verticem, quam distantia viæ ab ipso vertice, & ubi is angulus est exiguus, formulæ correctiuncularum sunt simplicissimæ: sed ea pertinent ad dissertationem de micrometris. Porro potest ita converti rhombus, ut in data telescopii positione *acquirat diameter major situm* congruentem cum horario, quam *indicabit fixa quævis percurrens diametrum minorem*: sed si axis *secundus non sit accurate perpendicularis primo*; *mutata* declinatione, *jam orietur deviatio diametri ipsius majoris ab horario pendens a mutatione* anguli AV'D figuræ 4. Tabella ejus *mutationis* exhiberet eum angulum pro quavis declinatione. De ea, ut & de errore ascensionis rectæ deducendo e communi principio, agemus §. IX.

47. Præparatis semel illis tabulis, & machinâ rite collocatâ, ac firmiter affixâ loco immobili, poterit semper deinde per unicam observationem haberi accurate locus astri cujusvis, videndo, quid exhibeat machina, quid tabellæ, & adhibendo correctiones debitas refractioni, quarum posset facile construi alia tabella cum binis argumentis, horario, & declinatione. Quin immo quoniam correctiones supponi debent exiguæ; machinâ si minus accurate, saltem proxime bene constructâ, & collocatâ, potest ex iis omnibus tabellis computari unica habens omnes correctiones horariorum conjunctas, cui si addatur tabella continens errores declinationis ortos ex inæquali divisione semicirculi, haberetur instrumen-

(*) Id theorema, & quidquid pertinet ad usum rhombi in diversis ejus positionibus demonstrabitur in Opusculo, quod erit XVI, & aget tantummodo de hoc genere micrometri: de novo genere micrometri objectivi habetur Opusculum in Tomo II: nonnulla, quæ pertinent ad micrometra filaria, habentur in aliis e superioribus Opusculis, quin habeatur ullum, quod complectatur simul omnia micrometrorum genera, quod habebam in animo tum, cum hoc Opusculum transmisi ad Academiam, & alibi fortasse edam collectis simul omnibus, quæ habentur in hisce Tomis pertinentia ad id argumentum, & adjectis aliis pluribus, quæ eodem pertinent.

mentum egregium, cujus ope unica quævis observatio præberet immediate locum verum astri cujusvis incogniti, determinatâ ejus ascensione rectâ, & declinatione. Oporteret ad habendam accurationem satis magnam, machina ipsa esset tota e metallo: præstaret, si tota esset ex eodem: radii autem arcuum illorum circularium deberent esse saltem unius pedis: machina esset adhuc melior, si haberet telescopium acromaticum saltem trium pedum, & instructum micrometro meliore adhuc, quam sit rhombus, nimirum instructo *filo mobili*. Nec opus esset ullo nonio pro subdivisionibus: *mora exigua temporis efficeret*, ut puncta divisionum *æquatoris ipsa* immediate adhiberi possent pro horariis, & pro declinatione puncta *semicirculi*, supplente subdivisiones micrometro. Immensæ sane utilitatis esset ejusmodi instrumentum.

§. VIII.

De usu machinæ parallaticæ portatilis.

48. Sæpe occurrit *usus machinæ* parallaticæ portatilis, quæ nimirum *transferatur in locum commodum* observatori, & collocetur *pro re nata*, *quin adsit* tempus corrigendi ejus positionem: etiam in eo casu potest inveniri error collocationis, ac horarius verus, & declinatio ex horario, & declinatione erroneis, ut a machina male collocata exhibentur, correctis tamen ab erroribus ipsius machinæ ope tabulæ pertinentis ad horarios corrigendos independenter a refractionibus, & alterius pertinentis ad declinationes. Si habet machina vel filum cum pondere appenso, vel duplicem libellam; tum habita ratione verticalitatis in collocatione, quod facile præstari potest, relinquetur solus error deviationis horizontalis pro axe a plano Meridiani, atque is cito determinari potest, & facile corrigi ope unius observationis fixæ cognitæ, quæ vel ejus declinationem determinet, vel horarium, ut conferantur cum vera declinatione, vel horario. Verum si observatio instituatur prope Meridianum; declinatio eo casu erit inepta, & oportebit adhibere potius observationem horarii: nam prope Meridianum, mutatâ positione machinæ solo motu hori-

zontali, astrum nihil ad sensum ibi mutat distantiam a polo machinæ, respectu cujus distantiæ is motus est perpendicularis.

49. In eo casu satius est ipsam positionem statim corrigere aptando telescopium loco cujuspiam fixæ notæ, & circumagendo horizontaliter machinam ipsam, donec fixa ad locum debitum appellat in campo telescopii, ut ad intersectionem diametrorum rhombi: ad eam rem satis esset etiam sola declinatio accurata fixæ satis remotæ a Meridiano: nam telescopium aptatum illi declinationi non posset adduci ad ipsam fixam, nisi ubi acquireret machina positionem prorsus accuratam. Quod si semel adducta ad fenestram aliquam ibi eo pacto fuerit rite collocata per ejusmodi accuratam observationem astronomicam; poterit tum dirigi telescopium in objectum quodpiam terrestre, & notari horarius, ac declinatio ipsi respondens. Quotiescumque enim ad eandem fenestram reducetur machina; restituto telescopio ad eandem illam positionem, & gyratâ machinâ horizontaliter ita, ut cum accurata ipsius verticalitate telescopium spectet illud idem objectum, habebitur collocatio accurata, ac observatio unica astri alterius ignoti cujuscumque ipsius locum accurate definiet.

50. At si desint ea, quæ requirantur ad reddendam verticalitatem accuratam machinæ, vel iis satis fidendum non videatur; adhuc tamen machinâ ipsâ utcumque temere collocatâ, potest haberi collocationis error, determinando, utcumque determinatione erronea ope ipsius tria pertinentia ad fixas cognitas, ut distantiam a polo, & horarium unius, ac solam distantiam a polo alterius. Eo determinato errore, potest e distantia a polo, & horario cujusvis astri ignoti determinatis per ipsam machinam ita male positam haberi accurate correcta distantia vera ipsius a polo, & horarius pro momento observationis. Error collocationis reducitur ad hæc tria: distantiam poli machinæ a polo Mundi, positionem ejus distantiæ respectu Meridiani, & positionem Meridiani machinæ, sive ejus circuli tendentis ab ejus polo ad punctum æquatoris ipsius respondens horæ XII. Ea tria incognita determinantur a tribus iis erroribus inventis. En methodum.

51. Sint in fig. 1, ut in 2, arcus Aa, Aa' polis V, V', sed

a'V'S'

aV'S' pertineat ad quamvis aliam fixam cognitam; Meridianus autem machinæ AI occurrat Meridiano Mundi PZ in I. Poterit ex observatione haberi tam distantia erronea a polo, quam angulus horarius erroneus puncti V, quales exhibentur a machina correcta per tabulas, sed male collocata, nimirum arcus VA, & angulus VAI, ut itidem arcus V'A. Habebuntur autem ex arcubus PS, PS', notis, & SV, S'V' observatis distantiæ veræ a polo VP, V'P, ac ex ascensionibus rectis fixarum, & hora observationis utriusque habebuntur anguli horarii veri VPI, V'PI. Considerentur *triangula sphærica VPV', VAV', VPA*, quorum resolutio *rem conficiet*, *fere ut in* §. II.

52. In primo *VPV' dabuntur latera* VP, V'P cum angulo *horario* VPV', quare invenietur & basis VV' *cum angulo* PVV'. In secundo VAV' dabuntur latera VA, V'A cum basi inventa VV': quare invenietur angulus AVV', qui collatus cum invento PVV' exhibebit PVA: in tertio AVP dabuntur latera VP, VA cum angulo invento PVA: quare invenietur AP unum e quæsitis cum angulo VPA, qui *collatus* cum horario VPI exhibebit API, quæ duo pertinent ad *secundum e quæsitis*, nimirum ad positionem arcus PA: *invenietur ibidem* & angulus VAP, qui *collatus* cum horario erroneo VAI *exhibebit* IAP, quod erat *postremum* e quæsitis, cum *nimirum id*, *determinato per priora duo loco* A *poli machinæ*, *determinet positionem ejus Meridiani* AI.

53. *Si jam referat* S' aliud astrum ignotum, pro quo detur distantia erronea V'A a polo observata cum angulo horario erroneo IAV'; invenietur sequenti methodo ejus horarius verus IPV' cum distantia vera V'P addenda arcui observato V'S' ad habendum complementum declinationis PS'. Ex angulo IAP invento, & IAV' observato habetur V'AP, qui in casu figuræ erit residuum eorum summæ ad 4 rectos. Quare habebitur in triangulo *V'AP is angulus ad* A *cum latere* AV' observato, & AP invento; *adeoque eruetur inde* PV' primum e quæsitis cum angulo APV', qui *collatus cum IPA invento relinquet* IPV' alterum e quæsitis.

54. Sic per tria triangula sphærica habebuntur ex illis tribus

male determinatis a machina tria quæsita determinantia positionem machinæ, quæ sufficiunt ad inveniendam positionem veram astri ignoti ope unici quarti trianguli, atque id, quæcumque sit collocatio utcumque remota a debita. At si positio sit parum erronea, quod haud difficulter obtinetur, etiam ope libellæ, & acus magneticæ; tum vero multo facilius omnia sic expediuntur.

55. In triangulo aPa' præter angulum horarium ad P habebuntur latera Pa, Pa' differentiæ distantiarum erronearum Va, $V'a'$, a veris VP, V'P. Quare invenietur angulus $aa'P = aAP$ ob puncta a, a' posita in peripheria circuli habentis diametrum PA. Hinc obtinebitur $AP = \frac{aP}{sin.aAP}$, & aPA *complementum ipsius* aAP, cujus comparatio cum horario aPI exhibebit, ut prius, IPA. Angulus autem IAP habebitur ex observato IAV collato cum VAP, qui facile invenietur. Si enim D sit occursus arcus PA producti cum VV'; erit VAD ejus supplementum, *cujus differentia ab angulo* VPA cognito *invenitur facile per formulas differentiales* paragraphi IV. *Triangulo VPD abeunte* in VAD, manet latus VD cum *angulo D; mutantur latus* VP in VA, & angulus VPA in VAD. *Quare habetur combinatio* III binorum laterum cum *angulis oppositis*. Fiat VA $= x$, VD $= y$, AD $= z$, erit VDA $= p$, VPD $= q$, AVD $= r$. Hinc in æquatione III factis $dy = 0$, $dp = 0$, erit $dx cot.x + dq cot.q = 0$, sive $dq = -\frac{dx cot.x}{cot.q} = - dx cot.x tan.q$. Porro est $- dx = Pa$. Quare differentia addenda angulo VPA ad habendum VAD supplementum quæsiti VAP est $aP \times cot.VP \times tan.aPA$.

56. Observato jam pro alio astro incognito S' angulo IAV' cum distantia AV', invenietur facile angulus IPV' cum distantia PV'. Nam ex angulis IAP, IAV' innotescet PAV' residuum ad 4 rectos in casu figuræ, cujus ob rectum V'Aa' est supplementum $a'PA$ (*): inde factis ut sinus anguli PAa prius inventi ad sinum

(*) Est enim $a'PA + PAa' = 90°$ ob rectum etiam AaP, adeoque ob $V'Aa'$ rectum est $a'PA + PAV' = 180°$, adeoque $a'PA$, PAV' alter alterius supplemen-

num ipſius PAa', ita Pa, qui arcus itidem habebatur, ad Pa', habebitur hic, nimirum correctio adhibenda diſtantiæ AV' = a'V' ad habendam PV'. Angulus autem V'PA a ſupplemento V'AP differt, ut ſupra, per Pa' × *cot*.V'P × *tan*.a'PA, qui, collatus cum IPA invento prius, exhibebit horarium correctum IPV'.

57. Apparet igitur egregius uſus machinæ etiam *mobilis*. Verum machina parallatica metallica cum circulo, & ſemicirculo ſatis magnis, ac teleſcopio acromatico, & ſatis bono micrometro filari collocata *firmiter in turri habente tectum mobile*, eſſet *inſtrumentum uſus immenſi*, & *expeditiſſimi*, ac *incredibilis ad Aſtronomiam cum maximo fructu excolendam utilitatis*.

§. IX.

Uſus aliarum formularum differentialium Trigonometriæ in hiſce perquiſitionibus (*).

58. In quovis triangulo ſphærico, ſi bina latera ſint quadrantes, bini anguli iis oppoſiti debent eſſe recti, & viceverſa, ac ſi unum latus cum angulo ſibi adjacente ſint graduum 90, erunt itidem, & angulus oppoſitus ei lateri, & latus oppoſitum ei angulo. In omnibus hiſce caſibus, qui reducuntur ad unicum duorum laterum æqualium quadranti, tertium latus eſt accurata *menſura tertii anguli*. Si jam bina illa latera mutentur mutationibus exiguis; mutabuntur & anguli, ac eorum mutationes erunt complementa novorum laterum, & angulorum: facile autem demonſtra-

mentum. Initia arcuum AV', Pa'V' in A, & a' aſſumpta pro rectis lineis perpendicularibus arcui Aa' conſiderato itidem pro rectilineo habebuntur pro rectis parallelis, etiam arcu AP habito itidem pro linea recta, adeoque bini anguli PAV', a'PA haberi debent pro binis parallelarum internis poſitis ad eaſdem partes, qui ſimul ſumpti æquantur duobus rectis.

(*) Hic adhibebuntur binæ formulæ, quæ cum hiſce ipſis denominationibus occurrent in Opuſculo ſequenti, in quo, ut indicavi in præfatione hujus Opuſculi, eæ habebuntur cum ſuis demonſtrationibus. Hæ autem licet non videantur, ſunt eædem, ac ſecunda & tertia numeri 5 Opuſculi III hujus ipſius Voluminis, ibidem etiam demonſtratæ. Illæ nimirum ſolâ denominatione mutatâ migrant in has, ut mox videbimus.

stratur, tertium latus differre a mensura anguli sibi oppositi per quantitatem ordinis inferioris relate ad mutationes ipsas *laterum*, & angulorum, ut idcirco valor ejusmodi lateris haberi possit pro valore anguli oppositi, & viceversa. Inter hæc complementa habentur suæ relationes, quæ differunt ab iis, quas proposuimus num. 17, quæ, ut ibidem monui, non sunt accuratæ, ubi acceditur ad quadrantem. Has innui num. 22: proponam autem hic easdem sine demonstrationibus cum applicatione ad hoc argumentum, ut appareat egregius earum usus.

59. Continentur binis æquationibus, in quarum altera combinantur bina latera cum angulo altero, in *altera bini anguli* cum altero latere. Denominationes laterum, *& angulorum* erunt eædem, quæ num. 17, sed x, y, p, q erunt omnes $= 90^\circ$: z erit valoris cujusvis, cui erit æqualis valor r: ut tamen hæ formulæ locum habeant, is nec debet esse nimis exiguus, nec nimis accedens ad 180°: dx, dy, dp, dq erunt *differentiæ* priorum a quadrante, nimirum complementa, quæ possunt haberi *pro* positivis, ubi habetur *defectus* a 90°, *quo casu* erunt negativæ, ubi habetur excessus, *vel viceversa pro positivis in* secundo casu, negativis *in primo, dummodo semper conservetur* idem e binis concipiendi modis. *Habebimus* hic complementa pro positivis, ubi deficitur a 90°, *ut applicatio* ad schema fiat per valores positivos (*).

Valores *laterum* cum angulis oppositis . . . . x, y, z, p, q, r

COMBINATIONES, ET ÆQUATIONES

I. Bina latera cum altero angulo . . . $dx - dy\cos.z - dp\sin.z = 0$

II. Bini anguli cum altero latere . . . $dx\sin.z - dp - dq\cos.z = 0$

60. Pro

(*) Ut appareat, has formulas congruere cum illis, apponentur hic denominationes, & æquationes in prima e sequentibus binis lineis, quæ habebantur ibi in secunda quæ hic: si litteris lineæ primæ substituantur litteræ lineæ secundæ, æquationes illius migrabunt in æquationes hujus, ubi transpositis tantummodo terminis ipsius secundæ, hæc, quæ hic obvenit, est eadem, ac secunda in textu sequente, nimirum $dx\sin.z - dp - dq\cos.z = 0$

y, x, z, q, p, r ... $dy - dz\cos.x - dq\sin.x = 0$ ... $dq + dr\cos.x - dy\sin.x = 0$

x, z, y, p, r, q ... $dx - dy\cos.z - dp\sin.z = 0$ ... $dp + dq\cos.z - dx\sin.z = 0$

60. Pro applicatione consideretur triangulum $AV'D$ (fig. 4); in quo latus AV' deficit a quadrante PV' per $V'M' = P\alpha'$, DA per PL, qui valores habentur num. 40, & 42, ac eorum primus dictus est m, secundus fieri potest $= m'$. Inde per primam combinationem poterit haberi differentia a recto utriusvis anguli PDV', $PV'D$. In utroque casu distantia a polo DV', & angulus ipsi oppositus in A possunt assumi pro $= z$, qui erit valor complementi declinationis. Porro etiam inde constat, distantiam a polo, sive declinationem, *bene determinari a circulo declinationis pro astris non nimis proximis ipsi polo, nihil* obstante errore exiguo *inclinationis secundi axis ad primum* juxta num. 43. Sed pro angulo ad D erit $AV' = x$, ut ADV' sit $= p$, & pro angulo ad V', erit $AD = x$: hinc in primo casu $dx = m$, $dy = m'$, in secundo $dx = m'$, $dy = m$. Porro ex combinatione I est $dp = \frac{dx}{sin.z} - \frac{dy cos.z}{sin.z} = \frac{dx}{sin.z} - dy cot.z$. Quare complementum anguli $ADV' = \frac{m}{cos.decl.} - m' tan.decl.$, & anguli $AV'D = \frac{m'}{cos.decl} - m tan.decl.$

61. Ope primæ formulæ conficietur multo facilius tabula pro correctione ascensionis rectæ, de qua num. 43. Valor formulæ in æquatore, in quo declinatio evanescit, adeoque ejus cosinus $= 1$, ejus *tan.* $= 0$, evadit $= m$, differentia hujus a valore generali, erit error ascensionis rectæ pro quavis alia declinatione, adhibendus in efformanda ea tabula, nimirum $m - \frac{m}{cos.decl.} + m' tan.decl.$

62. Ope secundæ formulæ invenitur angulus, quem continebit in quavis declinatione diameter major rhombi cum horario, unde facile fluet constructio ejus tabulæ, de qua num. 47. Valor formulæ in æquatore erit pariter m', pro qua positione telescopii si aptetur rhombus ita, ut diameter major congruat cum horario; ejus deviatio pro quavis alia declinatione erit $m' - \frac{m'}{cos.decl.} + m tan.decl.$

63. Com-

63. Computatâ hujus anguli tabulâ, facile admodum e solis appulsibus ad latera rhombi invenietur appulsus ad horarium transeuntem per verticem propiorem, ubi deviatio sit exigua, ut erit, nisi collocatio axis secundi sit nimis erronea. Si enim tempus totale intra rhombum sit itidem $= t$, sinus ejus anguli $= s$, correctiuncula exhibens intervallum temporis inter momentum intermedium ipsius t, & appulsum ad diametrum majorem, erit, ut ego quidem invenio, $= \frac{1}{4}st$, inter eum appulsum, & horarium transeuntem per verticem $= st$ in partem oppositam, adeoque intervallum inter momentum intermedium temporis t, & appulsum ad horarium $= \frac{5}{4}st$: distantia autem a vertice rhombi erit adhuc quamproxime æqualis arcui paralleli respondenti illi tempori, nimirum si t exprimat secunda temporis siderei pro fixis, vel pro quovis alio astro secunda temporis rite redacti ad ejus motum diurnum, $= 15t cos. decl.$ Sed hæc itidem pertinent ad tractatum de micrometris (*).

64. Ope æquationis I numeri 59 solvi potest etiam problema paragraphi VI, in quo ex angulis VDV', VDV'' datis quæruntur e contrario valores P$a = m$, & PL $= m'$, qui determinant etiam angulum ADL: is potest appellari m''. Fiant errores dati ascensionis rectæ VDV' $= e$, VDV'' $= e'$, tum DV $= c$, DV' $= c'$, DV'' $= c''$. Defectus anguli ADV a recto est ADP $= m''$, anguli ADV' est ADP $-$ VDV' $= m'' - e$, anguli ADV'' est pariter $m'' - e'$. Inde in æquatione I $dx - dy\cos.z - dp\sin.z = 0$ positis hisce tribus valoribus pro dp, semper autem m pro dx, m' pro dy, tum c, c', c'' pro z habebuntur sequentes æquationes.

$$m - m'\cos.c - m''\sin.c = 0$$
$$m - m'\cos.c' - (m'' - e)\sin.c' = 0$$
$$m - m'\cos.c'' - (m'' - e')\sin.c'' = 0.$$

65. Ex iis tribus æquationibus eruuntur valores m, m', m'', quorum secundus, & tertius cum exhibeant DA complementum PL $= m'$, & angulum PDA, cujus mensura est AL ob DA proxi-

(*) Patebunt nimirum per ea, quæ habebuntur hìc in Opusculo XVI.

ximum quadranti, exhibent triangulum rectangulum PLA, adeoque tam magnitudinem arcus PA, quam ejus directionem. Haud difficulter eadem æquatio aptari posset problemati pertinenti ad paragraphos III, IV, V, pro casu fixæ æquatori proximæ, ut innuimus num. 22. Quæruntur ibi duo valores (fig. 2) Pa = m, AVP = n, ex quibus eruuntur reliqua. Considerentur prius triangula PVV', AVV', in quorum singulis dantur analytice complementa laterum cum angulo horario ad P, qui est proxime idem, ac ad A. *Ii anguli possunt appellari* z, z': *complementum* VP *dabitur, cum detur exigua declinatio fixæ*, & arcus VS: id *potest dici* a; & *si* etiam fiat e = VS − V'S', & e' = VS − V''S''; erit *complementum* V'P = $a - e$, complementum V''P = $a - e'$. Complementum autem AV erit $a + m$, cum is arcus deficiat ab arcu PV per Pa = m, quod ipsum erit complementum etiam AV', AV'' æqualium ipsi AV.

66. Habitis iis jam habentur omnia necessaria ad applicationem formulæ $dp = \frac{dx}{sin.z} - \frac{dycos.z}{sin.z}$ (num. 60). Is valor exhibebit complementum anguli AVV', si fiant dx, dy æquales complementis AV', AV, *nimirum* $a + m$; & anguli PVV', *si fiant* iidem valores æquales complementis PV', PV, *nimirum* $dx = a - e$, $dy = a$. Excessus secundæ *formulæ* supra primam exhibebit *angulum PVA. Idem exhibebitur a simili excessu posito tantum* e', c' *pro* e, c, adeoque habebitur æquatio exhibens quæsitum valorem m, ex quo emerget & valor n anguli PVA æqualis utrique excessui habito per m.

$$\text{Complem.}\begin{cases}\text{AVV}' = \frac{a-e}{sin.z} - \frac{acos.z}{sin.z}\\[1ex] \text{PVV}' = \frac{a+m}{sin.z} - \frac{(a+m)cos.z}{sin.z}\end{cases}$$

$$\text{Differentia} = n = \frac{-e-m}{sin.z} + \frac{mcos.z}{sin.z} = \frac{-e'-m}{sin.z'} + \frac{mcos.z'}{sin.z'}$$

$$\text{Quare } m = \frac{esin.z' - e'sin.z}{sin.z - sin.z' + sin.z'cos.z - sin.zcos.z'}$$

66. In denominatore est $sin.z'cos.z - sin.zcos.z' = sin.(z' - z)$ si-

ſinus anguli VPV', dum $sin.z$, $sin.z'$ ſunt ſinus angulorum VPV', VPV''. Hi ſinus appellati fuerunt (num. 24) c, c'', & $sin.V'PV'' = c'$. Quare formula evadit $\frac{c''e - ce'}{c + c' - c''}$, prorſus ut num. 25. Sed ibi idem valor obvenerat viâ multo breviore ope quadrilinei illius inſcripti circulo, quod extenditur ad fixas utcumque vel æquatori proximas, vel ab ipſo remotas. Idem quadrilineum exhibuit etiam in §. VI. ſolutionem ſimpliciorem, quam habeatur hìc *num.* 64. Adhuc tamen non *erunt inutiles hæ ſolutiones*, quæ exhibent uſum, & vim harum adeo *ſimplicium æquationum pertinentium* ad exigua complementa, *potiſſimum in Aſtronomia*.

OPU-

OPUSCULUM XV.

De formulis differentialibus Trigonometriæ.

QUATUOR ego Opuscula de hoc argumento Latine conscripseram, in quibus *diversæ methodi exponebantur, quarum singulæ me deduxerant ad easdem* quatuor *æquationes generales*, *quæ inter se* connectunt omnes exiguas variationes, *quæ possunt accidere* lateribus, & angulis triangulorum sphæricorum, pendentes a se invicem, quas etiam ad triangula plana transtuleram. Eorum Opusculorum unum transmiseram ex Italia ad Regiam Parisiensem Scientiarum Academiam ante hos circiter quindecim annos, quod ipsa destinaverat typis. Ubi post meum adventum in Galliam repetenda censui ob rationes in præcedentibus Tomis expositas quæcunque nondum fuerant impressa, quæ omnia habentur *in hac* Opusculorum collectione, & fere omnia plurimum aucta, ac alio ordine *digesta*; illud ipsum Opusculum suppressi, *transferendo* in hoc, quod Gallico idiomate conscriptum hìc exhibeo, quæ in præcedentibus *illis mihi visa sunt maxime idonea*, *adjectis aliis quamplurimis ita*, ut nihil, quod *ad id argumentum pertinet*, ulterius *desiderari posse* videatur. Adhibueram ego quidem in præcedentibus Opusculis plures ex iis formulis cum successu: ipsas quatuor æquationes generales enunciaveram in postremo, quod huic est proximum, quod, ut expressi sub ipsum Gallicì hujus Opusculi initium, me impulit ad exhibendam hìc demum omnem eam theoriam; sed adhuc in hoc *ipso* Opusculo applicavi formulas easdem ad plures alios astronomicos usus; unde *satis* facile colligitur, quantæ utilitatis in universa *potissimum Astronomia esse* debeant *formulæ generales* hìc inventæ. *Sed aggrediamur rem ipsam*.

 §. I.

DES FORMULES DIFFERENTIELLES DE TRIGONOMÉTRIE.

§. I.

Idée générale de l' objet de cet Opuscule.

1. Nous considérons ici le rapport, qui se trouve parmi les petits changements de six termes d' un triangle quelconque, c' est-à-dire de trois côtés, & de trois angles. Trois de ces six termes déterminent les autres trois, à l' exception d' un seul cas de la Trigonométrie plane, dans lequel les trois côtés ne sont pas déterminés par les trois angles, parceque leur somme y étant toujours égale à deux angles droits, la détermination des trois angles ne donne rien de plus, que la détermination de deux seuls, par lesquels le troisième est immédiatement déterminé. Le cas des deux côtés donnés avec un angle opposé à un d' eux, ou de deux angles sphériques avec un côté opposé à un de ces deux, contient un problême déterminé, quoiqu' il peut avoir deux solutions.

2. Il s' ensuit, que quand il y a un petit changement d' un de ces six termes, au moins trois des cinq autres doivent avoir aussi un petit changement: ce changement peut arriver à quatre autres & même à tous les cinq. J' appelle différences des côtés, ou des angles ces petits changements. Il y a entre ces différences une liaison mutuelle, par laquelle les unes peuvent être déterminées dépendamment des autres. Cette liaison est exprimée par des équations, ou des analogies, qu' on en tire. Je donnerai ici les formules, qui contiennent ces équations générales, & la manière de s' en servir dans des cas particuliers avec quelques exemples de leur application à des problêmes d' Astronomie.

3. C' est Cotes, qui a commencé le premier à examiner cet objet dans son Opuscule de *erroribus in mixta mathesi*. L' Abbé de la Caille dans ses éléments a donné un grand nombre de formules appartenantes au rapport, qu' il y a entre ces différences sans les démontrer, & M. de La-Lande dans son Astronomie a donné 24 analogies. Tous ces Auteurs ont supposé deux termes constants. Quand il s' agit d' un triangle particulier, on a un très-grand nombre

bre de combinaisons : dans six termes il y a 15 binaires, dont on peut supposer les deux termes constants : pour chaque binaire de constants il en reste quatre variables, qui donnent six binaires de différences à comparer : ainsi on auroit 90 combinaisons différentes : mais cette différence n'est qu'apparente : on réduit les 15 binaires de termes constants à 4, que nous développerons ici, ce qui réduiroit les combinaisons à 24 : mais de la même manière, ces 24 se réduisent par des expressions générales à 16, qui ont réellement des équations différentes. Nous donnerons dans la suite toute cette *réduction avec les 16 équations : voici en attendant les 4 binaires de termes constants :* 1. deux côtés : 2. un côté avec *un angle opposé :* 3. un côté avec un angle adjacent : 4. deux angles.

4. Quand il y a un seul terme constant, il y en reste 5 de variables. On peut avoir dans un triangle particulier pour constant un de ces six termes quelconque, ce qui fait déjà six cas pour le constant : dans cinq termes variables on a 10 conbinaisons de trois, & la différence d'un de ces trois dans ce cas peut être déterminé par celles des deux autres. Cela porteroit 60 combinaisons : mais on peut réduire par des expressions générales indépendantes de la figure les six premiers à deux, 1. un côté constant, 2. un angle. Pour chacun de ces deux cas on n'a que *6* seules combinaisons réellement différentes, ce qui réduit le total à 12 : nous *les donnerons ci-après en détail.*

5. Quand il n'y a rien de constant, la différence d'un quelconque de six termes peut être déterminée par trois autres, ce qui porte la combinaison de 4 termes variables. Dans six termes il y a 15 combinaisons de 4 ; ainsi le total seroit aussi de 60. Pourtant le tout se réduit de la même manière à quatre seules 1. trois côtés avec un angle : 2. deux côtés, & deux angles, dont un compris entre ces côtés : 3. deux côtés, & deux angles opposés : 4. trois angles, & un côté. J'ai pour chacune de ces 4 combinaisons une équation de quatre termes, dont chacun a la différence d'un des 4 termes du triangle, qui y entrent. Toute l'immense multitude de cas, que nous avons trouvés ici, est renfermée dans

ces quatre seules équations, & tous les problêmes, qu'on peut proposer, quand il n'y a rien de constant, quand on a un terme seul constant, quand il y en a deux, trouvent une solution très-facile dans la seule application des mêmes équations à la figure du triangle, soit sphérique, soit plan, dont il est question dans des cas particuliers. Pour ce, qui est des termes constants, il suffit de faire leur différence = o.

6. On voit par-là le grand avantage de ces 4 équations générales, qui *sont le germe de toutes les particulières*, en comprenant *tant de cas différents*, & *en donnant la solution de toute* cette multitude de problêmes *par la seule différente manière de* les y appliquer. Je les ai *trouvées pour le triangle sphérique*, & *je les applique aux plans* en faisant aller le rayon de la sphère à l'infini. Je les ai cherchées en allant par des routes différentes, qui m'ont toujours amené au même bout, en me donnant les mêmes formules. J'ai exposé dans quatre différents Mémoires quatre différentes méthodes d'y parvenir, que j'ai écrit en latin, & avant mon départ d'Italie j'en avois envoyé un à l'Académie, qui l'avoit approuvé pour l'impression avec plusieurs autres, que j'ai *retiré* pour *les raisons*, que j'ai indiquées dans les Volumes précédents. J'ai fait usage de ces équations dans le Volume III pour la recherche des éléments de l'orbite d'une comète: en cherchant sa distance par la méthode des fausses positions, j'ai évité à leur aide une position nouvelle, & heureusement j'y ai rencontré des cas de deux termes constants, d'un seul, d'aucun. Il y en a d'autres analogues, qu'on tire de celles-là, ou qu'on trouve de la même manière, que j'ai employé dans plusieurs Opuscules de ce Volume-ci, & dans le dernier des précédents j'ai eu besoin de quelqu'une des mêmes quatre équations, que pour cela j'y ai énoncé sans en donner les démonstrations: ce qui m'a déterminé à en donner ici la théorie générale.

7. Je les chercherai d'abord par la méthode la plus simple, & la plus expeditive, en me servant pour les deux premières de la simple Géométrie linéaire appliquée à des quantités infiniment petites, qui très-souvent abrège le chemin de beaucoup, & amene

ne à des solutions, & des démonstrations beaucoup plus simples que celles, qui sont fournies par le détour de longs calculs. Newton s' en est servi si souvent avec tant de succès sur-tout dans son immortel ouvrage des Principes. Pour la troisième j' employerai les formules les plus élémentaires, & très-connues du calcul différentiel, que pourtant je démontrerai pour ceux, qui n' y sont pas initiés. Elles sont si simples, & leur application à ce cas si facile, & court, que je me suis déterminé à les employer ici par préférence. *Pour la quatrième je me servirai* du beau théorème *de Trigonométrie sphérique*, par lequel si un triangle *a pour côtés le suppléments* des angles d' un autre, il a pour *angles opposés les suppléments* de ses côtés: ce *théorème* donne la manière la plus courte, & la plus simple, qu' on puisse imaginer de tirer la quatrième de la première.

8. Les expressions du calcul différentiel appliquées à des formules de la Trigonométrie finie donnent aussi les deux premières équations: mais on y trouve d' abord des coefficients très-compliqués en apparence, & *il faut employer* un long détour de calcul, pour *les amener à la simplicité* de ceux que l' on trouve *immédiatement par l' autre méthode*. Je donnerai après dans un *paragraphe à part cette détermination* aussi de ces deux équations *pour faire mieux sentir la différence*, & *le prix* de la Géométrie *linéaire*, *qui aujourd' hui est trop négligée*, & même *méprisée par ceux*, qui *aiment mieux* remplir les pages entières d' un calcul laborieux, que peu de gens lisent, & que personne peut être ne se donne jamais la peine d' examiner en entier.

9. On trouveroit encore plus aisément des équations pour les mêmes combinaisons des termes de la Trigonométrie plane: mais comme il y a une manière très-simple pour les tirer des autres appartenantes à la Trigonométrie sphérique, je donnerai cette *réduction*. *Il suffit* de concevoir le rayon de la sphère infini, pour *faire* que *les côtés* circulaires de celle-ci soient *changés* en côtés rectilignes de *celle-là*: celle-là est comme un cas particulier de celle-ci.

10. Quand il y a des côtés, ou des angles, qui s' approchent

trop

trop du zero, de 90°, de 180°, les formules peuvent devenir très-fautives, les coefficients des termes, qui contiennent des sinus, co-sinus, co-tangentes, devenant si petits, qu' ils s' abaissent à l' ordre inférieur, dans lequel il y a beaucoup de quantités négligées, ce qui dans certains cas peut donner de grandes erreurs : il y a dans le même cas une augmentation des quantités, qu' on ne peut plus négliger. Les erreurs, qui en derivent, vont quelque fois jusqu' à l' infini. J' en donnerai quelqu' exemple : mais je ferai voir un *excellent usage, qu' on en peut faire, pour en tirer des équations très-simples pour le rapport, qu' ont entr' eux le petits compléments des deux côtés, & deux angles dans un triangle sphérique, dans lequel si deux côtés, ou deux angles, ou un côté avec un angle adjacent sont exactement de* 90°, les deux angles opposés dans le premier cas, les deux côtés opposés dans le second, & l' angle, & le côté opposé dans le troisième, le sont aussi : mais si tous ces termes en diffèrent un peu, ou il y a un seul exactement tel, tandis que les autres en diffèrent ; il y a une *liaison parmi ces petites différences*, qui sert admirablement bien *pour la solution de plusieurs problêmes intéressants. L' application des équations générales donne des équations très-simples pour cette espèce de rapport : j' en donnerai la déduction*.

11. Je donnerai aussi des *applications des formules générales à plusieurs problêmes*, ce qui fera voir cette *même généralité*, & l' avantage qui peut en dériver sur-tout pour l' Astronomie : mais avant je ferai voir plusieurs transformations des mêmes équations générales, & la manière d' en tirer d' autres bien différentes : il y aura la déduction de deux bien intéressantes, qui regardent le sujet, que je viens d' indiquer, qui se réduit au rapport des petits compléments (*) : je ferai des remarques sur la manière de faire la

(*) J' en ai fait usage déjà dans des Opuscules précédents, après en avoir donné une démonstration directe dans l' Opuscule III, quoique sous une forme un peu différente, dont je donne dans l' Opuscule précedent à celui-ci la réduction à celle, qu' on aura ici, en faisant voir, que toute la différence apparente se réduit à une dénomination différente.

re la dénomination en appliquant à propos les lettres aux côtés, & aux angles, en faisant voir, comment cette seule attention diminue le nombre des cas, qui au premier coup d'œil paroîtroient différents, quand ils sont réellement les mêmes: je ferai voir le danger de plusieurs erreurs, qu' on pourroit commetre en les employant sans précaution: j' examinerai les propriétés de certains triangles, qui ont des angles, ou des côtés très-petits, ou très-approchants de 180°: à la *fin* je ferai l' application des premières équations générales à plusieurs différents problêmes.

12. *C' est ici le plan de cet Opuscule, par lequel on voit combien il est intéressant*. Comme toute l' utilité consiste dans l' usage de ces équations, je les mettrai d' abord dans le paragraphe suivant sans démonstration, pour ceux, qui ne se soucient pas d' en suivre tout le procédé, ou qui après l' avoir vu une fois, aiment de voir d' un coup d' œil tout ce, qui sert pour la pratique. On y aura la dénomination, les combinaisons, les 4 équations générales, la manière de s' en servir pour la Trigonométrie plane, & les équations appartenantes au rapport entre les petits compléments. Le reste de l' ouvrage sera pour la plus grande partie une espèce de pièces justificatives, ou pour en faire voir l' utilité par les différentes applications. Dans chaque terme je mets la différence la première pour frapper mieux les yeux.

§. II.

Extrait de ce, qui intéresse la pratique.

DÉNOMINATIONS.

13. ON appellera le trois côtés, avec leurs angles opposés . . . . x, y, z, p, q, r
On dessinera leurs différences par la lettre . . . . d
L' expression de la valeur des angles sera celle des arcs du cercle au rayon $=1$, qui les mesurent. Celle des différences sera la même pour les arcs, & pour leurs sinus, qui se confondent sensiblement.

14. COMBINAISONS.

I. Les trois côtés avec un angle . . . . x, y, z, p
II. Deux côtés avec deux angles dont un intercepté x, y, p, r
III. Deux côtés avec deux angles opposés . . . . x, y, p, q
IV. Les trois angles avec un côté . . . . y, p, q, r

15. ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

I. . . $dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dp\sin.z\sin.q = 0$
II. . . $dx\sin.q - dy\cos.z\sin.p - dp\sin.z - dr\sin.x\cos.q = 0$
III. . . $dx\cot.x - dy\cot.y - dp\cot.\,p + dq\cot.q = 0$
IV. . . $dx\sin.r\sin.y - dp - dq\cos.z - dr\cos.y = 0$

16. APPLICATION À LA TRIGONOMÉTRIE PLANE

1. On substituera aux sinus des côtés les côtés mêmes :
2. On supprimera les co-sinus des côtés :
3. On mettra $\frac{dx}{x}$, $\frac{dy}{y}$ à la place de $dx\cot.x$, $dy\cot.y$:
4. On supprimera tout le premier terme de la quatrième, & on changera tous les signes des autres.

Ces règles suffiroient toutes seules ; mais si l'on veut les équations déjà réduites, les voici.

17. ÉQUATIONS POUR LA TRIGONOMÉTRIE PLANE

I. . . . . $dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dpz\sin.q = 0$
II. . . . . $dx\sin.q - dy\sin.p - dpz - drx\cos.q = 0$
III. . . . . . . $\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} - dp\cot.p + dq\cot.q = 0$
IV. . . . . $dp + dq + dr = 0$

18. DÉNOMINATION POUR LES SUPPLÉMENTS.

Les équations appartiennent aux triangles sphériques, qui ont deux côtés peu différents de 90°. Les côtés peu éloignés de 90° seront appellés $90° + dx$, $90° + dy$, les angles opposés $90° + dp$,

dp, $90° + dq$ (*) : le troisième côté, que nous appellerons base, sera z : il pourra être d' une grandeur quelconque, mais à condition, que son angle opposé ne soit ni trop petit, ni trop peu différent de 180°. Il aura pour mesure la même base, c' est-à-dire $z = r$.

19. COMBINAISONS, ET ÉQUATIONS.

I. Les deux côtés avec un angle ... $dx - dy\cos.z - dp\sin.z = 0$
II. Les deux angles avec un côté ... $dp + dq\cos.z - dx\sin.z = 0$

20. Si dans un *triangle relativement aux* équations du num. 15, *un*, *ou deux termes sont constants* ; on fera la différence, qui lui *répond* $= 0$: *l'équation se réduira* dans le premier cas à trois termes, en donnant une des trois autres différences quelconques dépendamment des deux autres, & dans le second à deux, en donnant l' une des deux dépendamment de l'autre. Par rapport aux équations du num. 19 si l' un de quatre termes y, z, q, r est exactement de 90°; on fera son complément $= 0$, & l' équation se réduira à deux termes. Par-là on aura tous les différents cas, qui sont en très-grand nombre, renfermés dans les premières quatre équations, & dans ces deux dernières.

§. III.

Procédé pour avoir les deux premières des quatre équations générales du num. 15.

21. LE triangle ABC (Tab.X fig.1) soit changé en ABC' par un petit allongement du côté BC, en A'BC' par un autre du côté BA,

 & en

(*) Cette expression fait positive la-différence au 90°, quand l' arc, ou l' angle en est plus grand, & dans les Opuscules précédents je l' avois considéré positive, quand il en est plus petit, comme ordinairement on appelle complément ce qui manque à 90° : mais les équations reviennent les mêmes dans toutes les deux manières de concevoir positives ces différences ; parceque cela ne fait que changer le signe de chaque différence, & comme il y en a une dans chaque terme de l' équation, & une seule, cela ne fait que changer tous les signes de tous les termes, & on sait qu' en changeant tous les signes l' équation reste, comme auparavant.

& en A''BC' par une petite augmentation de l'angle ABC. Que l'on conçoive avec le pôle A l'arc C'D, qui donnera le petit arc CD excès de l'arc AC' sur AC; avec le pôle C' l'arc A'IE, qui donnera les arcs AE, A''I excès de C'A' sur C'A, & de C'A'' sur C'A'; avec le pôle B l'arc A'A'': l'angle BC'F soit égal à BCA, la rencontre des arcs CA, C'F étant en F.

22. Si l'on fait AC $= x$, BC $= y$; on aura AB $= z$, ABC $= p$, BAC $= q$, ACB $= r$, CC' $= dy$, AA' $= dz$, A'BA'' $= dp$, C'A'' $-$ CA $=$ CD $+$ AE $+$ A''I $= dx$. En considérant les petits arcs comme des *lignes droites*, on a CD $=$ CC' $\times$ *cos.*C'CD $=$ CC' $\times$ *cos.*ACB $=$ *dycos.r*; AE $=$ AA' $\times$ *cos.*A'AE $=$ A'A $\times$ *cos.*BAC' $=$ *dzcos.q* (*on prend ici cos.BAC pour le cos.BAC', qui en diffère très-peu*): A''I $=$ A'A'' $\times$ *cos.*A'A''I. Or A'A'' est la mesure de l'angle A'BA'' dans un cercle, qui a pour rayon le sinus de BA', pour lequel on peut prendre *sin.*BA $=$ *sin.z*: ainsi on a A'A'' $=$ *dpsin.z*; & en considérant l'angle BA''A' comme droit, l'angle A'A''I sera le complément de l'angle BA''C', pour lequel on peut prendre BAC $= q$: ainsi le co-sinus de celui-là est le sinus de celui-ci, & on aura A''I $=$ *dpsin.zsin.q*. Donc on aura $dx = dy\cos.r + dz\cos.q + dp\sin.z\sin.q$, & $dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dp\sin.z\sin.q = 0$, qui est l'équation pour la première combinaison x, y, z, p.

23. Si l'on fait AB $= x$, BC $= y$; on aura AC $= z$, ACB $= p$, BAC $= q$, ABC $= r$, AA' $= dx$, CC' $= dy$, A'BA'' $= dr$. L'angle AC'F sera le défaut de l'angle AC'B par rapport à l'angle ACB $=$ FC'B: l'angle A'C'A sera l'excès de l'angle A'C'B sur l'angle AC'B: l'angle A'C'A'' sera le défaut de l'angle A''C'B par rapport à l'angle A'C'B. Ainsi on aura A''C'B $-$ ACB $= -$ AC'F $+$ AC'A' $-$ A'C'A'' $= dp$.

24. Or dans le triangle CFC' l'angle C'CF étant le supplément de BCA $=$ CC'F, leurs sinus seront égaux: ainsi les sinus des côtés FC', FC seront égaux, & pour cela ces deux arcs ne pouvant être égaux, si l'angle en C n'est *droit*, ils seront, l'un le supplément de l'autre: & comme il ne peuvent pas différer entr' eux, que par une différence moindre, que le petit

arc

arc CC', ils pourront être pris pour des quarts de cercles : ils seroient exactement tels, si les angles BCF, BC'F étoient des angles droits : pour cela on pourra prendre AF pour complément de AC. Or on a les proportions suivantes, *sin.*AC $=$ *sin.z* : *sin.*AC'C, que l'on peut prendre pour *sin.*ACB $=$ *sin.p* :: *sin.*CC' : *sin.*CAC', c'est-à-dire à cause de leur petitesse :: CC' $=$ *dy* : CAC' $= \frac{dy\,sin.p}{sin.z}$, & *sin.*C'F $=$ 1 : *sin.*AF $=$ *cos.*AC $=$ *cos.z* :: *sin.*C'AF $=$ *sin.*C'AC : *sin.*AC'F :: CAC' $= \frac{dy\,sin.p}{sin.z}$: AC'F $= \frac{dy\,sin.p\,cos.z}{sin.z}$.

25. *De même* *sin.*AC', que l'on peut prendre pour *sin.*AC $=$ *sin.z* : *sin.*AA'C' $=$ *sin.*BA'C', que l'on peut prendre pour *sin.*BAC $=$ *sin.q* :: *sin.*AA' : *sin.*AC'A' :: AA' $=$ *dx* : AC'A' $= \frac{dx\,sin.q}{sin.z}$, & *sin.*A'C' $=$ *sin.z* : *sin.*A'A''C' $=$ *cos.*BA''C' $=$ *cos.q* :: *sin.*A'A'', pris pour un petit arc du grand cercle, qui étant très-petit se confond sensiblement avec l'arc du cercle décrit du pôle B $=$ A'BA'' $\times$ *sin.*A'B $=$ *drsin.x* : *sin.*A'C'A'' :: A'A'' : A'C'A'' $= \frac{dr\,sin.x\,cos.q}{sin.z}$.

Donc on a $dp = -\frac{dy\,sin.p\,cos.z}{sin.z} + \frac{dx\,sin.q}{sin.z} - \frac{dr\,sin.x\,cos.q}{sin.z}$. En multipliant par *sin.z*, & transposant on en tire $dx\,sin.q - dy\,sin.p\,cos.z - dp\,sin.z - dr\,sin.x\,cos.q = 0$, qui est l'équation pour la seconde combinaison x, y, p, r.

§. IV.

Procédé pour les deux dernières.

26. POUR la troisième équation nous employerons la très-connue propriété des arcs, & angles, que la co-tangente est égale au cô-sinus divisé par le sinus, & la proportion des sinus des angles aux sinus des côtés opposés : nous nous servirons encore de deux théorèmes très-connus aussi du calcul différentiel, que pourtant nous démontrerons pour faire que la première démonstration des équations générales puisse être employée ici même pour ceux, qui ne

sont

sont pas initiés dans le calcul différentiel. 1°. *La différence du produit de deux quantités variables est la somme des deux produits de la différence de chacun par l'autre.* 2°. *La différence du sinus d'un arc est la différence de l'arc multipliée par son co-sinus.*

27. On voit aisément le premier par le procédé ordinaire: $(x+dx)\times(y+dy)$ donne $xy+xdy+ydx+dxdy$. Ôtant xy, que l'on avoit auparavant, & dans le reste, qui est la différence, négligeant $dxdy$, quantité d'ordre inférieur à celui des deux précédentes, on a pour différence $xdy+ydx$. Pour le second, si *Bb* (fig. 2) est la différence de l'arc AB, & que l'on conçoive les sinus BE, *be* perpendiculares au diamètre ACG avec le rayon CB, & la droite BF parallèle à EC, qui détermine *Fb* différence du sinus; on pourra considérer l'angle CB*b* comme droit = EBF: en ôtant le commun CBF, les angles CBE, *b*BF seront égaux, & par-là les triangles rectangles CEB, *b*FB seront semblables: ainsi on aura la proportion suivante CB $=1:\text{CE}=cos.\text{AB}::\text{B}b:b\text{F}=\text{B}b\times cos.\text{AB}$.

28. Or par la proportion des sinus des angles, & des côtés opposés on a la proportion suivante $sin.x : sin.y :: sin.p : sin.q$, & par-là $sin.x sin.q = sin.y sin.p$. En prenant les différences on aura $dx cos.x sin.q + dq cos.q sin.x = dy cos.y sin.p + dp cos.p sin.y$. En divisant le premier membre par $sin.x sin.q$, & le second par son égal $sin.y sin.p$, on aura $\frac{dx cos.x}{sin.x}+\frac{dq cos.q}{sin.q}=\frac{dy cos.y}{sin.y}+\frac{dp cos.p}{sin.p}$, c'est-à-dire $dx cot.x + dq cot.q = dy cot.y + dp cot.p$; ou $dx cot.x - dy cot.y - dp cot.p + dq cot.q = 0$. C'est l'équation pour la troisième combinaison x, y, p, q.

29. Pour la quatrième j'employerai la substitution des suppléments des angles aux côtés, & ceux des côtés aux angles dans la première: ainsi à la place des trois côtés avec un angle, on aura trois angles, & un côté. Le sinus, & co-sinus sont communs aux suppléments par rapport à leur grandeur: les sinus restent avec le même signe, les co-sinus le changent. Les différences sont aussi les mêmes, mais avec le signe contraire, puisque l'augmentation d'un des deux suppléments est la diminution de l'autre.

Ou

On mettra p, q, r, x, y, z à la place de x, y, z, p, q, r, & on changera le signe au premier, & dernier terme, qui ont la seule différence sans aucun co-sinus, on le retiendra au second, & troisième, qui ont le co-sinus. Ainsi on aura $-dp - dq\cos.z - dr\cos.y + dx\sin.r\sin.y = 0$, ou $dx\sin.r\sin.y - dp - dq\cos.z - dr\cos.y = 0$. C' est l' équation pour la quatrième combinaison x, p, q, r.

§. V.

Notices nécessaires pour trouver les deux premières équations par l' autre méthode.

30. L' autre méthode, qui paroît plus directe, & qui se présente la première à l' esprit, est analogue à celle, que j' ai employé pour la troisième : mais pour pouvoir l' employer il faut supposer deux autres formules de la Trigonométrie sphérique pour les différentier. On les trouve dans plusieurs éléments, comme dans ceux de l' Abbé de la Caille; on les a aussi dans l' Astronomie de M. de La-Lande. Dans un triangle sphérique ABC (fig. 1) on aura $\cos.A = \frac{\cos.BC - \cos.AB \times \cos.AC}{\sin.AB \times \sin.AC}$, & $\cot.A = \frac{\cot.BC \times \sin.AB}{\sin.B} - \cos.AB \times \cot.B$.

31. Il faut ajouter aussi un théorème plus général appartenant au calcul différentiel, c' est-à-dire, que la différence d' un produit d' un nombre quelconque de quantités variables est la somme de tous les produits de la différence de chacun d' eux par le produit de tous les autres : on aura besoin aussi de deux autres formules différentielles relatives aux arcs, qui avec celle, que nous avons déjà employée, seront les trois suivantes : que l' on nomme u un arc : on aura I. $d\sin.u = du\cos.u$: II. $d\cos.u = -du\sin.u$: III. $d\cot.u = -\frac{du}{\sin^2.u}$.

§. VI.

§. VI.

Première équation trouvée par la seconde méthode.

32. Si l' on fait (fig. 1) BC $= x$, AB $= y$; on aura AC $= z$, A $= p$, C $= q$, B $= r$, & (num. 30) $cos.p = \frac{cos.x - cos.y cos.z}{sin.y sin.z}$, d' où l' on tire $sin.y sin.z cos.p = cos.x - cos.y cos.z$. En prenant les différences, on trouvera $dy cos.y sin.z cos.p + dz cos.z sin.y cos.p - dp sin.p sin.y sin.z = - dx sin.x + dy sin.y cos.z + dz sin.z cos.y$: c' est-à-dire $dx + dy \times \frac{cos.y sin.z cos.p - sin.y cos.z}{sin.x} + dz \times \frac{cos.z sin.y cos.p - sin.z cos.y}{sin.x} - dp \times \frac{sin.p sin.y sin.z}{sin.x} = 0$. Les trois coefficients des dy, dz, dp se sont présentés sous une forme bien compliquée; mais on les réduira à la simplicité de ceux de l' autre méthode de la manière suivante.

33. Si l' on fait (fig. 1) AC $= x$, AB $= y$, on aura BC $= z$, B $= p$, C $= q$, A $= r$, & (num. 30) $cot.r = \frac{cot.z sin.y}{sin.p} - cos.y cot.p$. En mettant $\frac{cos.r}{sin.r}$ pour $cot.r$, & en multipliant par $sin.r$, on aura $cos.r = \frac{cot.z sin.y sin.r}{sin.p} - cos.y cot.p sin.r$. Dans la première partie de cette valeur de $cos.r$ on peut mettre $\frac{sin.z}{sin.x}$ pour $\frac{sin.r}{sin.p}$ à cause de la proportion des sinus des angles & des côtés opposés, & après cette substitution $cos.z$ pour $cot.z sin.z$ à cause de $cot.z = \frac{cos.z}{sin.z}$: elle deviendra $\frac{cos.z sin.y}{sin.x}$. Dans la seconde on peut mettre $\frac{cos.p}{sin.p}$ pour $cot.p$, & après cette substitution $\frac{sin.z}{sin.x}$ pour $\frac{sin.r}{sin.p}$ elle deviendra $- \frac{cos.y cos.p sin.z}{sin.x}$. Ces deux parties sont les mêmes, que la seconde, & la première du coefficient

de

de dy avec le seul changement des signes. Donc ce coefficient, qui paroissoit si compliqué, se réduit au simple $-\cos.r$.

34. On pourroit réduire de la même manière le coefficient de dz; mais on s' épargnera cette peine, en considérant que si dans celui de dy on met y pour z, & z pour y, celui-ci se change en celui de dz, & que ces deux côtés comprenant l'angle p, entrent de la même manière dans la détermination de la formule: ainsi le même procédé en changeant la dénomination, donnera q opposé à y à la place de r opposé à z dans le résultat de la valeur de ce coefficient, qui deviendra $-\cos.q$. On le voit aussi au premier coup d'œil: y, & z entrent de la même manière dans la combinaison des deux côtés des deux angles, dont un intercepté: ainsi ils doivent entrer de la même manière dans la formule avec leurs angles opposés q, r: comme il y a un terme $-dy\cos.r$, il doit y avoir un autre $-dz\cos.q$.

35. Dans le troisième coefficient $\frac{\sin.p\sin.y\sin.z}{\sin.x}$ il suffit de mettre $\sin.q$ pour $\frac{\sin.p\sin.y}{\sin.x}$ à cause de la proportion des sinus, qui donne $\frac{\sin.q}{\sin.y} = \frac{\sin.p}{\sin.x}$. Ainsi on aura la première équation, comme ci-devant (num.22) $dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dp\sin.z\sin.q = 0$.

§. VII.

Seconde équation trouvée par la seconde méthode.

36. Si l' on fait comme au commencement du §. précédent $BC = x$, $AB = y$, $AC = z$, $A = p$, $C = q$, $B = r$; on aura (num. 30) $\cot.p = \frac{\cot.x\sin.y}{\sin.r} - \cos.y\cot.r = 0$: en multipliant par $\sin.r$, & en mettant après $\cos.r$ pour $\sin.r\cot.r$, on aura $\cot.p\sin.r = \cot.x\sin.y - \cos.y\cos.r$. En différentiant on obtiendra $-\frac{dp\sin.r}{\sin^2.p} + dr\cos.r\cot.p = -\frac{dx\sin.y}{\sin^2.x} + dy\cos.y\cot.x + dy\sin.y\cos.r + dr\sin.r\cos.y$. En transposant, en multipliant

par $\frac{sin^2.x}{sin.y}$ pour délivrer dx, en mettant après $sin.xcos.x$ pour $sin^2.xcot.x$, & réunissant les termes, qui ont les mêmes différences, on aura $dx - dy \times (\frac{sin.xcos.xcos.y}{sin.y} + sin^2.xcos.r) - dp \times \frac{sin^2.xsin.r}{sin.ysin^2.p} + dr \times \frac{sin^2.xcos.rcot.p - sin^2.xsin.rcos.y}{sin.y} = 0.$ On simplifiera ces coefficients si composés de la manière suivante.

37. Pour le premier on fera AB $= x$, AC $= y$, ce qui donne BC $= z$, C $= p$, B $= q$, A $= r$. Alors on aura (num. 30) $cos.r = \frac{cos.z - cos.xcos.y}{sin.xsin.y}$, d'où l'on tire $cos.z = cos.xcos.y + cos.rsin.xsin.y$. En multipliant le premier membre par $\frac{sin.p}{sin.q}$, & le second par son égal $\frac{sin.x}{sin.y}$, on aura $\frac{cos.zsin.p}{sin.q} = \frac{sin.xcos.xcos.y}{sin.y} + sin^2.xcos.r$. Ce second membre est le même que le coefficient de dy, qui par-là se trouve réduit à $\frac{cos.zsin.p}{sin.q}$.

38. Pour la réduction du second coefficient, qui étoit $\frac{sin^2.xsin.r}{sin.ysin^2.p}$; on mettra $\frac{sin.y}{sin.q} \times \frac{sin.z}{sin.r}$, pour $\frac{sin^2.x}{sin^2.p}$, puisque chacune de ces deux fractions est $= \frac{sin.x}{sin.p}$, & on aura l'expression simple $\frac{sin.z}{sin.q}$.

39. Pour la réduction du dernier on fera AB $= x$, BC $= y$, ce qui donnera AC $= z$, C $= p$, A $= q$, B $= r$. On peut substituer dans la première formule du num. 30 les sinus, & co-sinus des angles à ceux des côtés, & viceversa en changeant seulement les signes des co-sinus; on y aura $- cos.BC = \frac{- cos.A - cos.C \times cos.B}{sin.C \times sin.B}$, d'où l'on tire $cos.BC \times sin.C \times sin.B = cos.A + cos.C \times cos.B$, c'est-à-dire $cos.ysin.psin.r = cos.q + cos.pcos.r$. En transposant le dernier terme, & multipliant tous les termes par $\frac{sin.x}{sin.q}$, on aura $\frac{sin.xcos.ysin.psin.r - sin.xcos.pcos.r}{sin.q} = \frac{sin.xcos.q}{sin.q}$.

Si

Si dans le second terme du premier numérateur on met $cot.p sin.p$ pour $cos.p$, on aura dans tous les deux $\frac{sin.p}{sin.q}$, pour laquelle valeur on pourra mettre $\frac{sin.x}{sin.y}$: alors le premier membre deviendra $\frac{sin^2.x cos.y sin.r - sin^2.x cot.p cos.r}{sin.y}$. C' est la même expression, que le dernier coefficient avec les signes contraires, & la transposition des deux termes du numérateur. Donc ce coefficient sera $= -\frac{sin.x cos.q}{sin.q}$.

40. On a dans tous les coefficients le diviseur commun $sin.q$, par lequel si l' on multiplie le premier terme dx de l' équation, on aura $dx sin.q - dy cos.z sin.p - dp sin.z - dr sin.x cos.q = 0$, comme au num. 25. Tout ce long détour après l' autre méthode de Géométrie linéaire ne sert, que pour ceux, qui ont le plaisir de calculer. Il auroit été bien difficile de deviner, que les expressions compliquées, qu' on a d' abord eu, pouvoient être réduites à cette simplicité, si l' on n' avoit trouvé avant par d' autres méthodes les valeurs simples équivalentes. Voyant le bout, auquel on doit arriver, on se fraye plus aisément le chemin, même par des broussailles. Si l' on veut faire usage de cette théorie *dans les éléments, auxquels réellement elle doit appartenir; on fera bien de supprimer ces deux derniers paragraphes.*

§. VIII.

Application des équations trouvées à la Trigonométrie plane.

41. ON peut appliquer les équations trouvées à la Trigonométrie plane par la méthode indiquée au num. 9. En faisant aller le rayon de la sphère à l' infini, les côtés restant finis, ceux-ci deviennent rectilignes, & se confondent avec les sinus, & les tangentes: la raison des arcs au cercle entier s' évanouit, les co-sinus devenant égaux au rayon $= 1$, les co-tangentes vont à l' infini, mais si l' on met $\frac{1}{tan.}$ pour $cot.$, on divisera par le côté le terme, qui

qui avoit sa co-tangente : on mettra les côtés pour leurs sinus, en supprimant leurs co-sinus, & on retiendra les sinus, co-sinus, co-tangentes des angles.

42. Mais il faut faire attention à l'unité, qui a été prise pour rayon tant par rapport aux côtés, que par rapport aux angles. Tant que le rayon de la sphère est fini, on doit se servir de la même unité pour toutes les deux espèces, pour appliquer à toutes les deux les nombres de la même table des sinus : *mais quand celui-là est allé à l'infini, il faut avoir une autre unité pour les angles, qui soit celle des tables. Si l'on en avoit employé deux dans la dérivation des formules; on verroit l'homogénéité dans tous les termes de chaque équation tant par rapport aux côtés, que par rapport aux angles*, c'est-à-dire les mêmes nombres des dimensions dans chaque espèce. La différence, qui s'y trouve, vient de la valeur du rayon $= 1$ supprimée. On doit la sous-entendre comme un diviseur dans chaque terme, qui se trouve avec plus de dimensions, que les autres.

43. En considérant les équations mêmes (num. 15), dans la première il y a une seule valeur appartenante aux côtés dans chaque terme, $dx, dy, dz, sin.z$: une aussi pour chacun dans la seconde après qu'on aura supprimé le $cot.z = 1$, c'est-à-dire $dx, dy, sin.z, sin.x$: dans la troisième après avoir divisé par $tan.x$ le premier terme, & par $tan.y$ le second, à la place de $cot.x$, & $cot.y$, il y en aura un dans le numérateur, & un autre dans le dénominateur, qui détruira sa dimension, & dans les deux derniers on a le zero de dimensions, n'y ayant aucune valeur appartenante aux côtés. Dans la dernière il n'y a aucune valeur de cette espèce dans le second, & il n'y en aura aucune dans les deux dernières après la suppression des $cos.z, cos.y$. Il y a seulement dx dans le premier. Pour cela il faut concevoir celui-là seul divisé par l'unité des côtés, qui étant devenue infinie le fera évanouir.

44. Il faut pour cela supprimer ce terme seul : dans les autres il faudra mettre les côtés pour les sinus, diviser par le côté les termes, qui étoient multipliés par la co-tangente, & supprimer

tous

tous les co-sinus des côtés, laissant sans aucun changement tout ce qui appartient aux angles. Ces sont les règles, que nous avons donné au num. 16, & d'où nous avons tiré les équations réduites du num. 19.

§. IX.

Danger dans certains cas.

45. Nous avons parlé de cet objet au num. 10. Quand les côtés, & les angles sont suffisamment éloignés de zero, de 90°, de 180°; les sinus, les co-sinus, les co-tangentes ne peuvent pas donner des coefficients trop petits, & il n'y a rien à craindre, si les différences, dont on cherche le rapport, sont beaucoup plus petites, que la distance, que les côtés, & les angles ont de ces trois valeurs : mais dans le grand voisinage de ces mêmes valeurs on peut faire de grandes fautes, si l'on n'y prend bien garde. Voici des exemples.

46. Si dans le triangle (*fig.* 3) ABC le côté CA est très-petit, & le côté BC avec l'angle ABC restant sans changement, le côté BA étoit augmenté d'une quantité AA', qui ne fût pas petite par rapport au même côté CA; on feroit des grosses fautes en cherchant à l'aide des équations, que nous avons trouvées, le rapport des différences des côtés BA, CA, & des angles en A, & en C.

47. Pour comparer les différences des côtés BA, CA, on fera CA $= x$, BA $= y$, ce qui laissera BC $= z$, ABC $= p$, BAC $= r$. On aura dp, & $dz = 0$, ce qui réduira la première équation à $dx = dy\cos.r$. L'arc A'E ayant pour pôle le point C coupera AE $= dx$, AA' étant $= dy$. Celle-ci devra être à celle-là comme le rayon $= 1$ au co-sinus de l'angle BAC $= r$. Cette raison sera sensiblement juste, tandis que l'angle BAC étant assez éloigné de 90°, le côté AC sera assez grand par rapport à la différence AA'; mais s'il arrive, qu'une de ces deux choses soit contraire, c'est-à-dire, ou que le côté AC soit trop petit, ou que l'angle BAC soit trop peu éloigné de 90°; la raison, que nous avons tirée, sera fautive, & la faute pourra s'

aug-

augmenter à l' infini. Pour le voir, que l'on conçoive l'arc A'O d' un grand cercle perpendiculaire au côté CA : en considérant le triangle AOA' comme rectiligne, on auroit AO = AA' × *cos*.A'AO = AA' × *cos*.BAC = *dycos.r* : si l' on considère ce triangle, comme sphérique, comme il est réellement, on aura *tan*.AO = *tan*.A'A × *cos*.A'AO = *tan.dycos.r*, ce qui revient au même, si l' on prend les petits arcs AO, AA' pour leurs tangentes, & il n' y aura rien à craindre de ce côté-là.

48. *Mais l'arc CA n' étant pas assez grand par rapport à la différence A'A, premiérement l' angle ACA' ne sera plus une petite différence de l' angle BCA, comme nous l' avions supposé, pour trouver nos équations : son sinus sera au sinus de l' angle* CAA' = *sin*.CAB, comme AA' à CA', laquelle raison diminuira à l' infini, si le point A' s' approche à l' infini du point A ; mais elle s' augmentera à l' infini, si le point C s' approche à l' infini du point A. Si l' on laisse à sa place le point A', & qu' on change la longueur du côté AC ; le point O restera à sa place, & le petit arc AO sera toujours = *dycos.r* ; mais le point E se changera. L' arc AC *étant* bien grand il s' approchera du point O, de manière, que le petit arc OE s' évanouira, quand l' arc AC sera un quart de cercle, l' arc A'E devenant alors un arc du grand cercle, & tombant sur l' arc A'O. En diminuant l' arc AC, on éloignera le point E de O ; mais le petit arc OE sera toujours d' un ordre inférieur à la différence AE = *dx*, tandis que AA' restera d' un ordre inférieur par rapport au côté AC : mais le point C s' approchant trop du point A, cet arc aura un rapport fini à la même différence, parceque l' arc AE s' approchera de l' égalité avec l' arc AA' de manière, que le point C tombant en A, deviendra égal au même arc. L' erreur commise en le négligeant sera d' autant plus grande, que l' angle BAC = *r* sera plus proche de 90°, le point O s' approchant du point A de manière, qu' à la fin tombera sur lui-même, quand l' angle BAC deviendra droit.

49. Dans le cas, où cet angle est droit, l' expression tirée de la formule sera fautive, même en augmentant le côté AC ; par-

ce-

teque AO sera toujours $= o$, & AE sera toujours quelque quantité déterminée, jusqu' à ce que le côté AC n' arrive à être un quart de cercle, dans lequel cas seul l' arc A'E devient un arc du grand cercle, & se confond avec A'O. La distance OE, qu' on a négligée sera bien d' un ordre inférieur par rapport à la différence $AA' = dy$; mais sera infiniment plus grande, que la valeur $dycos.r$, qui alors devient exactement $= o$. On tombera toujours dans des inconvénients de la même espèce, quand en employant ces équations, on aura des *côtés*, & des angles de la valeur $o, 90°, 180°$, *si l' on veut employer cette espèce d' équations pour déterminer le rapport des différences des côtés, & des angles, qui s' évanouissent eux-mêmes*, ou qui deviennent trop petits. On en trouvera aussi, quand *les* angles, & *les* côtés, dont on compare les différences, restent assez grands; si tout ce, qui devroit faire la détermination, s' évanouit. Voici un exemple, qui pourtant nous frayera le chemin pour comparer entr' eux les petits compléments, même dans le cas, dans lequel il y a des *côtés*, & des angles approchants de $90°$.

50. Si l' on fait (fig. 1) $AC = x$, $BC = y$, on aura $AB = z$, $B = p$, $A = q$, $C = r$. Le triangle ABC allant en A'BC', l' angle p constant donne $dp = o$, & dans la première équation (num. 15) on aura $dx - dycos.r - dzcos.q = o$. Si les côtés AB, BC *sont* $= 90°$; B *sera le pôle du cercle* AC, & *les* angles A, & $C = 90°$, $cos.r = o$, $cos.q = o$, ce qui donne aussi $dx = o$. Cela feroit croire, que l' arc A'C' soit égal à l' arc AC: pourtant généralement il ne l' est pas, comme on le peut voir aisément, si l' on fait revenir A' en A. Si l' arc AC est aussi un quart de cercle, A sera le pôle de l' arc BC, & pour cela AC' aussi un quart de cercle, & $dx = o$, le point D allant en C: mais si AC est plus grand, ou plus petit, qu' un quart de cercle; *l' arc* C'D tiré du pôle A ne *pourra pas être confondu avec l' arc* C'B, *celui-ci étant* un arc du grand cercle, & *l' autre ne l' étant pas*. L' arc C'D *continué rencontreroit l' arc* C'C dans un autre point c à une distance $Cc = CC'$, puisque le triangle C'Ac seroit isoscèle, & l' arc AC perpendiculaire à sa base

C'c

C'c la couperoit par le milieu en C. Il y auroit toujours un petit arc CD, qui seroit la valeur de dx.

51. On feroit une faute plus grossière, si ayant faite $dx = o$, on revenoit sur ses pas en disant, donc $dycos.r - dzcos.q = o$, & puisqu' on a $r = q$, on aura $cos.r = cos.q$, & par-là $dy = - dz$, c'est-à-dire l'arc AA' égal à CC', & de direction contraire, tandis qu'ils peuvent avoir entr' eux un rapport quelconque, & avoir les directions conformes, ou contraires, comme on veut. La valeur dx *n' est pas* $= o$, *& on a* $dycos.r - dzcos.q = o$, non parceque dy *est* $= - dz$, *mais parceque* $cos.r$, & $cos.q$ sont $= o$. Ce cas contient des *quantités, qu' on ne peut pas négliger par rapport à des termes, qui deviennent* $= o$ eux-mêmes.

52. Mais tandis que l' on feroit une faute grossière en tirant les deux conséquences de $dx = o$, $dy = - dz$; on peut en tirer une autre très-vraie, c' est-à-dire, que si dx n' est pas zero, elle est une quantité d' un ordre inférieur: parceque nous sommes arrivés à nos équations en ne négligeant, que des quantités d' un ordre inférieur; si l' on complétoit l' équation en y ajoutant les termes, qui appartiennent à ces quantités; les valeurs dp, $cos.r$, $cos.q$ seroient toujours $= o$, & dx ne resteroit égale, qu' à des termes d' ordre inférieur: la somme de ceux-ci pourroit bien être $= o$, les positifs étant détruits par les négatifs; mais elle ne pourroit jamais s' élever à un ordre supérieur, n' y ayant aucun coefficient, qui allant à l' infini, en élève quelqu' un à un ordre supérieur. On pourroit bien trouver les suites composées de termes d' ordres inférieurs, qui donneroient la valeur de cette différence, & plus aisément on trouveroit les termes seuls du second ordre, qui la composent; mais cela ne nous est pas utile ici. C' est assez, que nous y avons reconnu, que dx dans ce cas-là est d' un ordre inférieur.

53. Il s' ensuit, qu' en méprisant les quantités d'un ordre inférieur, A'C' restera toujours la mesure de l' angle opposé A'BC'. Ainsi on aura ce théorème. *Dans un triangle* A'BC', *dans lequel on a deux côtés peu différents de deux quarts de cercle; on*

on peut prendre le troisième côté pour mesure de l' angle opposé. Si l' angle est changé, soit que les côtés restent constants, soit qu' on les change aussi un peu; on pourra prendre le changement du troisième côté comme égal au changement de l' angle opposé. On peut tirer cela aussi immédiatement de la première équation. On y a $cos.r = 0$, $cos.q = 0$, $sin.r = 1$, $sin.q = 1$: il n'y reste, que $dx - dp = 0$, c' est-à-dire $dx = dp$.

54. Pour cela dans un pareil triangle ayant la différence d' un des deux côtés *égaux au quart du cercle*, qu' on varie celle du troisième *côté*, & celle de l' angle opposé, on ne pourra trouver *par le* moyen de nos équations la différence d' aucune des trois autres. Ayant celle du troisième côté, & celle de l' angle opposé, on n' a rien de plus, que si l' on en avoit une seule. Le côté opposé sera AC $= x$, l' angle opposé $= p$, celui des deux côtés $= 90°$, dont on a la différence, sera y: en cherchant dz dans la première équation, on y tombera sur le terme $dzcos.q$, en cherchant dr dans la seconde on y aura $drsin.xcos.q$, en cherchant dq dans la troisième on y rencontrera $dqcot.q$: la valeur $cos.q$, $cot.q$ devenant $= 0$, on se trouvera toujours frustré dans sa recherche: il verra s' évanouir le terme, qui contient la différence, qu' on devoit déterminer. Dans cette espèce de triangles, si on appelle *simplement côtés les deux côtés égaux à 90°, & base le troisième*, on ne pourra déterminer la différence d' un des deux côtés, ou d' un des deux angles à la base, que par deux autres de ces quatre différences, & la détermination sera la même, soit que la base avec son angle opposé reste la même, ou qu' il y ait là aussi quelque changement grand, ou petit, comme on veut. Ces différences alors sont des petits compléments des côtés, & des angles à la base, qui ont ces quatre termes peu différents de 90°, ou un exactement tel, & les trois autres peu différents. Nous développerons dans le paragraphe suivant la liaison entre ces compléments: elle sera renfermée dans deux équations, qui sont celles du num. 19, & auront lieu, quand le troisième angle ne sera ni trop petit, ni trop peu différent de 180 degrés.

§. X.

Équations pour le rapport des petits compléments.

55. Nous donnerons ici le rapport, qu'ont entr' eux les petits compléments des deux cotés, & des deux angles d'un triangle, dans lequel la base soit considérablement plus grande, que les mêmes compléments, & ne soit pas trop peu différente de 180°. Nous considérons *les compléments positifs* (*), quand le côté, ou l' angle passe un peu *90 degrés*, & *négatifs quand il* y manque quelque chose, dans lequel sens on entend *communement le mot complément*, quoique *dans sa généralité il* exprime également l' excès, & le défaut par rapport à 90°. Nous appellerons x, & y les deux côtés, z la base : les angles opposés aux deux premiers seront p, & q, l'angle opposé à la base sera r, & on aura (num. 53) $r = z$.

56. Dans la seconde équation (num 15) on aura $sin.q$, & $sin.p = 1$, $cos.q = 0$: ainsi le dernier terme s' évanouira, & on aura $dx - dycos.z - dpsin.z = 0$, qui est la première équation du num. 19. La seconde dérive de cette première, en substituant les suppléments des angles aux côtés, & ceux des côtés aux angles. On devroit mettre $cos.r$, & $sin.r$ pour $cos.z$, & $sin.z$; mais comme on a $r = z$, on laissera z à sa place, & seulement on changera le signe de $cos.z$: on devroit changer aussi les signes des différences; mais comme il y en a une par terme, on peut le retenir. Alors on aura $dp + dqcos.z - dxsin.z = 0$, qui est la seconde du même num. 19.

57. A' l' aide de ces deux équations on trouvera toujours le complement, que l' on cherche, par deux quelconques des trois autres. Si l' on cherche celui d' un côté par celui de l' autre, & par celui d' un angle, on le trouvera dans la première équation en nommant p l' angle, dont on a le complément, & x le côté, dont on le cherche, s' il est opposé à cet angle, y, s' il ne

(*) On a parlé de cet objet dans la note au num. 18.

-il ne l' est pas. Si on le cherche dépendamment des deux compléments des angles, on le trouvera dans la seconde équation en le nommant x, & l' autre y. Au contraire si on cherche le complément d' un angle par ceux des deux côtés, on le trouvera dans la première, en appellant cet angle p, & si on le cherche par celui de l' autre angle, & d' un côté, on le trouvera dans la seconde, en appellant cet angle p, s' il est opposé au côté, dont on sait le complément, q, s' il est adjacent.

58. Il y a un autre rapport de tous les quatre compléments entr' eux, qui ne sera pas de grand usage, mais il mérite d' être placé ici par l' élégance de l' expression, qui est de la dernière simplicité; mais pour le trouver il faut supposer une expression du sinus d' un arc, qui diffère très-peu d' un quart de cercle. Soit (fig. 2) l' arc Ah peu différent d'un quart de cercle AH ou par excès, ou par défaut: si l' on conçoit hI perpendiculaire au diamètre HCK avec la corde Hh; CI sera égal au sinus ch, & HI sinus verse $= \frac{Hh^2}{HK} = \frac{1}{2}Hh^2$, le rayon étant $= 1$, & le diamètre $= 2$. Si on nomme dx la petite différence Hh; on aura $sin.(90° \pm dx) = 1 - \frac{1}{2}dx^2$. Or dans le triangle A'BC' (fig. 1) par la proportion des sinus, on aura la proportion suivante $sin.A'B = sin.(90° \pm dx) = 1 - \frac{1}{2}dx^2 : sin.BC' = 1 - \frac{1}{2}dy^2 :: sin.BC'A' = 1 - \frac{1}{2}dp^2 : sin.BA'C' = 1 - \frac{1}{2}dq^2$. En multipliant les extrêmes, & moyens, & négligeant les quatrièmes puissances, on aura $1 - \frac{1}{2}dx^2 - \frac{1}{2}dq^2 = 1 - \frac{1}{2}dy^2 - \frac{1}{2}dp^2$, d' où l' on tire $dx^2 + dq^2 = dy^2 + dp^2$.

59. Si l' un des côtés, ou des angles est exactement de $90°$; on fera son complément $= 0$: on trouvera alors un des trois compléments par un quelconque des deux autres; parceque l' équation, dans laquelle celui-là se trouve, sera réduite à deux seuls termes: mais il faut appeller x, & p le côté, & l' angle, dont on a le complément $= 0$, pour faire, que s' y trouve celui-là, & qu' il puisse s' évanouir. On pourra dans plusieurs de ces cas-là simplifier la formule. Si c' est un côté, qui est exactement $= 90°$, en l' appellant x, on aura $dx = 0$, & dans la

 pre-

première équation $dp\sin.z = - dy\cos.z$, c' eſt-à-dire $dy = - \frac{dp\sin.z}{\cos.z} = - dp\tan.z$, ou $dp = - \frac{dy}{\tan.z} = - dy\cot.z$: dans la ſeconde on aura $dp = - dq\cos.z$, ou $dq = - \frac{dp}{\cos.z}$. Si l' on a un angle $= 90^\circ$, en le nommant p, on aura $dp = o$ x & dans la première équation $dx = dy\cos.z$, $dy = \frac{dx}{\cos.z}$, dans la ſeconde $dx = \frac{dq\cos.z}{\sin.z} = dq\cot.z$, $dq = \frac{dx}{\cot.z} = dx\tan.z$. Ainſi on a tous les cas, & dans la moitié de ces cas on a ſimplifié les formules par l' introduction des $\tan.z$, $\cot.z$.

60. Nous avons dit (num. 18.), que pour pouvoir employer ces équations, il faut, que l' angle oppoſé à la baſe ne ſoit ni trop petit, ni trop approchant de 180°. Sans cette condition elles pourroient devenir très-fautives, comme on le verra dans les paragraphes ſuivants.

§. XI.

Des triangles qui ont un ſeul angle très-petit & chacun des deux autres aſſez éloigné de 180 degrés.

61. Nous parlerons ici des triangles, qui ont un ſeul angle très-petit ſans qu'aucun des deux autres ait ſon ſupplément très-petit. Tel eſt le triangle ABC de la fig. 3, dont nous avons déjà parlé au paragraphe IX. par rapport à nos premières équations générales. Nous appellerons baſe le côté oppoſé à cet angle, & les deux autres ſimplement côtés.

62. Dans un tel triangle la baſe ſera très-petite par rapport à l'un, & l' autre des deux côtés. Pour le voir, que l' on conçoive (fig. 4) le cercle d' un de ces côtés comme AB achevé, qui ſoit rencontré en A' & B' par la continuation de la baſe AC, & de l' autre côté BC, où on aura quatre demi-cercles ABA', AB'A', ACA', BCB'. Le ſinus de la baſe AC étant au ſinus du côté AB, comme le ſinus de l' angle ABC ſuppoſé très-petit au ſinus

nus de l'angle ACB, qui n'est ni petit, ni approchant de deux droits, & par conséquent n'a pas un petit sinus; la même base AC aura un sinus très-petit par rapport au sinus du même côté AB: ainsi cette base doit être ou beaucoup plus petite que lui, ou beaucoup plus approchante de deux droits. Dans ce second cas le côté BC en seroit plus petit, & par conséquent l'angle BAC, qui lui est opposé, seroit plus petit que l'angle ABC opposé à la même base AC, ce qui est contraire à la supposition d'un seul angle petit. Donc cette base doit être beaucoup plus petite que le côté BC; & comme on pouvoit prendre également l'un ou l'autre côté pour achever son cercle; on voit bien, que la base doit être bien petite par rapport à tous les deux côtés.

63. De-là il s'ensuit que les deux côtés ne peuvent avoir qu'une différence bien petite par rapport à eux-mêmes, parceque dans tout triangle la différence de deux côtés doit être plus petite que le troisième. Que l'on conçoive l'angle A'CF, égal à l'angle CAB, & par conséquent à l'angle CA'F: l'arc FA' sera égal à l'arc FC, & la somme des deux arcs AF, FC sera égale au demi-cercle AFA'. Comme la différence des deux côtés AF, FC du triangle AFC doit être aussi plus petite, que le troisième côté AC démontré très-petit, l'arc AF n'aura qu'une très-petite différence d'un quart de cercle, & BF pourra être pris pour complément du côté AB, & de même de l'autre BC, qui diffère très-peu du même AB. Il n'y aura pas, que le cas d'un voisinage des côtés AB, BC à un quart de cercle, dans lequel le complément de ces deux côtés pourra avoir une raison quelconque à l'arc BF, les quantités qu'on a négligé pour en tirer l'égalité ne pouvant pas alors être négligée par rapport aux compléments de ces côtés, & à l'arc BF.

64. L'angle BCF sera la différence de l'angle externe BCA' sur la base AC par rapport à son interne, & opposé BAC, qui étant égal à l'angle FA'C est égal à FCA'. Cette différence sera un excès de l'externe sur l'interne & opposé, ou un défaut, selon que le point F tombera sur l'arc AB, ou sur l'arc A'B comme dans le cas exprimé par la figure, c'est-à-dire selon que

les

les côtés BA, BC considérés comme égaux seront plus petits ou plus grands qu' un quart de cercle.

65. On aura aisément une expression simple de la valeur de cette différence par rapport à l'angle ABC, & au côté BC: parcequ' on aura la proportion suivante *sin.*FC : *sin.*BF = *cos.*BC :: *sin.*CBF = *sin.*ABC : *sin.*BCF, ou en prenant l' unité pour le sinus de l' arc FC = FA, qui diffère très-peu d' un quart de cercle, & la raison des angles ABC, BCF pour les angles mêmes; *on aura l'angle BCF = ABC × cos.BC.*

66. Cette expression fait voir que l' angle BCF doit être encore plus petit que *l'angle* ABC, & *que par conséquent on pouvoit bien substituer la raison des angles à celle des* sinus. Mais nous *en tirerons* encore un théorème, dont nous aurons besoin ici, qui a une grande utilité générale étant élémentaire, & appartient à tous les triangles sphériques indépendamment de la petitesse de l' angle B: c' est que l' angle externe est plus petit, que la somme des deux internes & opposés, & les trois internes pris ensemble plus grands que deux droits, tandis que dans les triangles rectilignes il y a l' *égalité tant* de l' angle externe par rapport aux deux internes & opposés, que des trois internes pris ensemble aux deux droits.

67. Pour le cas de la petitesse de l' angle B, qui nous a donné *cette expression*, on *fait* voir *aisément* la *vérité de* ce *théorème*. Si le point F tomboit sur l' arc AB; l' angle externe A'CB seroit plus petit que l' angle ACF, qui est égal à l' interne & opposé BAC; ainsi il seroit plus petit même d' un seul des deux internes & opposés. Si ce point tomboit en B; l' externe deviendroit égal à ce même interne, & opposé, & par conséquent il seroit plus petit, que les deux internes, & opposés pris ensemble; mais encore dans le cas exprimé par la figure, où le point F tombe sur l' arc BA', l' excès de l' angle ABC sur l' angle BCF fait, que l' angle externe A'CB, dont la partie A'CF est égale à l' interne BAC, & l' autre partie BCF est plus petite que l' autre interne ABC, soit plus petit, que ces deux pris ensemble, ce qui est la première partie de ce théorème: la seconde se tire aisément

de cette première, parceque ces deux internes avec le troisième BCA feront une somme plus grande que les deux ABC, BAC, qui pris ensemble sont égaux à deux droits.

68. Mais sans la supposition de la petitesse de l' angle B, & de la formule, que nous en avons tiré, il suffit de considérer la continuation de l' arc FC jusqu' à la rencontre en F' avec le demi-cercle AB'A'. Dans le cas, où le point F tombe sur l'arc AB, ou en B, la démonstration de l'excès de deux angles internes sur l'externe est la même. *Dans le cas exprimé par la figure*, où le point B *tombe sur l'arc AF*, *on aura la même démonstration*, *si on démontre*, *que toujours* l' angle BCF est plus petit que l' angle ABC: mais c' est très-aisé à démontrer. L'arc CF étant égal à l'arc AF, leurs suppléments CF', AF' seront égaux: ainsi l'arc F'B', qui est une partie de l'arc F'A', sera plus petit que l'arc CF', & par conséquent l'angle F'CB', qui est égal à l'angle BCF, sera plus petit, que l'angle F'B'C, qui est égal à l' angle ABC. Ainsi de-même l' angle externe A'CB composé des deux A'CF = BAC, & *BCF sera plus petit que les deux internes* BAC, ABC, & *les trois internes* BAC, ABC, ACB *feront* plus que les deux A'CB, ACB, qui sont *égaux à deux droits*. C' *est la démonstration de ce théorème élémentaire*, qui manque à ma *Trigonométrie sphérique*.

69. *La valeur de l' angle BCF* = ABC × *cos.*BC, que nous avons *trouvé pour* le cas, où l' angle, qui est au sommet B d' un triangle sphérique, soit petit, donne un autre théorème, c' est-à-dire, que la somme des deux angles BAC, BCA sur la base AC diffère peu de deux angles droits, comme nous y avons trouvé la même base petite par rapport aux côtés AB, BC; & petite la différence de ceux-ci par rapport à eux-mêmes. Comme l' angle BCF est la différence des deux angles A'CF, ACB aux deux droits, qui se forment sur le point C, & l' angle A'CF est égal à l' autre angle interne BAC, le même angle sera la différence de la somme de ces deux internes à deux droits, & par conséquent cette différence doit être petite.

70. Mais cette expression de cet angle en donne une autre

pour

pour l' excès de tous les trois internes sur les deux droits, qui sera d' une *utilité* bien plus grande. Elle nous fera voir d' abord, qu' au moins en négligeant des petites quantités, cet excès dans cette espèce de triangles sphériques donne *la mesure de leur aire*, qui est égale au produit de l' arc du grand cercle de la sphère, qui le mesure, & de son rayon, ce qui nous amenéra à reconnoître généralement exacte cette mesure pour tous les triangles sphériques à des angles quelconques, & on pourra l' exprimer en disant, que *l' aire d' un triangle sphérique quelconque est égal à l' excès de la somme de ces trois angles internes sur deux droits*.

71. On voit par tout ce que nous avons démontré, que l' excès de trois angles internes sur deux droits est la somme, ou la différence des deux angles ABC, BCF, selon que le point F tombe sur l'arc AB, ou sur l' A'B, c' est-à-dire selon que chacun des côtés AB, BC pas trop peu eloignés du quart de cercle est plus grand, ou plus petit qu' un quart de cercle. Ainsi la mesure de cette excès sera $ABC \pm ABC \times cos.BC = ABC \times (1 \pm cos.BC)$: or $1 \pm cos.BC$ est la valeur du sinus verse de l' arc BC, avec le signe plus, ou moins selon que cet arc est plus grand ou plus petit qu' un quart de cercle: ainsi l' expression pour cet excès sera $ABC \times sin.vers.BC$. Mais on tire aisément des découvertes d' Archimède, qu' en négligeant une quantité petite par rapport au total celle-là même est l' expression de l' aire du triangle ABC.

72. En prenant pour mesure d' un angle l' arc du grand cercle compris entre ces côtés, & le rayon de ce cercle pour unité, & en nommant a un angle droit, la circonférence du cercle sera $= 4a$, & l' aire du cercle, qui est le produit du rayon, & de la demi-circonférence, sera $= 2a$. Or par les découvertes d' Archimede la surface de la sphère est quadruple de l' aire de son grand cercle: donc elle sera $= 8a$. C' est la valeur de toute la surface produite par la révolution entière de toute la demi-circonférence BAB': par une autre de ces découvertes cette surface est à la surface du segment de la sphère produite par la révolution du

seul

seul arc BC, comme le diamètre de la sphère $= 2$ au sinus verse du même arc (*): ainsi la surface de ce segment sera $=$ $4a$*sin.vers.*BC. Mais si CE est l'arc du cercle de ce mouvement du point C, intercepté dans l'angle ABC; on voit bien que l'aire entière de la surface ainsi produite sera à sa partie EBC, comme quatre angles droits $= 4a$, qui répondent à la révolution entière, sont à l'angle ABC : ainsi l'expression de cette aire *sera* ABC $\times$ *sin.vers.*BC, la même que celle de l'excès des trois angles *de ce triangle sur deux droits*. Comme la différence AE des deux *côtés AB, BC est petite*, *l'aire du triangle* AEC *sera petite par rapport à celle de tout le triangle* ABC : ainsi en *négligeant* une quantité *petite par* rapport au total on pourra prendre celle-là pour l'expression de l'aire de ce triangle; elle sera égale au produit de l'arc du grand cercle, qui mesure cet excès, & du rayon de la sphère $= 1$, & on pourra aussi énoncer ce théorème en disant absolument, qu'elle est égale à l'excès de ces trois angles sur deux droits.

73. Pour transporter cette propriété à tous les triangles sphériques,

(*) Ces deux théorèmes d'Archimède sont bien connus; mais on les démontre très-aisément par la méthode géométrique des infiniment petits. Dans les triangles CEB, bFB (fig. 2) semblables (num. 27) on a cette proportion, CB $= 1$: BE :: Bb : BF $=$ Ee, qui devient $=$ BE $\times$ Bb. Or tandis que la demi-circonférence ABG par son mouvement autour de l'axe AG produit toute la surface de la sphère, & l'arc AB celle du segment, qui répond à la hauteur AE $=$ *sin.vers.*AB, le petit arc Bb produit une bande, dont la longueur est toute la circonférence du cercle qui a BE pour rayon, & la largeur le même arc Bb. Si l'on appelle $1 : c$ la raison du rayon d'un cercle quelconque à sa circonférence, la circonférence du cercle, qui a EB pour rayon, sera $=$ $c\times$EB: ainsi l'aire de cette bande sera $= c\times$BE$\times$Bb $= c\times$Ee, & toute l'aire produite par l'arc AB, qui est la somme de toutes les aires des pareilles bandes précédentes, sera $= c\times$AE. Quand le point B avec E ira en G, on aura la surface de toute la sphère $= c\times$AG $= 2c$. Or la circonférence du cercle, qui a le rayon $= 1$, sera $= c$, & par conséquent la demi-circonférence $= \frac{1}{2}c$, & l'aire de ce cercle aussi $= \frac{1}{2}c$, dont la surface de toute la sphère $= 2c$ est le quadruple, qui est le premier de ces deux théorèmes. Cette même surface de la sphère $= 2c$ est à la surface du segment produit par l'arc AB, que nous avons trouvé $= c\times$AE, comme $2 =$ AG est à AE $=$ *sin.vers.*AB, qui est le second.

riques il suffit de concevoir le triangle ABC (*fig.* 5.) divisé en un nombre infini de petits triangles ABc, cBc', &c. L'aire de chacun de ces triangles au moins en y négligeant des quantités, qui sont infiniment petites par rapport à lui, doit être égale à l'excès de ses trois angles sur deux droits. Or si l'on appelle *n* le nombre de ces petits triangles dans le triangle ABC fini, & *a* l'angle droit comme auparavant; la somme de tous leurs angles en B sera l'angle ABC, & en y ajoutant les angles BAC, BCA du premier & dernier, on aura pour la somme de tous leurs angles ABC + BAC + BCA + $2(n-1)a$; parceque chacun a deux droits, parmi lesquels outre tous les angles en B, & les angles en A, & C, il y a la somme de tous les angles en c, c' &c, & ceux-ci font $2(n-1)a$, parceque sur chacun de ces points il y a deux angles droits, & leur nombre est $= n-1$. En ôtant $2a$ par triangle, c'est-à-dire $2na$ de toute la somme, on aura ABC + BAC + BCA $- 2a$, & ce reste sera la somme de tous les excès des angles de chaque triangle sur deux droits, c'est-à-dire la somme de leurs aires, qui forme l'aire du triangle ABC: comme ce même est l'excès des trois angles du même triangle sur les deux droits $= 2a$; l'aire de tout triangle sphérique sera égale à l'excès de ses trois angles sur deux droits.

74. Pour avoir cette démonstration on a négligé des quantités infiniment petites par rapport à chacun des petits triangles, ainsi dans toute la somme on a négligé une somme qui doit être aussi infiniment petite par rapport au total. Or en multipliant le nombre de ces petits triangles à l'infini, tout ce qu'on a négligé doit nécessairement se compenser de manière, que l'égalité soit exacte, comme je l'ai démontré dans ma Dissertation *De natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum* imprimée l'an 1740, & beaucoup plus clairement dans le premier Volume de mes Éléments. C'est tout le fondement de l'exactitude des résultats donnés par le calcul différentiel, & integral bien employé (*).

75. Ainsi

(*) J'ai démontré dans ces ouvrages, que quand dans une recherche en comparant deux quantités déterminées en elles mêmes on y ajoute, ou on en ôte des quan-

75. Ainsi on a une démonstration bien simple, & tout-à-fait élémentaire de ce beau théorème, dont on ne trouve pas la démonstration dans les Éléments ordinaires. Je le démontre avec la même facilité dans un autre Opuscule, qui contient des démonstrations beaucoup plus simples, que les communément employées de plusieurs théorèmes élémentaires de Trigonométrie, qui sera le dernier du dernier Volume de cette Collection.

76. En revenant au triangle, qui a un angle petit, & les deux

 autres

quantités d'une petitesse indéfinie, que l'on peut diminuer autant qu'on *veut jusqu'à les faire évanouir tout-à-fait*, & en négligeant cette addition, ou diminution, on y trouve l'égalité ou un rapport quelconque, cette égalité ou ce rapport doit être exact de manière que nécessairement tout ce qu'on y a négligé se doit être compensé en se détruisant mutuellement, sans qu'on soit obligé à chercher par où cette compensation s'est faite. Ici la compensation se fait d'abord. La valeur ABC X *sin.vers*.BC n'est pas exactement celle de l'excès de trois angles du triangle ABC (fig. 4) sur deux droits : pour trouver l'égalité de cette valeur avec cet excès on a pris les deux côtés AB, BC pour égaux, & BF pour complément de BC. Cette valeur aussi n'est pas exactement égale à l'aire du triangle ABC, mais à l'aire EBC : pour la prendre pour son expression on y a négligé la petite aire AEC. Par ces quantités négligées on a trouvé, que dans le triangle ABC infiniment petit, l'aire est égale à l'excès des trois angles sur deux droits, & ayant continué la démonstration sans savoir encore s'il y avoit cette propriété exacte dans chacun des triangles infiniment petits employés, à la fin on a trouvé cette *propriété générale même pour les triangles finis*. Les deux quantités *déterminées en elles mêmes sont l'aire d'un triangle sphérique quelconque fini*, & l'excès de ses trois angles sur deux droits. En négligeant des quantités dont les sommes peuvent diminuer à l'infini par rapport à ces mêmes quantités moyennant une augmentation à l'infini du nombre, & de la petitesse des petits triangles, qu'on a employés, on y a trouvé l'égalité : il suffit cela pour savoir, qu'il y a une compensation des quantités négligées, même sans savoir par où elle s'est faite. On voit après tout cela, que la compensation s'étoit déja faite, quand on a pris l'excès des trois angles de chaque triangle infiniment petit pour égal à son aire : mais, sans le savoir encore, la démonstration alloit son train. Si cette propriété n'eût pas été exacte dans chaque triangle infiniment petit, elle auroit été exacte dans le triangle fini, & la compensation auroit dû se faire par quelqu'autre endroit. C'est par la généralité de cette propriété, qui s'est trouvée à la fin pour tous les triangles, qu'on a sû, que la même propriété étoit exacte déja dans chaque triangle infiniment petit, & par conséquent, que la compensation du total s'est faite par-là.

autres ni petits, ni peu éloignés de 90° la proportion entre les sinus des côtés, & des angles opposés ſera, que le sinus de la base AC sera $= \frac{sin.B \times sin.BC}{sin.A}$, ou, en mettant cette petite base & le petit angle B pour leurs sinus, $AC = \frac{B \times sin.BC}{sin.A}$. Le sinus de l' angle A ne peut pas être petit, parcequ' on suppose, que celui-ci n' est ni petit, ni approchant de deux droits, & le même sinus ne peut pas être plus grand que le rayon $= 1$: l' angle B sera toujours petit; & *la base petite aussi; mais toujours du même ordre avec lui*, tandis que *le côté BC ne sera pas petit ou approchant de deux droits; mais si celui-ci est aussi petit, ou approchant de deux droits, elle sera* d' un ordre encore inférieur. La formule, que nous avons trouvée, donnera l' angle $B = \frac{AC \times sin.A}{sin.BC}$, ainsi quand l' angle A sera droit, la mesure de l' angle B sera $\frac{AC}{sin.BC}$, & quand encore le côté BC sera un quart de cercle, la base même sera la mesure de cet angle.

77. Si l' on conçoit l' arc C*a* perpendiculaire au côté BA, & que le côté BC soit un quart de cercle; l' arc B*a* aussi sera un quart de cercle, & par conséquent les arcs BC, B*a* égaux, & A*a* la différence des deux côtés: l' arc C*a* sera la mesure de l' angle B, & si *les deux angles sur la base, qui sont peu différents entr' eux ne sont pas trop peu éloignés d' un angle droit*; on aura les rapports suivants entre la base, la différence des deux côtés, & la mesure de l' angle B, qui seront toutes des quantités petites: 1°. la base est à la mesure de l' angle opposé comme le rayon au sinus de l' un, ou de l' autre des angles sur la base: 2°. La même base est à la différence des deux côtés comme le rayon au co-sinus des mêmes angles: 3°. La différence des deux côtés est à la mesure de l' angle opposé, comme le rayon à leur tangente. On voit ces trois rapports, si l' on considère le triangle A*a*C comme rectiligne, qui sera aussi rectangle en *a*: ce sont alors les rapports de l' hypothénuse AC, & des côtés A*a*, *a*C au rayon, sinus, co-sinus, tangente de l' angle

A, qui

A, qui étant peu différent de l'angle ACB, & non pas trop peu éloigné de l'angle droit, a ces fonctions peu différentes des siennes.

78. Si l'on vouloit se servir de tous ces trois théorèmes dans le cas, où les deux angles sur la base fussent peu éloignés d'un angle droit; on pourroit tomber dans une erreur même infinie; parceque l'un des deux pourroit même être droit, dans lequel cas il auroit son co-sinus $= 0$, & sa tangente infinie, tandis que l'autre auroit son co-sinus petit, sa tangente grande; mais l'une, & l'autre d'une grandeur finie. Le seul sinus reste alors *presque le même*; & pour cela le premier de ces théorèmes *pourroit servir*, parcequ'*alors la base* AC conviendroit avec l'arc aC, ou en seroit peu éloignée, & par conséquent elle seroit peu éloignée de la mesure de l'angle B. Les deux autres ne peuvent servir alors, que pour indiquer, que la différence des deux côtés seroit très-petite. Ces théorèmes seroient exactement vrais dans le cas de l'égalité exacte des deux côtés au quart de cercle, & des deux angles à l'angle droit: deux de ces quatre termes étant $= 90°$, les deux autres doivent l'être aussi. Ainsi alors on auroit $Ea = AE = Aa = 0$, $CA = CE = Ca$, ce qui vérifieroit les trois théorèmes, mais il ne serviroit à rien.

79. Ces théorèmes pourroient servir dans le cas, que les côtés *fussent peu éloignés d'un quart de cercle, mais les angles sur la base assez différents* d'un angle droit; parcequ'alors le point a tomberoit bien près du point E, & le point A seroit assez éloigné du point E, & par conséquent l'arc Aa seroit peu éloigné de la différence des deux côtés, & Ca de la mesure de l'angle B, ce qui rendroit les mêmes théorèmes non pas exactement vrais, mais au moins peu éloignés de l'exactitude. Mais si les deux côtés étoient assez éloignés du quart de cercle, l'arc Ca ne seroit pas la mesure de l'angle B: seulement si les angles sur la base fussent assez éloignés d'un angle droit, on pourroit prendre Aa pour la différence des deux côtés, parceque la distance des points E, a seroit encore très-petite par rapport aux arcs AC, AE: ainsi le second théorème auroit encore lieu, par-

cequ'

cequ' on auroit toujours le même rapport entre AC, Aa, & entre le rayon & le co-sinus de l' angle A.

80. On peut déterminer la valeur de l' arc Ea dans le cas de l' angle B petit, & on le trouve toujours d' un ordre inférieur par rapport à la base AC, & par conséquent aussi par rapport à l' arc Aa dans le cas de l' angle A assez éloigné d' un angle droit, dans lequel ces deux arcs sont du même ordre, étant entr' eux comme le rayon, & le co-sinus de cet angle. Cette détermination donnera *l' expression de la différence de l' hypothénuse d' un triangle rectangle sphérique au côté adjacent à un angle petit analogue à* celle qu' on a pour la même différence dans *un triangle plan*.

81. Par *les théorèmes élémentaires de la Trigonométrie sphérique* on a dans le triangle BaC rectangle en a, $tan.Ba = tan.BC \times cos.B$. On a $cos.B = 1 - sin.vers.B = 1 - \frac{1}{2}B^2$ (num. 58). Dans la fig. 2 en prolongeant les deux rayons CB, Cb jusqu' à la tangente tirée par A en M, m, & tirant avec le centre C le rayon CM, un arc de cercle qui rencontre la droite Cm en N; on pourra prendre le petit triangle MNm pour rectangle en N, & semblable à CAM à cause de l' angle MmN très-peu différent de l' externe AMC. Ainsi on aura les proportions suivantes CE $= cos.AB : CA = 1 :: CB : CM :: Bb : MN = \frac{Bb}{cos.AB} :: MN : Mm = \frac{Bb}{cos^2.AB}$. La différence de la tangente sera égale à la différence de l' arc divisé par le quarré du co-sinus. On pourra employer ici cette expression pour avoir la valeur de la tangente de l' arc $BC = Ba + aE$, où aE est la petite différence qu' on ajoute à l' arc Ba pour former BE = BC. Ainsi la différence à ajouter à la tangente de l' arc Ba sera $\frac{aE}{cos^2.Ba}$, & on aura $tan.BC = tan.Ba + \frac{aE}{cos^2.Ba}$. On avoit $tan.Ba = tan.BC \times cos.B$: en substituant pour $cos.B$ sa valeur trouvée $= 1 - \frac{1}{2}B^2$, & pour $tan.BC$ la valeur, que nous venons de trouver, on aura

$$tan.Ba = \left(tan.Ba + \frac{aE}{cos^2.Ba}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}B^2\right) = tan.Ba + \frac{aE}{cos^2.Ba} - \frac{1}{2}B^2$$

$= \frac{1}{2}B^2 \times tan.Ba - \frac{B^2 \times aE}{2cos^2.Ba}$. Le premier terme qui se trouve dans tous les deux membres s'en va : les trois autres du second membre restent $= 0$, mais on y peut négliger le dernier, qui à cause de la petitesse de la valeur B^2 par rapport à l'unité est petit par rapport au premier : ainsi on a $\frac{aE}{cos^2.Ba} - \frac{1}{2}B^2 \times tan.Ba = 0$, & $aE = \frac{1}{2}B^2 \times tan.Ba \times cos^2.Ba$: on a $tan.Ba \times cos^2.Ba = sin.Ba \times cos.Ba = \frac{1}{2} sin.2Ba$, & on peut y mettre BC pour Ba, ce qui donne à la fin $aE = \frac{1}{4}B^2 \times sin.2BC$, expression très-simple de la *différence de l'hypothénuse d'un triangle sphérique, qui a un angle petit, au côté adjacent à cet angle* (*).

82. En comparant cette expression avec celle du num. 76 pour la base AC, on voit bien, que le petit arc aE est d'un ordre *inférieur* à celui de la base AC. On y a $AC = \frac{B \times sin.BC}{sin.A}$, & on a ici $aE = \frac{1}{4}B^2 \times sin.2BC$. Or $sin.A$ ne peut pas être petit par la supposition, $sin.BC$ est du même ordre avec $\frac{1}{4}sin.BC$, & B^2 est d'un ordre inférieur par rapport à B : ainsi l'arc aE est aussi d'un ordre inférieur par rapport à la base AC, ce qu'on avoit proposé à démontrer.

83. La différence de l'angle externe sur l'interne opposé, qui est

(*) Cette expression est d'accord avec celle, que la différence de l'hypothénuse d'un triangle rectangle rectiligne a au côté adjacent à un angle petit. Si l'on fait aller à l'infini le rayon de la sphère, l'arc 2BC devient égal à son sinus, & l'expression $aE = \frac{1}{4}B^2 \times sin.2BC$ devient $= \frac{1}{2}B^2 \times BC$. Or cette expression convient à l'excès de l'hypothénuse de ce triangle rectiligne sur ce côté; parceque si l'on considère le triangle BaC comme rectiligne, & que l'on conçoive le cercle du rayon BC; son diamètre sera $= 2BC$, & le sinus verse aE, qui est cet excès, sera égal au quarré de la corde EC divisé par le diamètre 2BC. Ainsi en prenant encore EC pour aC, on aura $aE = \frac{aC^2}{2BC} = \frac{aC^2 \times BC}{2BC^2} = \frac{1}{2}sin^2.EBC \times BC$: en prenant le sinus du petit angle qui répond au rayon $= 1$ pour l'angle même, on aura la même expression $\frac{1}{2}B^2 \times BC$.

est droit, sera ici son complément par excès, & complément par défaut de l'autre interne sur la base, qui forme avec lui deux angles égaux à deux droits: cette différence, en mettant B pour l'angle ABC dans l'expression générale du num. *65* sera B×*cos*.BC: l'excès des trois angles sur deux droits sera de même au num. 71 B×*sin.vers*.BC, & ce sera la mesure de son aire (num. 72).

§. XII.

Des triangles, qui ont deux angles très-petits, ou des angles approchants de 180°.

84. Si l'angle BAC encore est très-petit; on imaginera comme auparavant l'arc C*a* perpendiculaire au côté BA compris entre les deux petits angles, qu'alors nous appellerons base, appellant simplement côtés les deux autres. Ce triangle se trouvera divisé en deux rectangles A*a*C, B*a*C, dont chacun aura un seul angle petit en A, & B, & appartiendra au paragraghe précédent. Les propriétés, que nous y avons trouvées pour un triangle à un seul angle petit, nous donneront celles de celui-ci, qui en a deux. 1°. L'angle externe, qui répond au sommet opposé à la base, sera aussi petit, parcequ'il doit être plus petit que la somme des deux autres à la base; sa mesure sera A×*cos*.AC + B×*cos*.BC (num. *65*). 2°. L'excès des trois angles sur deux droits, qui est aussi la mesure de son aire, sera A×*sin.vers*.AC + B×*sin.vers*.BC (num. 72). 3°. Les deux côtés ensemble excéderont la base par une différence de second ordre, qui sera $= \frac{1}{4}A^2 \times sin.2AC + \frac{1}{4}B^2 \times sin.2BC$ (num. 81). 4°. Les deux angles seront, comme les sinus des côtés opposés, parcequ'à cause de leur petitesse ils seront proportionnels à leurs sinus, qui sont proportionnels aux sinus de ces côtés. 5°. Si les deux angles sont égaux; chaque côté ne différera de la moitié de la base que de $\frac{1}{4}A^2 \times sin.2AC$, ou $\frac{1}{4}B^2 \times sin.2BC$. S'ils sont inégaux, les côtés le seront aussi; mais tandis que ceux-là seront encore d'un même ordre entr'eux, les côtés le seront de même tant entr'eux, que par rapport à la base: si l'un de ces deux angles a

un

un rapport trop petit à l' autre ; son côté opposé l' aura de même, & l' autre pourra être pris pour égal à la base, dont il diffère par une quantité, qui pourra être prise pour égale au premier petit ; parceque leur somme pourra être prise pour égale à la base en négligeant les quantités d' ordres inférieurs, ce qui en négligeant le premier petit par rapport au second & à la base fait, qu' on peut prendre ces deux derniers termes pour égaux entr' eux, & pour leur différence le premier seul, qui étant négligé les a fait considérer pour égaux. *6°.* Dans le cas de l' isocélisme l' excès *des trois angles sur deux droits*, qui est aussi la *mesure de son aire*, sera $= 2A \times sin.vers.AC = 2B \times sin.vers.BC$: l' excès de *la somme des deux côtés* sur la base sera $\frac{1}{2} A^2 \times sin^2.AB = \frac{1}{2} B^2 \times sin^2.AB$. On voit cela par l' égalité des deux côtés, & des deux angles dans le cas de l' isocélisme.

85. Un triangle ne peut pas avoir trois angles petits, parceque *la* somme de tous les trois doit être dans tout triangle plan égale à deux droits, & dans le sphérique encore plus grande. Ainsi nous passerons aux *triangles*, qui ont des angles approchants de 180°. Dans *un triangle plan* on ne peut pas en avoir qu' un seul, même qu' un seul droit : dans *le sphérique* on croiroit, qu' on peut en avoir un, deux, & trois, puisque la somme de tous *les* trois peut approcher de six droits tant qu' on veut. *Pourtant il peut en avoir un seul*, ou tous *les trois*, pas *deux seuls*. *On le voit aisément en faisant réflexion* au triangle supplémentaire (*), qui a pour côtés les suppléments des ses angles, & pour angles les suppléments de ses côtés. S' il y avoit un triangle avec deux seuls angles approchants de 180° ; les suppléments de ceux-là seroient petits, & celui du troisième grand : ainsi dans le triangle supplémentaire, un côté seroit plus grand, que *les* deux autres ensemble, ce qui est impossible. On peut *faire un triangle sphérique* avec un côté bien petit, & avec tous les trois petits, mais non *pas avec deux seuls* ; parceque *le* troi-

 sième,

(*) J' appelle supplémentaire cette espèce de triangle, à cause de la substitution de tous les suppléments des angles, & des côtés, qu' on y employe.

sième, qui doit être plus petit que leur somme nécessairement petite, sera petit lui aussi : de même on peut en avoir un, qui sera supplémentaire de celui-là, & aura un seul angle approchant de 180°, ou tous les trois, mais non pas deux seuls.

86. Nous avons vu, qu' un triangle *sphérique*, qui aura deux angles très-petits, aura le troisième très-approchant de 180°; ainsi nous avons déjà vu les *propriétés* de celui-là. Le même nous donnera les *propriétés de celui*, qui a tous les trois angles approchants de *180°, mais non pas de tous ceux*, qui en ont un seul. Le triangle A'CB', *qui aura tous les* trois angles *de cette* espèce, en aura un opposé ACB, qui aura l' angle *en C égal à* celui du *premier*, & les angles CAB, CBA *égaux aux* CA'B, CB'A *suppléments* de CA'B', CB'A', & pour cela petits. Les cô- *tés* CA', CB' seront les suppléments des CA, CB, & le côté A'B' = AB : ainsi les propriétés, qu' on a *trouvé pour le* rapport des côtés, & angles du triangle *ACB à deux* angles A & B très-petits, serviront pour *le rapport* d' un de ces côtés quelconque de celui, qui *a les trois angles* approchants de 180°, avec son angle *opposé*, & *les suppléments* des deux autres côtés & angles. Si *l'* on a un seul angle A'BC approchant de 180°; on aura à son *côté le* triangle ABC, qui aura le seul angle CBA petit, qui est *le supplément* de l' angle CBA', & les deux autres *angles* BCA, BAC *le premier supplément du* BCA', *le second* égal à BA'C, qui ne *seront pas petits : les côtés* AC, BC seront les suppléments des côtés A'C, B'C. Les propriétés du triangle ABC pour le cas d' un seul angle B petit donneront le rapport entre un côté quelconque du triangle A'BC, qui aura un seul angle B approchant de 180° avec son angle opposé, & les suppléments des deux autres côtés, & angles. L' aire du triangle à trois angles chacun approchant de deux droits sera *toujours* l' excès de la somme des trois angles sur deux droits. *Elle* sera très-peu différente de la surface de la demi-sphère, c' est-à-dire de l' aire de deux grands cercles de la sphère ; parceque la somme de ses trois angles sera approchante de six angles droits, & par conséquent l' excès de cette somme sur deux droits sera ap-

pro-

prochante de quatre droits, c' est-à-dire de toute la circonférence, qui multipliée par le rayon donne le double de l' aire d' un seul cercle.

87. Dans le cas, que nous avons parcourus, nous avons trouvé aussi des rapports entre des petits côtés, ou entre des différences des grands côtés : dans tous les cas d' un côté petit, ou approchant de 180°, & de deux côtés de cette espèce, on pourra déterminer leurs propriétés à l' aide du triangle supplémentaire, qui change les angles en *suppléments* des côtés, & viceversa. Le cas de trois angles *approchants de 180° donne dans son triangle supplémentaire un triangle à trois côtés tous les trois petits*. Ce *triangle peut être traité* comme *rectiligne*. On en tirera pour le triangle, qui a tous les trois angles approchants de 180°, que la somme de tous les trois côtés s' approche d' un cercle, & si les trois angles deviennent exactement de 180°, le périmètre d' un tel triangle deviendra un cercle entier. Puisque dans un triangle *rectiligne la* somme de tous les trois angles est égale à deux droits, & chaque angle *avec* son *supplément* en fait deux ; tous *les trois suppléments*, qui *sont égaux* aux trois côtés de l' angle *supplémentaire*, *feront la somme de 6 — 2 = 4 droits*. On *le voit* bien en *considérant le triangle* A'CB' : *si l' on conçoit la diminution des angles externes* CA'B, CB'A, *jusqu' à l' évanouissement ; le point C tombera sur quelque point a de l' arc AB, les deux côtés AC, BC se couchant sur le même arc, & les deux* A'C, B'C sur tout l' arc A'B*a*AB', qui avec A'B' achève un cercle entier. On voit bien dans ce mouvement, que quelque soit le côté A'B', quand le point C s' approchera du point *a*, les angles CA'B', CB'A' s' approcheront de 180°, l' angle A'CB supplément de ACB diminuant toujours jusqu' à s' évanouir, ce qui fait approcher le même A'CB' à l' infini de 180°. *Cela fait* voir d' une autre manière, qu' un triangle sphérique ne peut *pas avoir deux seuls* angles approchants de 180° ; mais ou un seul, ou *tous les trois*, comme aussi, que la surface d' un triangle, dont chacun des *trois* angles est très-peu différent de 180°, diffère très-peu de celle d' un hémisphère, ou de celle de deux grands cercles.

§. XIII.

Résumé des propriétés trouvées dans les deux derniers paragraphes, & leur application aux triangles plans.

88. DANS un triangle sphérique, qui a un seul angle petit, & chacun des deux autres assez éloigné de 180°, on aura les propriétés suivantes, que nous avons déjà démontrées: nous y appellons base le côté opposé au petit angle, & les deux autres simplement côtés.

89. La base sera petite par rapport aux côtés, les côtés auront une raison finie entr' eux, étant d' un même ordre (numér. *62*, *63*): la base en sera d' un ordre inférieur, même du même ordre avec le petit angle, si ces côtés ne sont pas ni trop petits, ni trop approchants de 180°. Dans ces deux cas elle sera d' un ordre inférieur même par rapport à l' angle opposé (num. *76*).

90. On a la différence d' un angle externe sur la base à l' autre interne & opposé en multipliant l' angle opposé à la base par le co-sinus ou de l' un, ou de l' autre des deux côtés, & c' est la différence des deux angles sur la base à deux droits. Cette différence sera un excès de l' angle externe sur l' interne opposé, ou un défaut, selon que les côtés seront plus petits où plus grands que de 90° (num. *64*, & *65* comparés avec le *63*). L' excès du troisième angle sur cette différence dans le premier cas, & dans le second leur somme sera l' excès des deux angles internes, & opposés sur l' angle externe de la base, & des trois angles internes pris ensemble sur deux droits (num. *66* & *67*).

91. Que dans un triangle sphérique quelconque, la somme de trois angles internes surpasse deux droits, c' est un théorème élémentaire, & il y en a une démonstration simple dans le num. *68*.

92. L' angle opposé à la base étant petit, la somme des deux angles à la base sera peu différente de deux droits (num. *69*): si chacun des deux côtés, étant peu éloigné de 90° chacun de

ces

ces angles l'est aussi ; on pourra prendre la base pour mesure de l'angle opposé, & la différence des deux côtés sera d'un ordre inférieur à celui de la même base : dans un éloignement suffisant de ses angles de $90°$ la base sera à la mesure de l'angle opposé, & à la différence des deux côtés, comme le rayon est à leur sinus, & co-sinus : cette différence sera à cette mesure comme le rayon est à leur tangente (num. 77 & 78).

93. Si tant les côtés, que les angles sont assez éloignés de $90°$; la base ne sera pas *à la mesure de l'angle opposé* comme le rayon est au *sinus de ces angles*, *mais elle sera toujours à la différence des côtés* comme le rayon au cosinus des mêmes angles.

94. *En multipliant l'angle opposé à la base par le sinus verse d'un des côtés on aura l'excès des trois angles internes sur les deux droits*, qui sera aussi la mesure de l'aire du triangle (num. 71). J'y ai démontré aussi d'une manière bien simple le beau *théorème général* suivant, qui devroit se placer parmi les *Éléments* : dans un triangle sphérique quelconque l'excès de la somme des trois angles sur deux droits est la mesure de son aire (num. 73, & suivants).

95. Dans un triangle sphérique, qui ayant un angle petit en a un autre droit, *la base opposée au petit angle divisé par le sinus de l'hypothénuse en* sera la mesure, & elle par elle-même *le sera, quand cette hypothénuse sera un quart de cercle* (num. 76) : *la différence entre l'hypothénuse*, & l'autre côté sera d'un ordre inférieur même par rapport à ce petit angle, & au côté, qui lui est opposé : le petit angle étant B, & l'hypothénuse BC la valeur de cette différence sera $\frac{1}{4}B^2 \times sin.2BC$ (num. 82).

96. Le complément de l'autre angle adjacent à l'hypothénuse sera $= B \times cos.BC$, & l'excès de ses trois angles sur deux droits, ou des deux adjacents à l'hypothénuse sur un droit sera $= B \times sin.vers.BC$, ce qui sera aussi la mesure de son aire (num. 83).

97. Dans un triangle à deux angles très-petits, en appellant base le côté, qui en est compris, & en le réduisant à deux rectangles par un arc perpendiculaire à la base, nous avons trou-

vé au §. XII les propriétés suivantes. 1°. L'angle externe opposé à la base sera aussi petit, l'interne s'approchant de deux droits: la mesure de ce petit angle sera la somme des deux produits du sinus de chaque côté par son angle adjacent sur la base. 2°. L'excès de la somme des trois angles internes sur deux droits, qui est aussi la mesure de son aire, sera la somme des deux produits du sinus verse de chaque côté par le même angle adjacent. 3°. La somme des deux côtés excédera la base par une différence de second ordre, qui sera un quart de la somme des deux produits du sinus du double de chaque côté par le quarré du même angle. 4°. Les deux angles seront entr' eux, comme le sinus des côtés opposés. 5°. Si les deux angles sont égaux, chaque côté ne différera de la moitié de la base, que d' un quart du produit du sinus de son double multiplié par le quarré d' un des angles sur la base: s'ils sont inégaux, les côtés le seront aussi; mais tandis qu'ils seront encore du même ordre entr' eux, les côtés le seront de même entr' eux, & par rapport à la base: si l' un de ces deux angles a un rapport trop petit à l' autre; son côté opposé l'aura de même à l' autre, & à la base, & ce second pourra être pris pour égal à la base, dont il différera par une quantité, qui peut être prise pour égale au premier. 6°. Dans le cas de son isocélisme l'excès de trois angles sur deux droits, qui est aussi la mesure de son aire, sera le double du produit du sinus verse d'un des côtés par un des deux angles à la base: l'excès de la somme des deux côtés sur la base sera la moitié du produit du sinus d' un des côtés par le quarré d'un des mêmes angles.

98. Un triangle ne peut pas avoir trois angles très-petits: il peut en avoir un approchant de 180°, & s'il est sphérique peut en avoir trois, mais non pas deux seuls. Quand il en a deux, le troisième le doit être aussi. Quand le triangle sphérique a un seul angle approchant de 180°, il y en a un autre à côté, qui a un côté commun, l' angle opposé à celui-ci égal, & les deux autres côtés, & angles suppléments de ceux du premier: par conséquent ce nouveau triangle a un angle petit, qui est le supplé-

ment

ment de ce grand. Quand chacun des trois angles approche de 180°, il y en a toujours un autre opposé, qui a deux angles petits, suppléments de ceux du premier triangle, le troisième angle avec le côté opposé égaux à ceux du même premier, & les deux autres côtés suppléments des siens. Par les propriétés de ces triangles substitués on aura le rapport entre ce, qu' il y a de commun, & les suppléments du reste. Dans le cas de trois angles approchants de 180° l' aire du triangle toujours égale à l' excès de ses angles *sur les deux droits*, différera très-peu de celle du *double d' un grand cercle*, la différence en étant égale à *la somme des trois suppléments* des mêmes angles.

99. Les *propriétés des triangles sphériques*, qui ont des *côtés* petits, se trouveront aisément par celles des *triangles à angles* approchants de 180° à l' aide des triangles supplémentaires, qui ont pour angles les suppléments de ses côtés, & pour côtés les suppléments de ses angles. Celui du triangle à trois angles approchants de 180° donnera le triangle à trois côtés petits tous les trois, qui pourra être considéré comme triangle plan: celui à un seul angle approchant de 180° en donnera un à un seul côté petit: comme on ne peut pas avoir aucun à deux seuls côtés petits, de même il n' y en a aucun à deux seuls approchants de 180°, qui le donne.

100. Un grand nombre de ces propriétés peut être appliqué aux triangles plans en faisant aller le rayon de la sphère à l' infini: les sinus, & tangentes des côtés se changeront en côtés mêmes, les co-sinus en unité, les co-tangentes en unité divisée par les côtés: la mesure des angles sera prise dans un cercle, qui aura pour rayon une unité arbitraire, & leurs sinus relatifs à ce même rayon. Les rapports des sinus des côtés deviendront rapports des mêmes côtés: ceux des côtés aux angles n' auront plus lieu, la mesure de ceux-ci, & leur sinus dépendant de cette unité arbitraire. Nous commencerons ici aussi par les triangles à un seul angle très-petit, dans lequel il ne pourra en avoir aucun approchant de deux droits, parcequ' il y en auroit nécessairement encore un autre petit.

101. On

101. On tirera du num. 81, que la base sera *petite* par rapport aux deux côtés, & du même ordre que l'angle par rapport à son rayon arbitraire : elle sera toujours d'un ordre inférieur par rapport aux côtés, & même par rapport à la mesure de l'angle, quand les côtés seront petits par rapport au rayon de cette mesure. Du num. 82, & 83 il n'y reste, que l'égalité de l'angle opposé à la base avec la différence de l'externe sur la base à son interne, & opposé sur la même base, la somme des trois internes *étant toujours égale à deux droits*.

102. Du num. 83 on aura, *que l'angle opposé à la base étant petit, la somme des deux angles sur la base sera peu différente de deux droits : si chacun de ces deux angles est peu éloigné de deux droits; la différence* des deux côtés sera d'un ordre inférieur à la même base : dans un éloignement suffisant de ces angles de 90°, la base sera à la différence des côtés comme le rayon à leurs co-sinus.

103. Du num. 84 on peut tirer seulement que les angles sur la base étant peu éloignés de 90°, l'angle opposé à la base aura pour expression de sa valeur la base même divisée par un des deux côtés; parceque ce sera l'expression de son sinus.

104. Pour le num. 85 la mesure de l'aire dans les triangles plans n'a aucune analogie immédiate avec la mesure proposée pour les triangles sphériques : *cette aire est le produit de la moitié de la base par la hauteur, ou la moitié du produit de deux côtés quelconques avec le sinus de l'angle intercepté* : on l'a par les trois côtés en multipliant ensemble la demi-somme de tous les trois, & trois excès de celui-ci sur chacun des trois côtés, ce qui donne le quarré de l'aire : le sinus verse, qui entroit dans cette mesure, s'évanouit avec la courbure : il faudroit faire un long détour pour en tirer ce, qui est trop connu par les premiers Éléments de la Géométrie, & Trigonométrie plane.

105. Du num. 86 on tire de nouveau, que dans un triangle rectiligne rectangle, qui a un angle petit, la mesure de cet angle est le côté opposé divisé par l'hypothénuse. On en tire encore, que la différence de l'hypothénuse à l'autre côté sera d'

un

un ordre inférieur même par rapport au premier côté. Cette différence sera la moitié de l'hypothénuse, ou du côté adjacent au petit angle multipliée par le quarré du sinus du même angle: on l'exprimera aussi par les côtés, & l'hypothénuse de la manière suivante. Si l'on appelle C le côté opposé au petit angle, & B l'hypothénuse, ou l'autre côté: cette différence sera $\frac{C^2}{2B}$, parceque le petit angle étant A, *elle étoit* $\frac{1}{4}A^2 \times sin.2B$: ce sinus devient 2B, & *l'angle A devient* $= \frac{C}{B}$, ce qui donne $\frac{1}{4}A^2 \times sin.2B = \frac{C^2}{2B}$. *On démontre immédiatement* cette valeur en considérant, que le sinus verse est la différence du rayon au cosinus, & qu'il est égal au quarré de la corde divisé par le diamètre $= 2$.

106. Pour le num. 87. le complément de l'autre angle adjacent à l'hypothénuse devient le même premier petit, & l'excès de la somme des trois angles *sur deux droits* devient zero, ce qui vient immédiatement de l'égalité de trois angles à deux droits.

107. On passe au num. 88 à un triangle, qui a deux *angles petits*: quand *il devient* rectiligne, il reste aussi *divisé en deux* rectangles par *la perpendiculaire tirée sur* la base *du sommet* de l'*angle opposé, la base étant le côté compris entre les deux petits angles*. On y a 1°. que l'angle externe opposé à la base y est aussi petit, que l'interne s'approche de deux droits, & que l'externe est égal à la somme des deux petits internes, qui sont sur la base. 2°. La mesure de son aire, qui n'a rien de commun avec celle du triangle sphérique, est le produit de la moitié de la base par la hauteur, qui est égale à un des deux côtés quelconques multiplié par le sinus de son angle adjacent, parceque c'est *la mesure de* l'aire des deux *petits triangles* rectangles. 3°. La somme des deux côtés *excédera la base par une quantité* de *second ordre, qui sera la demi-somme de deux produits de chaque côté multiplié par le quarré du sinus de son angle adjacent*. 4°. Les angles seront entr'eux comme les côtés opposés.

 5°. Si

5°. *Si les deux angles sont égaux, chaque côté ne différera de la moitié de la base, que par la moitié du produit de lui-même multiplié par le quarré du sinus d' un des angles sur la base. S' ils sont inégaux, les côtés le seront aussi : tandis qu' ils seront du même ordre entr' eux, les côtés le seront de même entr' eux, & par rapport à la base : si l' un de ces deux angles a un rapport trop petit à l' autre ; son côté opposé l' aura de même à l' autre, & à la base, & ce second côté pourra être pris pour égal à la même base, dont différera par une quantité, qui pourra être prise pour égale au premier. Dans le cas de l' isocélisme la mesure de son aire sera le produit de la multiplication du quarré d' un de ces côtés par le sinus d' un des angles sur la base : l' excès de la somme des deux côtés sur la base sera la moitié du produit d' un de ces côtés par le quarré d' un de ces angles.*

108. Un triangle plan ne peut avoir plus de deux angles petits, ni plus d' un angle approchant de deux droits : quand il en a un de cette dernière espèce, les deux autres sont nécessairement petits, ce qui est le cas déjà examiné. S' il a un seul côté petit ; *l' angle opposé à celui-ci sera petit : il ne peut pas en avoir deux seuls petits : s' il y en a trois, mais tels qu' un d' entr' eux ait une raison petite aux autres, l' angle opposé à celui-là sera petit : tout cela revient aux cas, que nous avons déjà examinés.*

§. XIV.

Manière de transformer les quatre premières équations générales, & d' en tirer des autres.

109. COMME on est libre d' appeller dans un triangle x, & y les côtés, que l' on veut, en nommant le troisième z, & les trois angles p, q, r ; on peut changer l' ordre, comme on veut, & mettre x à la place de y, ou de z, & y à la place de x, ou de z ; en mettant z pour le côté qui reste, & les valeurs des angles correlativement aux côtés opposés : ayant fait cette substitution, les équations paroîtront sous une autre forme. Si l' on fait répon-

dre

dre les lettres de la seconde des deux lignes, qu' on voit ici à côté à celles de la première $\begin{cases} x, y, z, p, q, r \\ z, x, y, r, p, q \end{cases}$; on aura des équations nouvelles, qui dans la réalité ne donneront rien de nouveau, mais qui auront une apparence différente, qui quelquefois rendra plus facile l' application à des cas particuliers, & qu' on pourra employer pour tirer des nouvelles équations par la méthode, que nous développerons ci-après. Par exemple si l' on fait cette substitution dans *la seconde du num.* 15, & qu' on ordonne les termes *selon l' ordre des valeurs* x, y, z, p, q, r, elle deviendra, $dx\cos.y\sin.q - dz\sin.p + dp\sin.z\cos.p + dr\sin.y = 0$.

110. On peut aussi substituer dans la seconde les sinus, & co-sinus des côtés, & angles à ceux des angles, & des côtés en changeant les signes des co-sinus, & des différences à cause de la substitution des supplements: on peut même retenir les signes des différences, parcequ' il y en a une seule dans chaque terme, comme nous l'avons dit ci-dessus, & le changement des signes de tous les termes ne gâte pas l' égalité: c' est un changement plus réel: la même seconde équation changée de cette manière, & ordonnée deviendra, $dx\sin.r - dz\cos.y\sin.p - dp\sin.y - dq\sin.x\cos.r = 0$.

111. On a changé de cette manière la première (num. 29) pour avoir *la quatrième*. *Si l' on fait la même chose à la troisième*, on revient au même: la quatrième aussi changée de la même manière reviendroit à la première. Si l' on faisoit le changement de la troisième par la méthode première exposée au num. 109; elle resteroit de même telle, qu' elle est: ce même changement appliqué à la première, & quatrième n' y produiroit aucun avantage réel pour l' application aux cas particuliers.

112. Il y a d' autres changements, que l'on peut faire, & qui peuvent être utiles dans certains cas, en substituant pour quelque sinus, co-sinus, co-tangente de quelque coefficient sa valeur tirée des propriétés des triangles, comme de la proportion entre les sinus des angles, & des côtés opposés, ou des formules du num. 30, ou d' autres, qu' on peut en tirer en substituant les

sinus, co-sinus, co-tangentes des côtés à ceux des angles, & viceversa, & en changeant les signes des co-sinus, & co-tangentes comme je l'ai déjà fait au num. 29. Il faut changer absolument les signes non des seuls co-sinus, mais aussi des tangentes, & co-tangentes, quand on passe d'un supplément à l'autre, pour avoir la généralité dans les expressions de *tan.* $= \frac{sin.}{cos.}$, & *cot.* $= \frac{cos.}{sin.}$, & *faisant par définition arbitraire positifs les sinus, avec le co-sinus, les tangentes, & les co-tangentes des angles aigus, il faut retenir le signe dans les obtus pour le premier, & le faire négatif pour les trois autres*, si l'on veut profiter de l'analogie admirable, qui a le calcul avec la Géométrie linéaire, & faire la substitution des expressions équivalentes généralement même sans savoir, si les arcs, & les angles, qu'on employe, sont plus grands, ou plus petits, que ceux de 90°, ou sans y songer. Si l'on prend toujours la même origine des arcs, & qu'on tire de l'autre extrémité les sinus toujours au diamètre, qui passe par cette origine, les co-sinus à l'autre, qui lui est perpendiculaire, & qu'on appelle tangente celle, qui touche l'arc dans son origine, & va jusqu'à la production du rayon tiré par son autre bout, co-tangente celle, qui touche sa différence à 90° toujours dans le même point du second diamètre; on verra bien, que quand en changeant la grandeur de l'arc par une continuation d'augmentation on arrive à 90°, le sinus devient égal au rayon, le co-sinus, & la co-tangente s'évanouissent, la tangente va à l'infini, & après ce terme le premier diminue restant avec la même direction, le co-sinus, & la co-tangente reparoissant avec la direction changée: la tangente revient de l'infini aussi avec la direction contraire. Cette armonie admirable entre le changement des directions en Géométrie, & des signes en Algèbre est la source de tous les avantages inappréciables, que les Mathématiques ont tirés par-tout de l'application, que Des-Cartes a fait de l'Algèbre à la Géométrie: par-là les traités entiers, qui n'arrivoient pas à épuiser tous les différents cas d'un problême, comme

me en Optique, & dans la détermination de la nature des courbes, sont compris tous à-la-fois dans une demi-ligne d' une formule algébrique.

113. On peut aussi trouver des équations nouvelles par la comparaison de plusieurs équations déjà trouvées : en faisant disparoître des termes, qui dans deux de ces équations ont la même différence. On peut trouver la valeur de dx dans toutes les quatre équations, & en égalisant deux de ces quatre valeurs quelconques, on aura *six équations nouvelles*, puisqu' une combinaison de quatre *contient six binaires : plusieurs* de ces nouvelles équa*tions auront cinq* différences : mais on pourra en effacer une par le moyen de deux des nouvelles équations, dans lesquelles elle se trouvera, ce qui donnera une autre équation pour les quatre autres. Ces équations auront des coefficients beaucoup plus composés, que ceux de nos quatre premières, qui sont si simples : mais la méthode proposée sert pour sentir l' immense fécondité du calcul, quand il est employé à propos.

§. XV.

Méthode pour appliquer les quatre équations générales à toute la grande multitude des combinaisons particulières.

114. Nous avons vu (num. 3), que si l'on considère les six termes d' un triangle particulier, c' est-à-dire trois côtés, & trois angles, il y a 90 combinaisons dans le cas de deux termes constants: 60 dans le cas d' un seul constant, & 60 aussi, quand tout est variable. Le nombre des problêmes, qui cherchent la valeur d' une différence par d' autres, est encore beaucoup plus grand. Dans le cas de deux constants, on cherche dans chaque combinaison de deux une différence par l' autre, ce qui en doublant le nombre de 90, fait monter le nombre des problêmes à 180 : dans le cas d' un seul constant on cherche dans chaque combinaison de trois termes une des trois différences par les deux autres, ce qui en triplant le nombre de 60, le fait monter aussi pour les problê-

mes à 180: dans le cas, où tout est variable, on cherche chacune des quatre différences par les trois autres, ce qui rend quatre fois plus grand le nombre de 60 pour avoir celui des problêmes, qui devient 240. Ainsi il y a 500 problêmes différents, quand il s'agit d'un triangle particulier. Pourtant nous avons dit, qu'on peut avoir la solution de toute cette multitude de problêmes par la seule différente manière d'appliquer aux cas particuliers les quatre équations générales du num. 15. Voici la manière très-simple de faire cette application: mais il faut se souvenir, que quand on a appliqué selon l'exigence des cas deux des lettres x, y, z à deux côtés d'un triangle, le reste est déterminé: la troisième va au troisième côté, & les lettres p, q, r aux trois angles opposés aux côtés x, y, z.

115. Il est bien aisé de voir, que de quelconque manière on prend quatre de six termes d'un triangle, toujours ils appartiendront à une des quatre combinaisons du num. 5. Ou ces seront 1°. trois côtés, & un angles, ou 2°. deux côtés, & deux angles, dont un compris entre ces côfés, ou 3°. deux côtés, & deux angles opposés à ces côtés, ou 4°. trois angles, & un côté.

116. Si ces quatre tombent dans la première combinaison; on se servira de la première équation: on appellera x le côté opposé à l'angle, qui s'y trouve, cet angle restant p: on appellera les deux autres y, & z, comme on veut. On aura alors la première équation pour dx, dy, dz, dp. S'il y a un, ou deux termes constants; on les fera entrer avec les variables dans la combinaison, & on fera leur différence $= 0$, ce qui réduira l'équation à trois termes, ou à deux, & cette remarque est la même pour les combinaisons suivantes.

117. Si les quatre termes font la seconde combinaison; on appellera x le côté opposé à l'angle, qui n'est pas compris, qui sera p, y l'autre côté employé. Le troisième côté sera z, & l'angle opposé à celui-ci compris entre les deux x, y sera r: la seconde équation donnera la liaison des différences dx, dy, dp, dr.

118. Si l'on a la troisième combinaison; on appellera x, & y les deux côtés, comme on veut: les angles opposés seront p,

& q,

& q, & la troisième équation liera ensemble les différences dx, dy, dp, dq.

119. Dans le cas de la quatrième combinaison on appellera x le côté qui y entre, & les deux autres y, z comme on veut. La quatrième équation donnera la liaison des différences dx, dp, dq, dr.

120. S' il n' y a aucun terme constant, l' équation contiendra quatre différences : on aura aisément la valeur de celle qu' on veut, par la *transposition des termes à l' ordinaire*, en laissant celle seule dans le premier membre, & en la délivrant de son *coefficient*, *s' il y en a* : ainsi on peut avoir la solution de tous les quatre problêmes, qui y appartiennent. De la même maniè- re il y aura la solution de trois problêmes par l' équation à trois termes, quand il y a un terme du triangle constant, & de deux, quand les deux constants réduisent l' équation à deux termes.

121. Ce que nous avons dit suffit pour pouvoir employer les quatre équations générales à la résolution de tous les problêmes, sans chercher les équations particulières pour le cas d' un, ou de deux termes constants, & multiplier le nombre des formules, ce qui embarrasse beaucoup plus le calculateur, qu' il ne l' aide. Mais pour faire mieux sentir l' utilité de l' application immédia- te des équations générales, nous développerons dans les deux pa- *ragraphes suivants tout* ce qui appartient aux différents cas de deux termes constants, & d' un seul constant.

§. XVI.

Développement des cas de deux termes constants.

122. Nous avons dit (num. 3) que toutes les combinaisons de deux termes constants se réduisent à quatre, que nous y a- vons exprimées, en y ajoutant, qu' à la place de 24, qu' il devroit y en avoir pour les binaires des quatre termes variables restants après chaque binaire de constants, il n' y en a, que 16 de réellement différentes. Nous repéterons ici ces quatre binaires de constants, & nous y ajouterons pour chacun d' eux quatre de

cas

cas *variables*, qui y restent : on verra, que ces quatre contiennent tout ce qu' on peut y chercher : l' expression indépendante de la figure, & la dénomination des valeurs algébriques appliquées à propos sur la figure même correlativement à cette expression, font ici aussi la base de la réduction des 90 combinaisons, que nous avons exposées dans ce numéro, à 16. Voici ces combinaisons de deux termes constants, que nous avons mises dans le même numéro : 1°. deux côtés : 2°. un côté avec son angle opposé : 3°. un côté avec un des deux angles adjacents : 4°. deux angles.

123. Quand on a deux *côtés constants ; on peut chercher la relation des différences* 1°. pour *le troisième côté*, & son angle opposé : 2°. pour celui-là, & l' angle opposé à un des deux constants : 3°. pour l' angle opposé au troisième côté, & l' angle opposé à un des deux constants : 4°. pour les deux angles opposés aux deux côtés constants.

124. Pour le premier problême on nommera y, & z les deux côtés constants : on tirera pour dx, dp de l' équation I (num. 15) $dx = dpsin.zsin.q$. Pour le second on nommera x le côté constant opposé à l' angle, que l' on veut employer, & y à l' autre constant : on tirera pour dz, dp de la même équation I $dzcos.q = - dpsin.zsin.q$. On simplifiera en divisant par $sin.q$, & substituant $cot.q$ pour $\frac{cos.q}{sin.q}$, ce qui donnera $dzcot.q = - dpsin.z$. Pour le troisième on fera la même dénomination, & pour dp, dr on tirera de l'équation II $dpsinz = - drsin.xcos.q$. Pour le quatrième on appellera x, & y les deux côtés constants, comme on veut : on tirera pour dp, dq de l' équation III $dpcot.p = dqcot.q$.

125. Quand on a un côté avec son angle opposé constant, on peut chercher la relation des différences 1°. pour les deux autres côtés : 2°. pour un de ces deux côtés, & l' angle opposé à l' autre : 3°. pour un des mêmes côtés, & son angle opposé : 4°. pour les deux angles opposés aux mêmes côtés.

126. Pour tous ces problêmes on appellera x le côté constant, l' angle constant restant toujours p. Pour le premier problême

on

on appellera les deux autres côtés y, & z, comme on veut : on tirera pour dy, dz de l'équation I $dycos.r = - dzcos.q$. Pour le second on appellera y le côté variable, que l'on veut comparer avec l'angle r : on tirera pour dy, dr de l'équation II $dycos.zsin.p = - drsin.xcos.q$: pour simplifier on divisera par $sin.p$, on substituera $\frac{sin.y}{sin.q}$ pour $\frac{sin.x}{sin.p}$, & $cot.q$ pour $\frac{cos.q}{sin.q}$, & on aura $dycos.z = - drsin.ycot.q$. Pour le troisième on appellera de même y le côté à comparer avec q, & on tirera pour dy, dq de l'équation III $dycot.y = dqcot.q$. Pour le quatrième on appellera les deux autres côtés y, & z, comme on veut : on tirera pour dq, dr de l'équation IV $dqcos.z = - drcos.y$.

127. Quand on a pour constants un côté avec un angle adjacent à ce côté, on peut chercher la relation 1°. pour les deux autres côtés : 2°. pour un de ces deux côtés & l'angle opposé au côté constant : 3°. pour un des mêmes côtés, & l'autre angle adjacent au côté constant : 4°. pour les deux angles variables.

128. Pour le premier problême on nommera x le côté opposé à l'angle constant qui sera p, z le côté constant : on tirera pour dx, dy de l'équation I $dx = dycos.r$. Pour le second on appellera y le côté constant, z le côté opposé à l'angle constant : on tirera pour dx, dp de l'équation II $dxsin.q = dpsin.z$. Pour le troisième on nommera x le côté constant, z le côté opposé à l'angle constant, qui sera r : on tirera pour dy, dp de l'équation II $dycos.zsin.p = - dpsin.z$, ou $dysin.p = - \frac{dpsin.z}{cos.z} = - dptan.z$. Pour le quatrième on appellera x le côté constant, y le côté opposé à l'angle constant qui sera q : on tirera pour dp, dr de l'équation IV $dp = - drcos.y$.

129. Quand on a pour constants deux angles ; on peut chercher la relation des différences 1°. pour le côté compris entre ces angles, & un des deux autres : 2°. pour les deux côtés opposés aux mêmes angles : 3°. pour le côté compris entre ces deux angles, & son angle opposé : 4°. pour un des deux côtés adjacents, & le troisième angle.

130. Pour le premier problême on nommera x & z le côtés opposés aux angles constants, qui seront p & r : on tirera pour dx, dy de l'équation II $dx \sin.q = dy \cos.z \sin.p$. Pour le second on appellera x & y les côtés opposés aux angles constants, qui seront p & q : on tirera pour dx, dy de l'équation III $dx \cot.x = dy \cot.y$. Pour le troisième on appellera y & z les côtés opposés aux angles constants, qui seront q & r : on tirera pour dx, dp de l'équation IV $dx \sin.r \sin.y = dp$. Pour le quatrième on appellera x & y les côtés opposés aux angles constants, qui seront p & q : on tirera pour dx, dr de l'équation IV $dx \sin.r \sin.y = dr \cos.y$, où en divisant par $\sin.y$, & mettant $\cot.y$ pour $\frac{\cos.y}{\sin.y}$ on aura $dx \sin.r = dr \cot.y$.

131. Si l'on prend dans la fig. 1 deux des six termes, comme on veut, pour constants ; on trouvera nécessairement, que cette combinaison appartient à une des quatre, que nous avons mises au num. 3 & 10. En appliquant la recherche à un triangle particulier, comme à l'ABC de la fig. 1, il y aura 15 combinaisons en apparence différentes pour les deux termes constants : on les trouve en combinant le premier de six termes AB, BC, AC, ACB, BAC, ABC avec les cinq suivants, le second avec les quatre, le troisième avec les trois, le quatrième avec les deux, le cinquième avec les derniers. Les voici 1°. AB, BC : 2°. AB, AC : 3°. AB, ACB : 4°. AB, BAC : 5°. AB, ABC : 6°. BC, AC : 7°. BC, ACB : 8°. BC, BAC : 9°. BC, ABC : 10°. AC, ACB : 11°. AC, BAC : 12°. AC, ABC : 13°. ACB, BAC : 14°. ACB, ABC : 15°. BAC, ABC. Or on s'apercevra bien, que parmi nos quatre des num. 3, & 122, la première contient la 1, 2, 6 de ces 15, la seconde les 3, 8, 12, la troisième les 4, 5, 7, 9, 10, 11, la quatrième les 13, 14, 15.

132. Les six binaires, qu'on devroit avoir pour les quatre variables, qui restent dans chacune de ces combinaisons de deux termes constants, se réduisent à quatre, parcequ'il y en a toûjours deux doubles, qui par la dénomination arbitraire s'appliquent de deux manières. Telles sont pour exemple les équations

2, &

2, & 3 du num. 124. Si dans la fig. 1 on a pour constants les côtés AB, BC, & qu'on cherche la relation des différences pour le côté AC, & pour l'angle C; on fera dans la solution du second problême AB $= x$, BC $= y$, & on aura AC $= z$, ACB $= p$, BAC $= q$, ABC $= r$. L'équation $dz\,cot.q = -dp\,sin.z$, c'est-à-dire d.AC$\times$*cot*.BAC $= -d$.ACB$\times$*sin*.AC, donnera la proportion suivante d.AC : $-d$.ACB :: *sin*.AC : *cot*.BAC. Mais si l'on cherche la relation pour le même côté AC, & pour l'angle BAC; on fera BC $= x$, AB $= y$, & on aura AC $= z$, BAC $= p$, ACB $= q$, ABC $= r$: la même équation donnera d.AC$\times$*cot*.ACB $= -d$.BAC$\times$*sin*.AC, c'est-à-dire d.AC : d.BAC :: *sin*.AC : *cot*.ACB. Ce n'est pas différent dans l'expression générale, & dans l'équation, qui en résulte, mais dans l'application au triangle particulier dessiné par des lettres, qui ont été mises arbitrairement sur ces angles. Par le signe négatif on voit, qu'un de ces termes augmentant, l'autre diminue.

§. XVII.

De cas d'un terme constant.

133. En supposant un seul de six termes constants, il y auroit déjà six cas: pour chacun il y a 5 variables, qui font chacun 10 combinaisons de trois, ce qui donneroit 60 combinaisons, qui pourtant se réduisent toutes à 12 seules. Je donnerai premiérement les deux cas réellement différents d'un terme constant, & après les 5 combinaisons des variables, qui contiennent toutes les autres.

134. On peut supposer constant 1°. un côté, 2°. un angle. Pour le premier cas les combinaisons réellement différentes de trois termes variables sont 1°. les deux autres côtés avec l'angle opposé au terme constant: 2°. les deux autres côtés avec l'angle opposé à l'un d'eux: 3°. un côté variable avec deux angles, un opposé au côté constant, & l'autre à l'autre côté variable: 4°. un côté variable avec deux angles, un opposé à ce côté même, & l'autre au côté constant: 5°. un côté variable a-

vec les deux angles opposés aux deux côtés variables : 6°. les trois angles. Il y en a autant pour le cas d' un seul angle constant : on les aura en changeant le mot côté en angle, & viceversa. On voit bien, que quand on a un côté constant, toutes les combinaisons des trois parmi les cinq autres variables appartiendront à une de six premières : la même chose arrivera quand il y a un angle constant. Nous ferons voir, que la première & la dernière sont simples ; mais les quatre intermédiaires sont doubles par la liberté qu' on y a d' appliquer la même lettre ou à l' un, ou à l' autre des deux côtés variables. Pour trouver l' équation, qui doit appartenir à chacune de ces combinaisons, il suffit d' ajouter le terme constant aux trois variables, qui y appartiennent, & on verra aisément à quelle des quatre combinaisons des équations générales elle se rapporte.

135. Pour la première d' un côté constant, on aura le 3 côtés, & un angle opposé au constant. Donc il faut nommer x le côté constant, & on appellera les deux autres y, & z comme on veut : on tirera pour dy, dz, dp de l' équation I $dycos.r + dzcos.q + dpsin.zsin.q = o$. Pour la seconde on aura de même trois côtés, & un angle ; mais comme celui-ci ne sera pas opposé à l' angle constant, il faut appeller son côté opposé x, & appeller y le constant : on tirera pour dx, dz, dp de la même équation I $dx - dzcos.q - dpsin.zsin.q = o$. Pour la troisième on aura deux côtés avec deux angles, dont un opposé au constant, & l' autre opposé à un variable, & pour cela intercepté entre le constant, & le premier variable : ainsi pour l' équation II il faudra nommer x le côté constant, & z le variable opposé à l' angle r : alors pour dy, dp, dr on en tirera $dycos.zsin.p + dpsin.z + drsin.xcos.q = o$. Pour la quatrième on aura de même deux côtés avec deux angles opposés à ces mêmes côtés : on nommera x le côté constant, y l' autre côté, & pour dy, dp, dq on tirera de l' équation III $dycot.y + dpcot.p - dqcot.q = o$. Pour la cinquième on aura deux côtés avec deux angles, dont un intercepté entre le constant & le variable : on nommera y le côté constant, x le variable, & pour dx, dp, dr on

tirera

tirera de l' équation II $dxsin.q - dpsin.z - drsin.xcos.q = o$. Pour la dernière on aura trois angles, & un côté, qui est le constant : ainsi il faudra appeller x celui-ci, & appellant y, z les deux autres, comme on veut, on tirera pour dp, dq, dr de l' équation IV $dp + dqcos.z + drcos.y = o$.

136. La méthode pour les cas d' un angle constant, est tout-à-fait semblable à celle-ci, qui peut servir d' exemple toute seule. Si l' on veut les six équations pour ce second cas ; on peut aussi les tirer de ces six *en substituant les angles aux côtés opposés*, & *viceversa*, & *en changeant à cause des suppléments les signes des co-sinus*, & *des co-tangentes*, & *si l'on veut aussi ceux des différences*. *Mais il faut se souvenir*, qu' à cause des suppléments, les différences, les co-sinus, les co-tangentes changent des signes, les tangentes les changent aussi ; mais il n' y en a pas dans les six équations du numéro précédent, qu' il faut transformer. Chaque terme a une des différences, qui en feroit changer le signe, si dans le coefficient il n' y a un co-sinus, ou une co-tangente : mais alors le premier terme des équations seconde, cinquième, & sixième, dont les coefficients n' en ont pas, commenceroient par un terme négatif. Pour commencer toujours par un positif, nous ferons tout le contraire dans ces trois équations : nous y retiendrons les signes de tous les termes, qui *n' en ont pas*, & *les changerons dans ceux*, *qui en ont* : dans *la première*, *troisième*, & *quatrième* nous retiendrons les signes pour les termes, qui en ont, & nous les changerons pour ceux qui n' en ont pas. Avec cette réflexion nous allons faire la transformation en substituant p, q, r pour x, y, z, & viceversa. Pour la première de ces six équations on aura p constant, & $dqcos.z + drcos.y - dxsin.rsin.y = o$. Pour la seconde on aura q constant, & $dp + drcos.y - dxsin.rsin.y = o$. Pour la troisième on aura p constant, & $dqcos.rsin.x - dxsin.r + dzsin.pcos.y = o$. Pour la quatrième on aura p constant, & $dqcot.q + dxcot.x - dycot.y = o$. Pour la cinquième on aura q constant, & $dpsin.y - dxsin.r + dzsin.pcos.y = o$. Pour la dernière on aura p constant, & $dx - dycos.r - dzcos.q = o$.

137.

137. Nous ferons voir à présent, comment les 30 combinaisons appartenantes à un triangle déterminé, quand on en fait constant un des trois côtés l'un après l'autre, sont renfermées dans les six premières d'ici, & ce sera la même chose pour les 30 autres d'un angle constant. Pour trouver les combinaisons de trois, nous commencerons par celles de deux de la manière, que nous avons fait au num. 131. Si l'on a pour constant le côté AB (fig. 1), on aura pour variables BC, AC, ACB, BAC, ABC. Les binaires seront dix 1°. *BC*, *AC* : 2°. BC, ACB : 3°. BC, BAC : 4°. BC, ABC : 5°. *AC*, *ACB* : *6*°. AC, BAC : 7°. AC, ABC : 8°. ACB, *BAC* : *9*°. ACB, *ABC* : *10*°. *BAC*, ABC. On trouvera *les combinaisons de trois* en combinant chacun de ces binaires avec tous les termes, qui viennent après lui, s'il y en a. Ainsi on aura 1°. BC, AC, ACB : 2°. BC, AC, BAC : 3°. BC, AC, ABC : 4°. BC, ACB, BAC : 5°. BC, ACB, ABC : *6*°. BC, BAC, ABC : 7°. AC, ACB, BAC : 8°. AC, ACB, ABC : 9°. AC, BAC, ABC : 10°. ACB, BAC, ABC. Or la combinaison 1 de ces dix appartient à la première des cinq du numér. 134 : la 2, & 3 à la seconde : la 5, & 8 à la troisième : la 4, & 8 à la quatrième : la *6*, & *9* à la cinquième : la dernière à la dernière. Il y en a autant, si l'on a pour constant le côté BC, & autant pour AC constant, qui ensemble font 30 : autant pour un *angle constant*, ce qui *forme 60*.

138. Tout ce grand *détail*, *toute la quantité des équations*, que nous avons *trouvées* à deux, & à trois termes, qui beaucoup moins nombreuses ne laissent pas d'être encore en un bon nombre, & qui demanderoit des tables, & des avertissements pour la distribution des lettres, & pour la détermination de ce, qui doit être supposé constant, tout cela devient inutile, si l'on s'accoutume à la manière, que nous avons exposé dans le §. XVI, d'employer les quatre équations générales du num. 15, en les appliquant aux cas particuliers, soit qu'il y ait deux termes constants, ou un seul, ou aucun. Dans l'Opuscule I du Volume précédent, où il s'agit de la détermination des orbites des comètes, on a, comme nous l'avons dit ci-dessus, des exemples de

toutes

toutes ces trois espèces, de deux termes constants, d' un seul, d' aucun, avec l' application des équations générales aux triangles plans. Généralement dans l' Astronomie on n' a fait usage jusqu' à présent, que des équations, ou des analogies appartenantes aux cas de deux termes constants: nous donnerons ici des exemples pour des problêmes, qui demandent ces cas-là, & qui déjà on est accoutumé de résoudre dans les traités d' Astronomie, en y employant immédiatement nos équations générales à quatre termes, & la *considération des quatre combinaisons*, qui y appartiennent, *& qui sont beaucoup moins embarrassantes étant beaucoup moins nombreuses*.

139. Les problêmes, que j' ai choisi, sont les suivants, que nous traiterons chacun à part dans un paragraphe particulier. Nous déterminerons 1°. La vîtesse de la montée d' un astre sur l' horizon, & de sa descente. 2°. La correction du midi trouvé par les hauteurs correspondantes du soleil. 3°. Le jour du plus court crepuscule. 4°. La position de Vénus dans sons orbite, qui en donne le plus grand éclat, dans la supposition, que la lumière soit proportionnelle à la grandeur de la partie éclairée de son disque divisée par le quarré de la distance. Communement on fait usage pour les deux premiers des analogies particulières, qui supposent deux termes constants: nous y employerons immédiatement *nos formules générales modifiées par l' évanouissement des différences de ces termes*. Ordinairement on fait la solution de deux derniers, en se servant d' autres principes: nous les résoudrons par l' application des mêmes équations générales, où nous aurons aussi deux termes constants, & pour le dernier il y aura l' application à un triangle plan. Ces sont des problêmes appartenants au calcul différentiel des infiniment petits appliqué à la recherche d' un maximum, ou minimum: on se débarrassera avec toute la facilité des quantités infinitesimales, & la solution entière du premier de ces deux sera très-simple, celle du second aura besoin d' un peu plus de calcul pour être achevée. On aura occasion conformément au num. 112 dans le second de ces quatre problêmes de faire le changement d' un coefficient plus simple, en

un

un autre plus composé; mais plus propre à trouver ce qu' on cherche à cause des termes donnés par la solution immédiate, qui sont inconnus, & qu' on devroit trouver dans le triangle, qu' on employe. On y verra aussi le danger de grands erreurs, quand les différences non infiniment, mais physiquement petites sont employées sans précaution, conformément à ce, que nous avons dit au §. IX.

§. XVIII.

Application des équations générales à la détermination de la vîtesse de la montée d' un astre sur l' horizon, & de sa descente.

140. Soit (fig. 6) Z le zenith, P le pôle de l' équateur, S un astre. L' angle ZPS est proportionnel au temps à raison de 15 degrés par heure. La vîtesse, qu' on cherche, est la raison du changement de la distance au zenith ZS au changement de l' angle horaire ZPS. La combinaison est de trois côtés avec un angle: les deux côtés PZ, PS sont constants, & le troisième ZS variable avec l' angle ZPS. Il faut faire (num. 116) ZS $= x$, & on peut faire PS $= y$, PZ $= z$. On aura ZPS $= p$, PZS $= q$, PSZ $= r$. Dans l' équation I (num. 15) on aura $dy = 0$, $dz = 0$, & $dx = dp sin. z sin. q$, ce qui donnera la vîtesse de la montée ou descente $\frac{dx}{dp} = sin. z sin. q = sin.\text{PZ} \times sin.\text{PZS}$. Elle dépendra de la latitude du lieu, qui est le complément de PZ, & dans un même lieu du seul angle azimuthal PZS déterminé par les azimuthes en commençant par le point du Nord. Sur le même azimuth elle sera proportionnelle au co-sinus de la latitude, & dans un même lieu au sinus du même angle azimuthal PZS. Si l' on considère cette seconde relation, qui intéresse d' avantage l' observateur, ce sinus a son maximum, lorsque l' astre est sur le premier vertical, où il devient $= 1$, & il s' évanouit sur le Méridien tant du côté du Sud, où l' angle azimuthal

de-

devient $= 180°$, que du côté du Nord, où il devient $= 0$: la tangente du mouvement diurne y devient parallèle à l' horizon; & la vîtesse, qui est la dernière limite de toutes les raisons des petits espaces *dx* de montée, aux petits temps employés pour arriver à une distance déterminée du Méridien quelconque, sera exactement en raison du sinus de l' angle azimuthal même très-près du Méridien, où elle s' évanouit.

141. Ce n' est pas la même chose, si l' on considère les différences petites, *mais finies*. Alors on pourroit faire une erreur même infinie *selon les dangers*, *que nous avons énoncés dans le* §. *IX*. *Si l'on* cherche le nombre des secondes du temps employé pour monter, ou pour descendre d' une minute; on aura $dp = \frac{dx}{sin.z sin.q}$. La valeur *dx* sera $= 60''$, & si l' on appelle *dt* ce petit temps réduit en secondes, on a $dt = \frac{1}{15} dp = \frac{4''}{sin.z sin.q}$. Cette formule donnera la valeur du petit temps très-approchante de la vraie, quand le *sin.z*, & *sin.q* ne seront pas trop petits, c'est-à-dire quand le lieu ne sera pas trop près du pôle, ou l' astre du Méridien. Le temps dans un même lieu sera le plus court pour les astres, qui sont sur le premier vertical, où le *sin.q* devient $= 1$, & le temps est le plus court possible $= \frac{4''}{sin.z}$, ce qui *rend cette position la plus propre pour employer* les hauteurs correspondantes. Le temps dans des différents azimuths sera différent en raison inverse du sinus de l' angle azimuthal ayant son minimum sur le premier vertical, où ce sinus devient le plus grand égal au rayon. Mais si l' astre s' approche trop du Méridien, la formule devient fautive, & l' erreur peut aller à l' infini.

142. Lorsque la distance du pays au pôle est moindre d' une demi-minute, la formule donne une quantité très-grande, mais finie, qui devient infinie, quand le lieu est dans le pôle même: mais l' astre sous le même pôle, ne peut jamais ni monter, ni descendre: pour celui, qui est éloigné du pôle d' une demi-minute, tout astre, qui a la déclinaison constante, comme on l' a suppo-

sé *ici*, met douze heures à faire la montée, & la descente d'une minute en allant d'un côté du Méridien à l'autre opposé, & non un temps infini exigé par le $sin.q = 0$. C'est la même chose pour l'approche d'un astre au Méridien. Si cet astre est sur l'équateur, PS est $= 90°$; si le lieu a la latitude de 50°, SM étant l'équateur, on aura $ZM = 50°$, en ajoutant une minute, $ZS = 50°, 1'$: par la formule trigonométrique $cos.SM = \frac{cos.ZS}{cos.ZM}$, on trouve $SM = 1°. 30'$. C'est la mesure de l'angle ZPS, qui *réduit en temps ne donne que 6'* à la place de l'infini de la formule. Elle fait voir seulement, que *le temps dans cette position est beaucoup plus long qu' ailleurs*; mais prise à la rigueur porte une erreur infinie.

143. C'est la différence essentielle de l'usage des formules différentielles appliquées à des quantités infiniment petites, & à des quantités physiquement petites, mais finies. Dans la première application elles donnent exactement les limites des raisons, que Newton appelle *rationes primas nascentium, & postremas evanescentium*, & qui sont les vraies raisons exactes des quantités finies, qui étoient toujours proportionnelles à celles, qui se sont évanouies à la fin: celles-là restent avec cette raison, quand celles-ci ne sont plus rien, & par conséquent n'ont plus ni cette raison, ni *aucune autre vrai rapport*. Dans la seconde application il y a un grand danger de fautes très-grossières, & même infinies, si l'on n'y prend bien garde. Nos équations sont très-utiles encore pour le second usage, mais le sont beaucoup plus pour le calcul différentiel réellement infinitesimal.

§. XIX.

Application des mêmes équations à la correction du midi trouvé par les hauteurs correspondantes.

144. ON se sert des hauteurs correspondantes du soleil pour déterminer le midi. On écrit l'heure marquée par la pendule, quand on a pris avant midi une hauteur du soleil sur l'horizon,

& l'

& l'autre marquée au moment de son rétour après midi à la même hauteur : le milieu entre ces deux temps est celui du midi, ce qui est presqu' exact dans les solstices, dans lesquels le soleil ne change pas sensiblement sa distance au pôle. Si les points S, & S' sont les lieux du soleil avant, & après midi ; dans les triangles ZPS, ZPS' les trois côtés seront égaux, & pour cela les angles horaires au pôle P de même égaux. Mais hors des solstices le soleil s'éloignant du pôle P, ou s'en approchant, doit arriver à la même *distance du zenith plutôt*, ou plus tard. La figure exprime *le second cas*. ZS'' représente la distance au zenith *égale à la* ZS', & l'angle S'PS'' est la différence des deux angles horaires en P : la correction est la *moitié* de cet angle réduit en secondes, & divisé par 15, c'est-à-dire l'angle même divisé par 30. Or on a ici aussi la combinaison des trois côtés avec l'angle, deux côtés étant constants : on y fera de même ZS' $= x$, ZPS' $= p$, PZ $= y$, PS' $= z$; mais on aura x, & y constants, dx, & $dy = 0$: l'équation I donnera $dz cos.q = - dp sin.z sin.q$: en divisant par $sin.z sin.q$, & mettant $cot.q$ pour $\frac{cos.q}{sin.q}$, on aura $dp = - \frac{dz cot.q}{sin.z}$.

145. On a $sin.z$, qui sera le co-sinus de la déclinaison : pour avoir dz, on prendra la différence de la déclinaison, qui répond *à 24 heures*, *en ôtant la déclinaison de ce jour*, qu'on a dans *la connoissance des temps*, de celle du jour suivant, & la divisant par 24, ce qui donnera la valeur de dz pour une heure : en multipliant cette valeur par le nombre d'heures de l'intervalle entre les observations, on la réduira pour cet intervalle. On fera encore mieux à prendre la différence de la déclinaison du jour précédent à celle du jour après, & la diviser par 48. Il n'y reste, que l'angle PS'Z $= q$.

146. Comme il s'agit d'une quantité bien petite, on pourroit bien *trouver* cet angle par *la* construction graphique proposée, & *démontrée* dans le premier des Mémoires correlatifs du premier Opuscule *du Volume précédent*. L'opération pratique en a été exposée dans le même Opuscule, & ce qui appartient

au cas présent y est indiqué au num. *286*: Il s'agit ici, comme-là, d'un triangle sphérique, dans lequel on a deux côtés avec l'angle compris, & on y cherche un de deux autres angles; mais là on avoit besoin de trouver l'angle adjacent au côté, qu'on y avoit choisi pour premier, parcequ'il revenoit toujours le même; ici nous cherchons son opposé, & nous mettrons seulement ce qui sert à trouver son complément, qui est ici le seul nécessaire.

147. On fera un cercle (*fig. 7*) avec un rayon arbitraire CB, & on y prendra les arcs *AB*, *BD* égaux aux deux côtés donnés PZ, PS' de la *fig. 6*: on tirera les deux diamètres *BE*, *DF*, & la corde AG perpendiculaire au premier, qui en sera coupée par le milieu en *H*: on fera un demi-cercle avec le rayon HG, & on y prendra l'arc GI mesure de l'angle ZPS' donné dans la même fig. *6*: on baissera IK perpendiculaire sur le diamètre AG, & par le point K on tirera KN perpendiculaire au diamètre DF: on prendra sur le diamètre AG prolongé, s'il le faut, K*n* = KN, & on tirera I*n*. L'angle KI*n* sera le complément de l'angle PS'Z de la fig. *6*.

148. Comme ici on n'a besoin, que de sa co-tangente, on peut se passer de la ligne I*n*, & du point *n*: cette co-tangente sera $= \frac{KN}{KI}$; mais on pourra se passer aussi du demi-cercle, & de la ligne KI, même de la KN, qu'il ne sera pas nécessaire de tirer, parcequ'on pourra prendre avec le compas la distance du point K au diamètre DF. On employera seulement un compas de proportion, & la table des sinus. On fera le rayon CB du cercle de 100 parties de l'échelle longitudinale de cet compas, & on fera ce cercle. On prendra de la table des sinus au rayon 100 le double des sinus des arcs BA, BD, dont le premier est le complément de la latitude du lieu, & le second = 90° ± la déclinaison australe, ou boréale du soleil. On prendra sur la même échelle ces deux nombres, qui donneront les cordes BA, BD. Ayant déterminé les points A, & D on tirera les diamètres BE, DF avec la corde AHG perpendiculaire au premier:

on

on appliquera AH sur le même compas aux nombres 100 transversalement, ou si l'on veut, on prendra sur l'échelle longitudinale du même compas le sinus de l'arc AB tiré de la table, pour l'adapter ainsi transversalement, parceque c'est la valeur de AH. On aura ainsi l'échelle de 100 parties pour le rayon du demi-cercle : on prendra de cette échelle transversale le co-sinus de l'angle donné, & on le portera en HK vers G, ou A, selon que cet angle sera aigu, ou obtus : on prendra la distance du point K au *diamètre DF*, & *on en trouvera la valeur numérique sur cette échelle transversale en comptant pour centièmes du rayon* $= 1$ *les parties données par cette échelle*, & on *fera cette valeur* $=$ N. *La ligne IK sera dans les parties de la* même unité le sinus de l'angle donné, & la co-tangente cherchée de l'angle (fig. 6) PS'Z $= \frac{N}{sin.ZPS'}$. La formule $dp = -\frac{dz\,cot.q}{sin.z}$ sera $= \frac{dz \times N}{sin.ZPS' \times sin.PS'}$.

149. On n'aura emprunté de la construction, que la seule distance (fig. 7) KN. On pourroit bien la trouver par la Trigonométrie plane dans le triangle HKN : l'angle en K du quadrilatère CHKN est le supplément de l'angle HCN mesuré par le côté BD, à cause des angles droits CHK, CNK, & l'angle KNH $=$ KCH, *puisqu'un cercle du diamètre CK passe par H*, & N : *on a l'angle KCH, dont la tangente est* $\frac{HK}{HC}$, & on trouve cette expression aisément relativement au rayon du premier cercle fait $= 1$: relativement à cette unité on a HC $= cos.$BA, & HA rayon du demi-cercle $= sin.$BA : ainsi on a cette proportion $1 : cos.$GHI, qui est l'angle ZPS' de la fig. 6, :: HI $=$ HA $=$ $sin.$BA, qui est le côté ZP de la fig. 6 : HK, dont la valeur dans cette figure sera $cos.$ZPS' $\times\, sin.$ZP. Ainsi la tangente de l'angle HNK *de la fig. 7* $=$ HCK *sera dans les valeurs de la fig. 6* $= \frac{cos.ZPS' \times sin.ZP}{cos.ZP} = cos.ZPS' \times tan.ZP$. Cette valeur donnera aisément dans la fig. 7 l'angle HNK : pour trouver la valeur

de

de la KN $= HK \times \frac{sin.NHK}{sin.HNK}$: il faut trouver aussi l'angle NHK : il est $= NCH - HCK = NCH - HNK$, & le premier de ces deux angles a pour meſure BD, qui dans la fig. 6 eſt le côté PS'. Ainſi ſi l'on fait l'angle HNK $= D$, & l'angle NHK $= E$; on aura relativement à la fig. 6 $tan.D = cos.ZPS' \times tan.ZP$, & $E = PS' - D$. On aura de même dans ces valeurs la KI de la fig. 7 $= sin.ZP \times sin.ZPS'$; parcequ'on aura la proportion ſuivante, $1 : sin.KHI :: HI = sin.BA : KI = sin.BA \times sin.KHI$, & par rapport à la fig. 6 $= sin.ZP \times sin.ZPS'$. Si l'on met pour HK ſa valeur $cos.ZPS' \times tan.ZP$; on aura KN $= \frac{cos.ZPS' \times tan.ZP \times sin.E}{sin.D}$, & $cot.q = \frac{KN}{KI} = \frac{cos.ZPS' \times tan.ZP \times sin.E}{sin.ZP \times sin.ZPS' \times sin.D}$ $= \frac{cot.ZPS' \times sin.E}{cos.ZP \times sin.D}$; dp ſera $= - \frac{dz cot.q}{sin.z} = - \frac{dz \times cot.ZPS' \times sin.E}{sin.PS' \times cos.ZP \times sin.D}$.

150. Mais ſans chercher les deux angles E, & D, on peut changer le coefficient incommode $cot.q$, en y ſubſtituant ſa valeur tirée de la ſeconde des deux formules de Trigonométrie ſphérique, que nous avons miſes au num. 30. On y a $cot.A = \frac{cot.BC \times sin.AB}{sin.B} - cos.AB \times cot.B$. Cela eſt corrélatif au triangle ſphérique ABC de la fig. 1 : les lettres correſpondantes à ces trois ſont ici S', P, Z, & l'angle A ſera le q d'ici : nous aurons $cot.q = \frac{cot.PZ \times sin.PS'}{sin.ZPS'} - cos.PS' \times cot.ZPS'$. Ayant ſubſtitué cette valeur pour $cot.q$, & $sin.PS'$ pour $sin.z$ dans la formule $dp = - \frac{dz cot.q}{sin.z}$, on aura l'angle cherché $dp = - \frac{dz \times cot.PZ}{sin.ZPS'}$ $+ \frac{dz \times cos.PS' \times cot.ZPS'}{sin.PS'} = \frac{dz \times cot.PZ}{sin.ZPS'} - dz cot.PS' \times cot.ZPS'$.

151. Par-là on a deux termes à la place d'un ; mais on n'y trouve pour coefficient de la valeur dz donnée par le changement en déclinaiſon, que PZ complément de la latitude du lieu,

PS'

PS' complément de la déclinaison du soleil, & l' angle ZPS', qui est donné par le temps écoulé entre les deux hauteurs correspondantes, il est la moitié de ce temps réduit en parties de l' équateur. Cette formule est commode pour calculer les tables: on appelle cette correction équation, qui est additive depuis le solstice d'été jusqu' à celui d' hiver; parceque la distance au pôle augmentant, le soleil arrive à la même distance du zenith plutôt, & soustractive dans le reste de l' année. On prend pour argument *de cette équation à une latitude du lieu donnée la* longitude *du soleil, & la moitié de l' intervalle du temps entre les deux observations* en heures. Pour la réduire en secondes de temps *dépendamment des longitudes* on sait *par les tables* astronomiques le mouvement diurne du soleil en longitude, qui *répond* à chaque longitude dans la position présente de l' apogée; & on ne fera aucune erreur sensible pour des quantités si petites, si l' on le prend d' un degré: on trouve dans les mêmes tables la différence en déclinaison, qui répond à chaque degré de longitude: en divisant cette différence par 24, on l' aura pour une heure: pour la moitié de l' angle *dp* réduit en secondes de temps on devra encore la diviser par $2\times 15 = 30$. Ce sera la valeur *dz* pour une heure d' intervalle: on l' aura pour tout autre intervalle en la multipliant par le nombre des heures: on calculera *la valeur de la formule finale du numéro précédent selon* cette *valeur, en employant la distance* au pôle PS', qui convient à cette longitude, & qui est 90° ± *décl.*, le complément de la latitude du lieu PZ, & 15° par heure pour l' angle ZPS' de chaque intervalle, dont on veut mettre la moitié pour argument de la table: on aura ainsi les valeurs pour cette table. La dernière précision exigeroit pour chaque heure la résolution des deux triangles sphériques ZPS', ZPS'': les formules différentielles abrègent *immensement* le calcul sans commettre des erreurs, qu' on ne puisse *négliger*, quoiqu' *il s' agit d' une distance* assez considérable du *midi*, & de *l' horizon*, qui *sont* nécessaires pour cette espèce d' observations: *nos équations* générales épargnent la peine de chercher parmi les 24 analogies, ou parmi nos *16* é-

qua-

quations des cas de deux termes constants, quelle est celle, qui convient à ce cas particulier.

§. XX.

Application des mêmes équations à la détermination du plus court crépuscule.

152. ON fait commencer le crépuscule du matin, qui est le commencement de l' aurore, & finir celui du soir, quand le soleil est à 18 degrés au dessous de l' horizon. Nous concevrons le triangle PSZ dans deux circostances: dans la première nous aurons ZS $= 90°$, le soleil étant à l' horizon: dans la seconde le même côté sera $= 108°$. Le côté PZ sera toujours le complément de la latitude du lieu, & le côté PS $= 90 \pm$ *déclin.*: le premier de ces deux angles mesure l' intervalle de temps écoulé entre le lever, ou le coucher du soleil, & le midi: le second l' autre entre le commencement du crépuscule du matin, ou la fin de celui du soir, & le midi même: ainsi la différence des deux angles ZPS sera la mesure de la durée du crépuscule: si l' on nomme cet angle dans les deux positions du soleil p, & p', la valeur $p - p'$ sera proportionnelle à la durée du crépuscule: elle sera différente pour le même lieu, selon que l' arc PS sera différent. *Dans le calcul différentiel* pour trouver un maximum, ou un minimum, ordinairement on met la différence $= 0$, & on en tire les conséquences. Nous suivrons d' abord cette méthode, & nous déterminerons par-là le minimum du crépuscule, que nous cherchons, en faisant $dp - dp' = 0$, & $dp = dp'$; mais après nous ferons des réflexions utiles sur la méthode même. Nous trouverons la formule, qui exprime la différence de la durée du crépuscule, & nous la ferons $= 0$.

153. On voit bien, que le cas appartient aussi à la combinaison de trois côtés avec un angle: il a deux termes constants, le PZ toujours le même, & le ZS le même $= 90°$ pour le triangle du coucher, ou lever du soleil, & de $108°$ pour le commencement du crépuscule du matin, ou la fin de celui du soir, tandis que

le

le troisième côté ZS varie par la variation de la déclinaison, & fait varier l' angle en P $= p$, ou $= p'$, dont nous devons employer les deux variations $dp = dp'$. Ainsi pour avoir dans l'équation différentielle l' angle ZPS $= p$, on devra faire ZS $= x$: on pourra faire y, & z les deux autres, comme on veut : nous ferons comme dans les deux problêmes précédents PZ $= y$, PS $= z$, & nous aurons comme auparavant $dp = -\frac{dz cot.q}{sin.z}$, $dp' = -\frac{dz cot.q'}{sin.z}$, & ces deux valeurs faites égales entr' elles doivent donner *la solution du problême*. Or on y a la distance PS du soleil au pôle, & sa variation la même pour les deux triangles, qui répondent aux deux angles p, & p' de la même journée, ce qui rend dz, & $sin.z$ communs : ainsi on aura encore $cot.q' = cot.q$, & pour résoudre le problême il suffira de trouver une fonction quelconque de ces angles par les trois côtés des deux triangles : l'égalité des deux valeurs de cette fonction rendra aussi égales les valeurs des deux co-tangentes, & par-là on aura la solution du problême.

154. Nous avons dans la première des deux formules du numér. 30 le co-sinus d' un angle par les trois côtés $cos.A = \frac{cos.BC - cos.AB \times cos.AC}{sin.AB \times sin.AC}$: en y mettant les lettres S, P, Z pour A, B, C on aura $cos.S = \frac{cos.PZ - cos.PS \times cos.ZS}{sin.PS \times sin.ZS}$. L' angle S est notre q : ainsi il faudra prendre les deux valeurs, qu' on tire de cette formule, en y supposant pour la première ZS $= 90°$, & pour la seconde $= 108°$, & les faire égales. PZ sera pour toutes les deux le complément de la latitude, & PS le complément de la déclinaison ôtée de 90°, ou y ajoutée. Un des deux diviseurs $sin.$PS sera commun, & on l' ôtera. Dans la première on aura $cos.ZS = cos.90° = 0$, $sin.ZS = 1$: ainsi elle se réduira à $cos.PZ = sin.lat.$ Dans la seconde on aura $\frac{sin.lat. - cos.PS \times cos.108°}{sin.108°}$, ce qui donnera $sin.108° \times sin.lat. = sin.lat. - cos.PS \times cos.108°$, ou $cos.PS = \frac{(1 - sin.108°) sin.lat.}{cos.108°}$.

155. Comme le co-sinus de 108° doit être négatif, le co-sinus de PS le devra être aussi, ce qui fait voir que PS doit être plus grand que de 90°: ainsi le *cos*.PS sera le sinus de la déclinaison australe pour les habitateurs de l' hémisphère boréal. L' expression $\frac{1 - sin.108°}{cos.108°}$ est $= \frac{1 - cos.18°}{sin.18°} = \frac{sin.vers.18°}{sin.18°}$, qui se réduit à *tan*.9°; parceque par les formules de Trigonométrie *sin.vers*.18° est $= 2sin^2.9°$, & $sin.18° = 2sin.9°cos.9°$, d' où l' on tire $\frac{sin.vers.18°}{sin.18°} = \frac{sin^2.9°}{sin.9°cos.9°} = \frac{sin.9°}{cos.9°} = tan.9°$ (*). Donc la déclinaison du plus court crépuscule est *australe*, & *a pour sinus* $sin.lat. \times tan.9°$. *C' est la solution qu' on trouve par les méthodes communes*. Pour Paris à l' Observatoire, dont la latitude en négligeant les secondes est = 48°. 50', cette formule donne 6°. 51', de déclinaison australe, qui se trouve 17 jours après l' équinoxe d' automne, & avant celui d' hiver.

156. Pour revenir à présent sur la méthode même, nous réprendrons l' expression de la différence $dp - dp'$, qui est $= \frac{dz(cot.q' - cot.q)}{sin.z}$; premiérement on peut avoir un maximum, ou minimum non seulement quand le coefficient de la quantité infiniment petite, qui avec elle exprime la différence, est = 0; mais encore, *quand elle devient égale à l' infini*. *Ici le coefficient deviendroit infini*, *si sin.z pouvoit devenir* = 0. Cela ne se peut pas; parceque la distance PS = *z*, ne peut devenir ni zero, ni = 180°, ce qui placeroit le soleil dans un des deux pôles: il y a de plus, que si ce cas fût possible, le soleil n'auroit aucun mouvement diurne, & il ne pourroit pas se trouver

le

(*) On voit plus aisément ce changement d' expression par la simple Géométrie linéaire. Si l' on tire dans la fig. 2 la corde AB, on y aura $tan.ABE = \frac{AE}{EB} = \frac{sin.vers.AB}{sin.AB}$. Or l' angle ABE est le complément de l' angle BAE, qui a pour mesure la moitié de l' arc BG: ainsi sa mesure est la moitié de AB, qui en est le reste à un demi-cercle, ce qui fait $\frac{sin.vers.AB}{sin.AB} = tan.\frac{1}{2}Ab$.

le même jour à l' horizon, & 18° au-dessous : ainsi ce coefficient ne peut pas devenir infini par son dénominateur. Il paroît au premier coup d' œil que le numérateur pourroit devenir infini parcequ' il y a des cas, dans lesquels l' angle ZSP peut devenir = o, ce qui rend infinie la co-tangente. Pour faire devenir l' angle ZSP = o, il faut que le point S soit sur le Méridien, ou le point Z au pôle. Dans ce second cas le soleil ne pourroit pas dans la même révolution être à l' horizon & 18° au-dessous, l' angle ZPS *tant pour le* q, que pour le q', & pour une distance *au zenith quelconque* y devient d' une valeur in*déterminée par la réunion des points* P, Z, qui fait évanouir *le côté* PZ. Dans *le* premier cas si *le soleil* arrive à l' horizon au Méridien dans le solstice d' été ; il s' élève après, *& il n' arrive* pas à 108 degrés de distance du zenith ; le jour y est perpetuel sans crépuscule. S' il arrive pendant l' hiver ; l' angle p sera = o, l' angle p' étant fini. Il y aura une espèce de maximum du crépuscule, l' aurore se réunissant avec le crépuscule du soir sans jour : cela arrivera dans le pays, qui a la latitude égale à la déclinaison. S' il arrive au Méridien à 108 degrès de distance au zenith ; ou cela arrivera après la nuit *perpetuelle*, ou à son commencement, & alors il n' y aura *pas d' arrivée à* l' horizon : & si cela arrive après le coucher du soleil, ou avant *son lever, il y aura la jonction du crépuscule avec l' aurore : ce* sera *un maximum donné par la* $cot.q'$ infinie, $cot.q$ étant finie.

157. Pour ce qui appartient à la différence = o, outre le cas du coefficient = o, dans lequel nous avons trouvé $cos.PS = sin.lat. \times tan.9°$, il y a le cas, dans lequel dz devient = o : cela arrive au solstice d' été, quand la distance au zenith = z arrive à son minimum, & au solstice d' hiver, quand elle arrive à son maximum. Il y a un maximum de la durée du crépuscule dans tous ces deux cas, tandis que le coefficient = o donne un *minimum*. D' un *examen de la valeur* dz ($cot.q' - cot.q$) on pourroit *bien tirer aussi*, de quoi prouver, que celui des solstices est un *maximum*, & l' autre du coefficient = o un minimum, en faisant voir, que pour le premier cas sa valeur passe

 de

de l'augmentation à la diminution, & viceversa dans le dernier, ce qui prouveroit aussi, que réellement il y a un maximum dans ceux-là, & un minimum ici, quoique il peut arriver, que la formule de la différence d'une quantité variable soit $= 0$ sans qu'il y ait ni maximum; ni minimum, comme j'ai démontré il y a plus de 40 ans dans ma dissertation *De Natura, & usu infinitorum, & infinite parvorum*, à cause des quantités d'ordres inférieurs qu'on a négligées. Cela appartient généralement à la théorie des problêmes *de maximis, & minimis*, & j'ai développé cet objet dans le plus grand détail dans mes Éléments d'Algèbre. Il suffit ici d'avoir montré avec quelle facilité nos équations générales se prêtent à la solution de problêmes, qui ne paroîtroient pas être de leur ressort.

§. XXI.

Application des mêmes équations à la détermination du plus grand éclat de Vénus.

158. SOIT (fig. 8) S le centre du soleil, T la terre, V le centre de Vénus, A, B les intersections de la ligne droite SV avec sa surface, C, D celles de la droite TV, EF le diamètre de Vénus perpendiculaire au diamètre AB dans le plan TVS, GH le diamètre perpendiculaire à CD, I l'intersection de la droite TF avec le diamètre HG. La ligne HI sera la partie du diamètre HG du disque apparent de Vénus, qui nous paroîtra éclairée. Ce disque est représenté dans la fig. 9: sa partie éclairée sera terminée par le demi-cercle KHL, & par la démi-ellipse KIL. On sait, que l'aire de cette demi-ellipse sera à celle du demi-cercle comme VI à VH, & la partie éclairée KHLI au total du disque, comme HI à HG. Ainsi la partie éclairée du disque sera proportionnelle à la ligne HI de cette figure, & la lumière qui en arrivera à la terre T, sera dans la fig. 8 conformément à l'hypothèse, que nous avons proposé au num. 139, comme $\frac{HI}{TV^2}$. Il faut trouver le maximum de cette expression.

159. La petiteſse du diamètre apparent de Vénus fait, qu' on peut conſidérer la ligne TFI comme perpendiculaire au diamètre GH: ainſi HI est le sinus verse de l'arc HF, qui est égal à l'arc AD à cauſe de FA, HD quarts de cercles égaux. L'arc AD est la mesure de l'angle AVD supplément de l'angle SVT: ainsi HI $=$ VH $-$ VI $= 1 - cos.$HF, sera $= 1 + cos.$SVT à cause des signes contraires des co-sinus des suppléments, & la quantité de lumière sera exprimée par $\frac{1 + cos.SVT}{TV^2}$.

160. *Les orbites de Vénus, & de la terre étant presque circulaire, on peut considérer les côtés SV, ST comme constants, & on déterminera la raison des différences du côté TV, & de l' angle TVS par la première équation adaptée au triangle rectiligne*: on appellera p l' angle TVS, x le côté TS, z le côté TV: ainsi on aura SV $= y$, STV $= q$, & VST $= r$: pour le triangle sphérique on auroit, comme auparavant $dz cos.q = - dp sin.z sin.q$; mais pour le triangle plan on mettra (num. 16) z pour $sin.z$, & on aura $z dp = - \frac{dz cos.q}{sin.q}$. La formule finale du numéro précédent sera $\frac{1 + cos.p}{z^2}$, & sa différence $\frac{- z^2 dp\, sin.p - 2z dz(1 + cos.p)}{z^4} = 0$. En mettant $\frac{dz cos.q}{sin.q}$ pour $- z dp$, divisant par $\frac{2z dz}{z^4}$, & transposant, *on aura* $\frac{cos.q sin.p}{2 sin.q} = 1 + cos.p$, d'où l'on tire $\frac{2 sin.q}{cos.q} = \frac{sin.p}{1 + cos.p}$: c' est-à-dire $2 tan.q = tan.\frac{1}{2}p$.

161. Si l' on fait la distance de la terre au soleil ST $= 1$, & la distance de Vénus SV $= n$, la proportion des côtés aux sinus des angles opposés donne $sin.$SVT $= sin.p = \frac{1}{n} sin.$STV $= \frac{sin.q}{n}$: ainsi on aura deux rapports simples entre les deux angles SVT $= p$, & STV $= q$. *Leurs sinus seront en la raison donnée des distances ST, SV, & la tangente de la moitié du premier sera double de la tangente du second.*

162. Pour les trouver nous réprendrons l' équation $\frac{cos.q sin.p}{2 sin.q}$ $= 1$

$= 1 + cos.p = 1 + \sqrt{(1 - sin^2.p)}$ en substituant $\frac{sin.q}{n}$ pour $sin.p$, on aura $\frac{cos.q}{2n} = 1 + \sqrt{(1 - \frac{sin^2.q}{n^2})}$; $\frac{cos.q}{2n} - 1 = \sqrt{(1 - \frac{sin^2.q}{n^2})}$; $\frac{cos^2.q}{4n^2} - \frac{cos.q}{n} + 1 = 1 - \frac{sin^2.q}{n^2}$; $\frac{cos^2.q}{4n^2} - \frac{cos.q}{n} = - \frac{sin^2.q}{n^2} = \frac{-1 + cos.^2q}{n^2}$; $\frac{3cos^2.q}{4n^2} + \frac{cos.q}{n} = \frac{1}{n^2}$; $cos^2.q + \frac{4n}{3} cos.q = \frac{4}{3}$, & à la fin $cos.q = - \frac{2}{3} n \pm \sqrt{(\frac{4}{9} n^2 + \frac{4}{3})}$.

163. La distance moyenne de Vénus au soleil n est 0,723333 la moyenne de la terre étant $= 1$; ainsi $- \frac{2}{3} n = - 0{,}482222$, & son quarré $= 0{,}232538$, qui ajouté à $\frac{4}{3} = 1{,}333333$ fait 1,565871 : par-là $cos.q = - 0{,}482222 \pm \sqrt{1{,}565871} = - 0{,}482222 \pm 1{,}251347$. On ne peut pas prendre le signe $-$, parceque le co-sinus deviendroit plus grand que le rayon : en prenant le positif, on aura $cos.q = 0{,}769125$, & $q = 39^\circ.43'.29''$. La valeur $sin.p = \frac{sin.q}{n}$ donne le $log.sin.p = 9{,}805567 - 9{,}859338 = 9{,}946229$, qui répond à deux angles, un aigu $= 62^\circ.4'.23''$, l' autre obtus $= 117^\circ.55'.37''$. Comme la ligne TV prolongée rencontreroit l' orbite de Vénus dans un autre point V', où l' angle SV'T seroit égal à l' angle SVV' supplément de SVT, la valeur du sinus déterminée par la rencontre de cette ligne avec cette orbite donne l' un & l' autre de ces angles : mais nous devons prendre l' obtus pour notre p, ce qui est indiqué par une autre expression du notre angle, qui donne son co-sinus. C' est celle que nous avons trouvé au numéro précédent $\frac{cos.q sin.p}{2 sin.q} = 1 + cos.p$. Comme nous y avons réduit le premier membre à $\frac{cos.q}{2n}$, on aura $1 + cos.p = \frac{cos.q}{2n}$, & par-là $cos.p = \frac{cos.q}{2n} - 1 = \frac{0{,}769125}{1{,}446666} - 1 = 0{,}531653 - 1 = - 0{,}468347$, qui est le si-

nus

nus de 27°.55'.37", & par conséquent le co-sinus des mêmes 62°.4'.23" & 117°.55'.37", qu' on avoit trouvé par l' autre expression : mais le signe négatif de ce co-sinus détermine l' obtus. Ainsi nous aurons l' angle SVT $= p = 117°.55'.37"$, & comme l' angle STV $= q$ a été trouvé $= 39°.43'.29"$, le troisième TSV reste $= 22°.20'.54"$. On en tire le côté TV $= \frac{sin.TSV}{sin.SVT} = \frac{sin.22°.21'}{sin.117°.50'}, = 0{,}4304$.

164. Cette détermination sert pour le temps des distances moyennes de la terre, & de Vénus au soleil : on trouve la même chose chez M. de La-Lande au num. 1198 dans le premier des trois Volumes de son Astronomie d' après une formule de M. Halley, qui par une méthode différente a cherché directement cette distance, & il en a donné une construction très-simple, & élégante : l' angle STV $= y$ est de même 39°.43', & la distance TV $= 0{,}43$, y ayant négligé les secondes, & les fractions inférieures. J' ai employé ici les secondes seulement pour faire accorder mieux les deux valeurs de l' angle p données par les deux formules $sin.p = \frac{sin.q}{n}$, & $cos.p = \frac{cos.q}{2n} - 1$. Le dernier numéro de ce Volume présente une table de M. Kies, dans laquelle il y a l' élongation de Vénus dans son plus grand éclat, qui est notre q, pour toutes les différentes combinaisons de leurs distances les plus grandes, les moyennes, les plus petites, & de sa quantité de lumière par rapport à celle de la distance moyenne faite $= 1$. On pourroit calculer cette table aussi par la valeur finale $\frac{1 + cos.SVT}{TV^2}$ du num. 159, qui lui est proportionnelle en employant les distances de Vénus, & de la terre au soleil, qui leur répondent, pour trouver, comme nous avons fait ici, pour les distances moyennes les trois angles du triangle STV, & la distance TV. Dans cette table on trouve la plus petite élongation, qui est notre angle q pour Vénus périhélie, & la terre aphélie de 39°.6' la plus grande pour Vénus aphélie, & la terre périhélie de 40°.22'. La quantité de lumière dans le premier cas

est

est 0,8954, dans le second 1,1304. L'élongation pour les distances moyennes y est de 39°.43', la même, que nous avons trouvée ici, si l'on y néglige les secondes. Cet accord confirme toute la méthode, que nous avons employée, & qui fait voir toujours plus clairement le grand avantage d'avoir dans quatre seules équations relatives à quatre combinaisons générales les instruments propres à la solution d'une quantité immense de problêmes. Dans ces quatre, que nous avons résolus ici, il y a eu toujours les cas de deux côtés *constants; mais elles sont générales* pour toutes les autres de *deux termes constants, d'un seul, d'aucun*, comme nous l'avons *déjà* dit plusieurs *fois ci-dessus, & comme* nous dirons aussi *dans le paragraphe suivant*, où nous donnerons une autre *application*, qui n'aura besoin que d'un seul terme constant, & nous indiquerons toutes les autres, que nous avons données dans d'autres Opuscules de cette Collection.

165. L'angle TSV, que nous avons trouvé = 22°. 21', sert pour voir à combien de jours à peu-près de la conjonction inférieure de Vénus on a ce plus grand éclat. Dans huit ans moins deux jours Vénus revient à la même position respective ayant eu 5 conjonctions inférieures avec le soleil. Ce sont 2920 jours, qui divisés par 5, donnent pour une révolution synodique moyenne 584: ainsi la distance temporaire du plus grand éclat à la conjonction sera $\frac{(22°.21')\times 584}{360°} = 36,3$, & cet intervalle est changé très-peu dans les différentes combinaisons des distances à cause de la petitesse des excentricités de la terre, & de Vénus. Le plus grand éclat sera à peu-près cinq semaines avant, & après la conjonction inférieure avec le soleil.

§. XXII.

D'autres applications de quatre équations générales du num. 15., & 17, & des deux du num. 19.

166. DANS chacune des applications des quatre équations générales, qu'on a fait dans les paragraphes précédents, il y avoit

deux

deux termes constants. Dans l' Opuscule XIV on a eu une application de la première des quatre du num. 15 qui a eu un seul terme constant. On pouvoit se servir dans l' Opuscule VIII pour un objet de son numéro 12 de l' équation I du num. 15 d' ici réduite pour le triangle plan à la I du num. 17 en y considérant deux termes constants. Il s' y agissoit de déterminer dans la figure 3 de la table VI, qui se réduit à la fig. 10 d' ici, la différence, que la base DG du triangle DCG corde fautive d' un cercle, avoit par rapport à la base AB du triangle ACB sa corde vraie. *Le cas y étoit encore moins général; parceque ce second triangle étoit isocèle:* pourtant on pouvoit résoudre ce problême *à l' aide de la première équation du num. 17*, même dans sa généralité, en y employant un seul terme constant.

167. La combinaison pour ce problême étoit celle de trois côtés. On y avoit les côtés CA, CB avec l' angle en C, & on cherchoit la différence de la base AB changée en DG par les petites différences AD, BG de ces côtés. Dans le cas particulier de l' isocélisme on avoit aussi les angles en A, & B, qui étoient égaux entr' eux, & chacun égal au complément de la moitié de l' angle en C, & la formule qu' on tire de notre application en fait usage comme nous verrons; mais cela n' empêcheroit l' usage de cette formule, même dans le cas du problême général.

168. Le terme constant étoit l' angle C, qu' il faut appeller p pour faire évanouir dans la première des équations de ce numéro le dernier terme $dpz\sin.q$: ainsi il falloit appeller x la base AB, qui est le côté opposé à cet angle, & on pouvoit appeller même dans le cas général y, & z les deux autres côtés AC, BC, à volonté, en appellant q & r les angles, qui leur auroient été opposés en B & A. Il y restoit l' équation $dx - dy\cos.r - dz\cos.q = 0$, d' où l' on auroit tiré la différence qu' on cherchoit $dx = dy\cos.r + dz\cos.q$. On y avoit les deux différences dy, dz, qui étoient les AD, BG, & dans le cas de l' isocélisme aussi les angles en B & A, qui auroient été r & q compléments de la moitié de l' angle donné en C $= p$: ainsi on auroit eu dans ce cas $\cos.r = \cos.q = \sin.\frac{1}{2}p$, & $dx =$

$(dy+dz)\times sin.\frac{1}{2}p$, ce qui est l' expression même de la solution, qu' on trouve à la fin de ce num. 13 de l' Opuscule VIII.

169. Dans le cas général de l' inégalité des deux côtés on peut trouver les deux angles en B, & A par la Trigonométrie, puisqu' on y a les deux côtés avec l' angle intercepté : mais on peut faire ici ce qu' on a proposé au §. XIX de cet Opuscule num. 146, en trouvant ces deux angles par construction graphique, ce qui est très-facile, quand on a les deux côtés, & l' angle d' un triangle plan, à l' aide d' un *échelle* & *du rapporteur*, ou du compas de proportion; parceque *pour avoir assez exactement* la petite différence qu' on cherche, *il suffit d' avoir ces angles par un* à-peu-près.

170. On a eu dans le premier Opuscule du Volume précédent l' application des équations du même numéro 17 avec deux constantes, une, aucune, comme je l' ai déjà dit au num. 6 de ce même Opuscule. Pour les équations du num. 19, qui appartiennent aux petits compléments, on en a eu des applications dans plusieurs Opuscules de ce même Volume, dans l' Opuscule III pour le quart de cercle, dans l' Opuscule XI pour l' instrument des passages, & dans le XIV pour la machine parallatique. J' avois mis ici au long l' application à l' instrument des passages, & on l' a annoncé ainsi dans le catalogue de cette Collection imprimé d' avance; *mais j' ai jugé après plus à propos de réunir* dans le seul Opuscule XI *tout ce qui appartenoit à cet instrument*.

171. Je pourrois bien donner un très-grand nombre d' autres applications; mais il suffit d' avoir montré par tant d' essais le grand avantage, qu' on peut tirer des équations différentielles tant des quatre générales du num. 15, & 17, que des deux du num. 19 appartenantes aux petits compléments. On peut en tirer un grand nombre d' avantages pour toutes les parties de l' Astronomie, & encore plus généralement dans le calcul infinitesimal, quand il s' agit d' y employer les différences appartenantes aux triangles.

OPU-

OPUSCULUM XVI.

De Rhombo micrometrico pro corrigendo effectu ejus positionis obliquæ.

§. I.

Correctionis Theoria.

1. NOTISSIMUS est usus pro micrometro rhombi ABDE (Tab. XI fig. 1), in quo diameter *major* BCE est dupla minoris ACD. Ita obvertitur tubus eo instructus, ut diameter minor habeat directionem motus diurni, & maneat immotus, dum ipso motu diurno traducuntur per ipsum bina astra, alterum positionis notæ per chordam FGH (*), alterum ignotæ per $F'G'H'$ jacentem in eodem semirhombo, vel $F''G''H''$ in opposito, ac per appulsum ad bina latera in suis punctis F & H determinatur differentia declinationis, & ascensionis rectæ. Patet, eo casu chordas FH fore parallelas diametro AD, sectas bifariam in G, & æquales distantiæ BG, sive EG'' a vertice propiore, uti *AD* est æqualis *BC*, vel *EC*.

 2. Hinc

(*) Spectanti meridiem cuspis borealis remanet altior, australis depressior, orientalis ad lævam, occidentalis ad dexteram. Sed quoniam solet id instrumentum aptari telescopiis dioptricis invertentibus objecta, exhibentur hic ea puncta ordine inverso in B, E, A, D, adeoque ABD est semirhombus borealis, AED australis, BAE orientalis, BDE occidentalis, ac motus diurnus, qui fit in superficie sphæræ cælestis a læva ad dexteram, hic fit per FGH e contrario a dextera ad lævam: figura est aptata casui, in quo astrum cognitum transeat per chordam FH jacentem in semirhombo boreali, incognitum vero vel itidem per $F'H'$ ejusdem semirhombi, & majorem, vel per $F''H''$ oppositi: sed res facile traducetur ad omnes alios casus.

Injecta est mentio hujus rhombi in Opusculo XIV, ubi in figuris tabulæ IX habitum est punctum V pro ipsius vertice boreali: id punctum ibi est illud idem, quod in superficie sphæræ cælestis respondet puncto B hujusce rhombi existentis, hic intra telescopium.

2. *Hinc tempus medium inter binos appulsus* exhibet appulsum *ad diametrum majorem in G*, quæ diameter tum refert axem circuli horarii: *intervallum temporis inter eos appulsus exhibet differentiam horariam ascensionis rectæ*. Pro differentia declinationis, reducuntur chordæ FH ad secunda circuli maximi multiplicando secunda temporaria moræ in chordis singulis per 15*cos.decl*. Differentia ipsarum FH, F'H' in eodem semirhombo, & in oppositis excessus diametri majoris BE supra summam chordarum FH, F''H'' exhibet *differentiam declinationis* GG', sive GG''. Facile autem *patebit*, utrum *hæc differentia sit addenda declinationi* astri cogniti ad habendam *declinationem astri incogniti*, *an inde subtrahenda*. Nam ex *mora intra rhombum innotescet*, *utra chorda sit longior*, & *patet*, chordam in utrovis semirhombo fore eo propiorem suo vertici, quo fuerit brevior. Hinc facile eruuntur sequentes regulæ. Distinguantur tria binaria circumstantiarum pertinentium ad astrum cognitum 1°. quod ejus declinatio sit borealis, vel australis, 2°. quod transitus fiat per semirhombum borealem, vel australem, 3°. quod ejus chorda sit brevior quam chorda astri incogniti, vel longior. Si habeatur prima ex iis binis circumstantiis pro quovis binario; astrum incognitum erit remotius a vertice boreali, & idcirco ejus declinatio borealis minor: hinc in eo casu differentia erit subtrahenda. Si circumstantia *fuerit secunda contraria in duobus binariis*; adhuc adhibenda erit *subtractio*: *si habeatur ea contrarietas in uno*, *vel in omnibus tribus*; *debebit e contrario adhiberi additio*. Erit autem utraque declinatio ejusdem denominationis, nisi differentia fuerit subtrahenda, & major, quam declinatio astri cogniti, quo casu hæc erit subtrahenda ab illa, & binæ declinationes erunt contrariæ.

3. Pro casu transitus per semirhombos diversos eædem erunt regulæ pro subtractione, vel additione differentiæ, sed pro habenda ipsa *oportebit invenire semel longitudinem diametri majoris*, quæ obtinetur efficiendo, ut fixa notæ declinationis percurrat motu diurno alteram e binis diametris: nam ex secundis horariis moræ per ipsam ductis in 15*cos.decl*. obtinetur ejus valor in secun-

cundis circuli maximi, & habitâ earum alterâ habetur etiam altera ejus dupla, vel dimidia. Quoniam vero est difficile ita tubum disponere, ut fixa prodeat accurate ex ipso ángulo rhombi (*); & exeat accurate per angulum oppositum, ac exiguus error in eo parit errorem multo majorem in mora totali, ob obliquitatem laterum respectu diametri utriuslibet; prodest habere alias etiam methodos ad inveniendum id ipsum: en unam, quæ id præstat ope methodi ipsius propositæ ad inveniendam differentiam declinationis. *Binæ fixæ quævis, quæ habeant differentiam declinationis minorem semidiametro majore rhombi, traducantur bis per ipsum rhombum ita, ut semel transeant ambæ per eundem semirhombum, tum mutatâ positione telescopii cum suo rhombo, altera per unum e binis semirhombis, altera per alterum: summæ binarum chordarum, quæ habentur in secundo transitu, addatur differentia earum, quæ sunt habitæ in primo, & habebitur diameter major.* Nam si ea dicatur x, priorum differentia p, posteriorum summa q; erit differentia declinationis e primo transitu $= p$, e secundo $= x - q$, quæ cum sit eadem differentia earundem fixarum, ii valores erunt æquales, adeoque $x = p + q$; unde habetur hujusmodi regula. *Chorda minor primi transitus dematur a summa reliquarum trium, & habebitur diameter major quæsita.* Porro adhiberi possunt fixæ etiam telescopicæ, quarum declinatio sit tantum proxime cognita, quæ si assumantur prope æquatorem, multo minus nocebit declinatio non prorsus accurate cognita, & reductio evadet facilior ob *cos.decl.* $= 1$. Quo plures fixæ adhibebuntur ad eam determinationem, eo ipsa obveniet accuratior: possunt autem adhiberi quot libuerit, ac ea mensura semel habita pro data longitudine tubi, manebit semper eadem.

4. Si instrumentum non sit aptatum machinæ parallaticæ accuratissime collocatæ in positione stabili; admodum difficulter, nec nisi post molestam, & longam attentationem, inducetur ejusmodi po-

(*) Id quidem ita est difficile, ut omnino sperari non possit: idcirco recurrendum erit ad alias methodos, quarum una hic subditur, aliæ duæ proponentur inferius.

poſitio tubi, ut diameter minor ſit accurate parallela motui diurno: ſi aſtra percurrant chordas obliquas FLI; methodus evadit erronea, niſi corrigatur. Correctio adhibenda invenietur facile, ſi præter appulſum ad latera in F, & I obſervetur etiam appulſus ad diametrum majorem in L ſaltem unius ex aſtris cujuſcumque, quod ſubeat campum teleſcopii immoti, qui appulſus comparatus cum reliquis binis determinabit, ut mox videbimus, inclinationem earundem chordarum (*).

5. Concipiatur cuivis FH perpendicularis ſua IN, quæ in ſemirhombo boreali ABD cadet ſemper intra rhombum, ut IN, I'N', & in auſtrali extra, ut I''N'', tum ex B recta BR perpendicularis chordis FI, F'I', F''I'', quibus occurrat in M, M', O, & rectæ ipſis parallelæ ductæ per E in S: recta ex E perpendicularis chordæ F''I'' occurrat ipſi in M'', & recta ducta per L parallela rectæ BR occurrat chordis F'I', F''I'' in P, P'. Patet, rectam PP' fore perpendicularem directioni motus diurni, adeoque debere gerere vices diametri BE, deſignando in ſuperficie ſphæræ cæleſtis arcum circuli horarii ita, ut intervallum temporis inter momenta appulſuum aſtri cogniti ad diametrum BE in L, & incogniti ad eam rectam in P, vel P' ductum in 15 exhibeat differentiam aſcenſionis rectæ, & ejus ſegmentum LP, vel LP' differentiam declinationis.

6. Facile autem conſtabit, an recta BR cadat ad occidentem reſpectu diametri BE, ut figura exhibet, an ad orientem, comparando inter ſe intervalla temporis inter appulſus aſtri cujuſvis ad latera rhombi, & ad diametrum majorem. Si aſtrum tranſeat per ſemirhombum borealem, ut per chordam FI, & tempus per ſeg-

(*) Ubi adhibentur fila pro micrometris, ut ea videri poſſint, oportet adhibere illuminationem quandam, quæ impedit obſervationem ipſam, ſi agatur de fixis exiguis, vel de cometis nimis remotis a perihelio, quorum aſpectus impeditur ab eo lumine: idcirco maxima utilitas ejus rhombi in eo eſt ſita, quod ejus lateribus conſtantibus e lamellis latioribus formæ expreſſæ in figura 2 nullum eſt opus illuminationis: ſimili pacto per lamellam latiorem adhibitam in loco diametri majoris poteſt reddi ſenſibilis etiam appulſus ad hanc: ſed de iis agemus infra.

segmentum FL fuerit longius quam per LI ; illud erit longius hoc, adeoque & latus BF trianguli BFI habentis angulum B sectum bifariam a recta BL erit majus latere BI, ac angulus BIF major angulo BFI. Hinc in triangulis BLI, BLF habentibus angulos ad B æquales tertius angulus BLI erit minor tertio BLF, adeoque is angulus erit acutus, & perpendiculum BM cadet ad partes illius, & nisi obliquitas sit enormis, recta BR, quæ est ipsius productio, cadet in angulum EDB occidentalem. At in triangulo $F''E\,I''$ semirhombi AED australis tempus per $F''L''$ brevius tempore per $L''I''$ determinabit e contrario angulum $EL''F''$ minorem angulo $EL''I''$, adeoque acutum, cadente EM'' ad ejus partes in angulum EAB orientalem, rectâ autem BR ipsi parallelâ iterum in occidentalem EDB. Quamobrem habebitur hujusmodi regula: *si intervallum temporis a primo latere ad diametrum in transitu astri per semirhombum borealem fuerit longius intervallo ab hac ad latus secundum, vel in transitu per australem brevius; recta* BR *perpendicularis directioni motus diurni ducta e vertice boreali* B *abibit versus occidentem respectu diametri majoris* BE, *secus jacebit ad orientem*. Inde autem facile deducetur hæc alia regula: *si chorda astri incogniti fuerit remotior a vertice boreali* B, *ut figura exhibet; ad habendum tempus appulsus astri incogniti ad horarium* LP, *vel* LP', *intervallum temporis respondentis lineolæ* $L'P$, *vel* $L''P'$ *erit addendum in primo casu tempori appulsus ad diametrum majorem, vel ab eo auferendum, prout hoc astrum posterius erit australius illo priore, vel borealius*. Nam existente $F'I'$, vel $F''I''$ remotiore a vertice boreali B, quam sit FI, punctum P, vel P', quod in ea positione chordarum jacebit semper versus M', vel O respectu L', vel L'', debebit in primo casu jacere versus occidentem una cum recta BR, & in secundo versus orientem. *At si chorda* $F'I'$, *vel* $F''I''$ *fuerit propior vertici boreali* B, *quam chorda* FI: *id intervallum erit e contrario auferendum in primo casu, addendum in secundo*. Patet enim, rectâ LL', vel LL'' abeunte versus B, rectam $L'P$, vel $L''P''$ habituram directionem priori oppositam, puncto P, vel P' non jacente versus

sus M', vel O respectu L', vel L'', sed ad partem oppositam. Addemus demum, rectam IN fore duplam rectæ NH, ut EG est dupla GH.

7. Jam vero tempora impensa per FL, LI *dicantur* t, t', & sit $t + t' = t''$, $t - t' = dt$. Erit FG = GH : GN :: FL : LI :: $t : t'$, adeoque HN ad NF, ut $t - t' = dt$ ad $t + t' = t''$, & tangens anguli IFN = LBM = EBR, qui dicatur a, nimirum $\frac{IN}{NF} = \frac{2HN}{NF}$ erit $= \frac{2dt}{t''}$. *Porro ad eam determinationem potest* assumi *tempus* t'' & dt *astri cujusvis etiam diversi ab iis*, quæ comparantur, *adeoque cujusvis fixæ etiam telescopicæ*, & *ignotæ*, quæ *transeat interea*, & quo *major erit chorda* percursa, eo *accuratior obveniet* determinatio ejus anguli, cum fractiones secundorum, quæ in observatione sub sensum non cadunt, minus turbent rationem valorum dt, & t'' majorum, quam minorum.

8. Ut fixarum telescopicarum, vel cometæ evanescentis omnes tres appulsus observari possint *sine illuminatione*, quæ impediat earum aspectum, *potest juxta* adnotationem ad numerum 5, adhiberi rhombus ejus formæ, quam exhibet figura 2, in qua præter lamellas laterales, habetur etiam diagonalis, cujus alterum latus exhibet diametrum. Hæc lamella diagonalis poterit obverti ita, ut *latitudo jaceat versus occidentem*, quemadmodum figura exhibet, quo *pacto observari debebit immersio in lamellam*, vel versus orientem, quo casu observanda esset emersio: quanquam & in ea, & in lamellis lateralibus observari poterit tam immersio, quam emersio, ut determinatâ semel earum latitudine, habeatur observationis confirmatio ex mora post lamellam ipsam. Potest etiam applicari diameter major ex filo argenteo crassiore, quod accurate bifariam secet angulos oppositos, & pro minoribus fixis observari tam immersio post filum, quam emersio, quarum medium erit appulsus ad diametrum: pro cometa observabitur momentum, quo nucleus secatur bifariam ab ipso filo, pro planetis contactus primi limbi cum primo latere fili, & secundi cum secundo, quorum medium erit appulsus ad diametrum. Pot-

est

est autem adhiberi utraque diameter ex ejusmodi filo, sed pro diametro longiore lamella, quæ nullâ illuminatione indiget, erit multò aptior: lamella adhibita pro diametro minore occultaret fixas ipsi respondentes toto tempore transitus, adeoque ea ibi adhiberi omnino non debet.

9. Angulus NFI = EBR = a erit inclinatio chordarum respectu diametri majoris. Is est = MBL = EBR = a, adeoque facile invenietur per suam tangentem $\frac{2dt}{t''}$, ac additus & ablatus ab angulis æqualibus *FBL*, *IBL exhibebit angulos* FBM, IBM; *habentur autem anguli* FBL, IBL, quorum tangens $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{2}$ = 0,5, adeoque ii ex tabulis sinuum sunt = $26°.34'$, & anguli FBM, IBM erunt $26°.34' + a$, $26°.34' - a$: summa tangentium eorum angulorum ad radium = 1 dicatur m.

10. In triangulis rectangulis BMF, BMI, BML rectæ BM, MF, MI, ML sunt, ut radius, & tangentes angulorum MBF, MBI, MBL, cujus postremi tangens est $\frac{2dt}{t''}$. Quare, si t'', & dt assumantur in secundis horariis motus diurni singulorum astrorum, erit in iisdem ut summa priorum binarum tangentium = m ad radium = 1, ita MF + MI = FI = $15t''cos.decl.$ ad BM = $\frac{15t''cos.decl.}{m}$: tum ut eadem summa = m ad postremam tangentem $\frac{2dt}{t''}$, ita FI ad LM, cujus valor evadit $\frac{30dtcos.decl.}{m}$. Iidem erunt valores BM', L'M', EM'', L''M'', si pro iis adhibeantur tempora t'', dt pertinentia ad ipsarum chordas: sed valor $dt = t - t'$ habebit in chorda F''I'' signum contrarium ei, quod habetur in semirhombo opposito, & recta L''M'' directionem oppositam directioni rectarum LM, L'M'. Reducentur autem valores earum rectarum ad partes circuli maximi, multiplicando valores temporarios per $15cos.decl.$ de more.

11. Hinc pro differentia declinationis in eodem semirhombo satis erit invenire chordas FI, F'I' per sua tempora t'', & reducere ad partes circuli maximi ope multiplicationis per $15cos.decl.$,

 tum

tum eorum differentiam dividere per m: prodibit differentia quæsita MM' adhibenda juxta num. 2 ad habendam declinationem astri incogniti. In singularum reductione adhiberi potest multiplicatio sui valoris t'' per $\frac{15 \cos.decl.}{m}$, vel si declinatio utriusque habeatur pro eadem, satis est semel ducere in eum valorem solam differentiam valorum t''. Pro semirhombis oppositis notetur præterea, esse BS = BE × *cos.*EBS = BE × *cos.a*, & OS = EM'', adeoque erit LP' = MO = BS − (BM + EM''). Quare ad habendam differentiam *declinationis PP' summa* chordarum divisa per m debebit auferri a diametro *majore ductâ in cos.a* (*).

12. Differentia *ascensionis rectæ determinari debet juxta num.* 5 per *differentiam temporum* appulsus ad rectam LPP', quæ respondet arcui circuli horarii. Hinc poterit determinari prius methodo communi

---

(*) Jam patet etiam hinc, non esse necessarios omnes tres appulsus utriusque e binis astris, quæ comparantur, pro habenda differentia declinationis, ubi enim per tres appulsus alterius ex ipsis habiti sint ejus valores t'', & dt, ac per hos angulus a, cujus tangens $\frac{2dt}{t''}$, tum per ipsum valor m illius summæ binarum tangentium, satis est habere binos appulsus alterius astri ad bina latera rhombi, qui exhibeant solum ipsius valorem t'': nam is ductus in $\frac{15 \cos.decl.}{m}$ exhibebit valorem BM'. *Ii bini appulsus requiruntur pro differentia ascensionis rectæ; sed patebit inferius numero 12, datis binis tantum pro altero ex iis astris, facile tertium inveniri.*

Hæc autem methodus determinandi differentiam declinationis applicari etiam potest ad determinandum valorem diametri majoris BE eodem prorsus modo per hosce transitus obliquos, quo is determinatus est numero 3 per parallelos diametro minori AD, dummodo pro utroque transitu determinetur suus angulus a per suam tangentem $\frac{2dt}{t''}$, ex quo eruuntur bini valores m, quorum posterior dicatur m'. Si enim diameter major dicatur x, ut ibi, ac bina astra transeant hic etiam, ut ibi, semel per eundem semirhombum, tum alterum per unum ex iis, alterum per oppositum, & differentia chordarum prioris transitus dicatur p, summa chordarum posterioris q; differentia declinationum erit e priore transitu $\frac{p}{m}$, e posteriore $\frac{x}{m'} - \frac{q}{m'}$; adeoque erit $\frac{x}{m'} = \frac{p}{m} + \frac{q}{m'}$, & $x = \frac{m'p}{m} + q$: si autem ob exiguum telescopii motum obveniat novus valor a ad sensum idem, adeoque $m' = m$; fiet hic etiam $x = p + q$, prorsus ut ibi.

munitùper, differentiam temporum appulsus ad diametrum majorem BE, adhibitâ deinde correctione, quæ respondet lineolæ L'P, vel L''P'. Magnitudo ejus correctionis invenitur admodum facile: habetur enim valor lineolæ L'P, vel L''P', multiplicando differentiam declinationis LP, vel LP' jam inventam, per tangentem anguli L'LP, vel L''LP', nimirum anguli *a* itidem inventi. Erit autem dividendus valor ejus lineolæ ita inventus per *cos.decl.*, ut reducatur ad partes circuli maximi, in quibus is exhibetur per illam multiplicationem *ad partes paralleli*, in quo ascensio recta computatur.

13. *Pro determinando*, an ea correctio facienda sit per *additionem*, an *per subtractionem*, eruuntur *facile ex iis*, quæ dicta sunt numero *6*, sequentes regulæ. Considerentur hic etiam tria diversa binaria circumstantiarum oppositarum astri cogniti, 1° quod *id transeat per semirhombum borealem*, vel australem, 2°. quod primum tempus *t* ipsius sit longius quam secundum *t'*, vel brevius, 3°. quod ejus chorda FI sit propior vertici boreali B quam chorda F'I', vel F''I'' astri incogniti, vel ab ipsa remotior. Porro quævis chorda semirhombi *australis* est remotior a vertice boreali, ut patet, quam quævis *semirhombi* borealis: inter chordas hujus ea est propior, quæ brevior, inter chordas illius, quæ longior: ea autem est longior, quæ respondet tempori *t''* longiori. *Figura exprimit primas e binis circumstantiis omnium trium binariorum*, & *tunc correctio L'P*, vel *L''P'* est addenda. Si circumstantia prima mutetur in secundam ipsi contrariam pro duobus binariis; adhuc correctio erit addenda, binis mutationibus signorum reddentibus terminum positivum: si mutatio circumstantiæ habeatur in unico binario, vel in omnibus tribus; additio mutabitur in subtractionem. Mutatio unius binarii exhibet tres combinationes, mutatio duorum itidem tres, mutatio omnium unicam: *hinc habentur* quatuor combinationes pro correctione additiva, *tres pro subtractiva*.

14. Potest *differentia ascensionis rectæ haberi etiam* in casu ejusdem semirhombi, *considerando* appulsus ad horarium communem BM, addendo nimirum singulis temporibus appulsuum ad L, L',

suum $\frac{2dt}{m}$, quod exprimit tempus per LM, L'M': sive potius ascensioni rectæ jam inventæ adhiberi poterit pro correctione differentia eorum valorum ductorum in 15, nimirum differentia binorum valorum dt ducta in $\frac{30}{m}$, quæ exhibebit lineolam LP in partibus sui paralleli.

15. Si pro altero e binis astris desit unus e tribus appulsibus, facile suppleri poterit per reliquos quinque. Tempora ejus astri, cujus appulsus deest, denotentur litteris T, T', T'', & habebuntur sequentes proportiones, quarum prior pro astris percurrentibus eundem semirhombum, posterior pro percurrentibus semirhombos oppositos, $t : t' :: T : T'$, vel $t : t' :: T' : T$. Si desit appulsus ad primum latus, habebuntur t, t', T', & proinde invenietur T, quod tempus ablatum a tempore appulsus ad diametrum exhibebit tempus appulsus ad primum latus. Si desit appulsus ad secundum latus, quæretur T', quo invento, & addito eidem appulsui ad diametrum, habebitur appulsus quæsitus. Si autem desit appulsus ad diametrum, habebitur tempus totale T'', & factis, ut t'' ad t pro eodem semirhombo, ad t' pro semirhombis oppositis, ita T'' ad T, id tempus additum appulsui ad primum latus exhibebit appulsum quæsitum ad diametrum. Cavendum tamen, ne tempora ejusmodi pro chorda multo majore determinentur per tempora chordæ multo minoris, quo casu error observationis, quæ negligit fractiones secundorum insensibiles, augeretur plus æquo in termino quæsito. Semper erit multo melius observare immediate omnes appulsus, quam aliquem ex iis derivare a reliquis.

16. Si angulus a sit exiguus; valor m erit proxime $= 1$: nam angulus LBF est medius arithmetice proportionalis inter angulos MBF, MBI, quorum alter illum excedit, alter ab illo deficit per angulum MBL $= a$: unde fit, ut summa tangentium horum angulorum in eo casu sit proxime dupla tangentis ejus anguli, quæ tangens est $= \frac{1}{2}$. Itidem cosinus anguli a exigui assumi potest pro unitate: Inde vero facile colligitur, nullam correctionem adhibendam esse in eo casu declinationi determinatæ

more

more solito, quo determinatur, ubi chorda percurritur accurate parallela diametro minori, & pro ascensione rectâ sine inventione anguli a multiplicari posse differentiam declinationis per ejus tangentem $\frac{2dt}{t''}$; in casu vero ejusdem semirhombi, facilius rem præstari addendo singulis temporibus appulsuum ad diametrum majorem $2dt$.

17. Verum differentia temporum dt unius secundi pro singulis minutis temporis t'' exhibet $\frac{2dt}{t''} = \frac{2}{60} = 0,033333$, cui respondet angulus $1^{\circ}.55'$: eo addito angulo $26^{\circ}.34'$, & inde ablato, obvenient $28^{\circ}.29'$, ac $24^{\circ}.39'$, quorum tangentes 0,54258, ac 0,45889, & earum summa $1,00147 = m$. Si per eum numerum dividatur 60, obtinetur 59,912 deficiens a 60 per 0,088, quæ fractio unius secundi exhibebit correctionem respondentem singulis minutis valoris totalis. Si angulus a est exiguus; is differentiæ temporum majori respondet major proxime in ratione simplici valoris $\frac{2dt}{t''}$, qui est ejus tangens, sed correctio respondet major proxime in ratione duplicata ejus valoris, cum ea obtineatur multiplicando differentiam declinationis per eam ipsam tangentem. Hinc si valor dt pro singulis minutis temporis sit trium secundorum; correctio erit $9 \times 0,088 = 0,792$ pro singulis minutis differentiæ declinationis, adeoque existente eâ differentiâ minutorum 20, committeretur error secundorum 17, si ipsa negligeretur. Quamobrem cum ita facile inveniatur angulus a (neque enim in eo opus est secundis) & per ipsum summa tangentium; melius est adhibere regulas accuratas superius propositas, pro quibus mox proferemus exempla.

18. Si via astri F''I'' secaret etiam diametrum minorem AD; tum ejus extrema F'', I'' pertinerent ad latera rhombi opposita parallela; nec ea observatio posset determinare angulum inclinationis a, nisi observaretur etiam appulsus ad eam ipsam diametrum: adhuc tamen determinato eo angulo per aliam chordam jacentem in eodem semirhombo omnia facile expedirentur etiam in eo casu. Addemus in fine quæ pertinent ad eum casum, & ad casum,

in

in quo secaretur uterque axis a via astri ; cum contineant solutiones & simplices , & elegantes . Sed melius est ita disponere tubum , ut singulæ chordæ jaceant totæ in singulis semirhombis . Si differentia declinationum fuerit exigua ; facile fiet , ut ambæ jaceant totæ in eodem semirhombo : si ea fuerit major ; facile ita disponetur tubus , ut jaceant singulæ in singulis oppositis.

19. Addemus etiam ex iis , quæ demonstrata sunt , facile deduci correctionem adhibendam in casu , in quo alterum ex binis astris sit quæpiam *fixa* , alterum *cometa* , *qui habeat* motum in declinationem *satis magnum* . *Percurrat ipsa fixa* chordam FGH accurate parallelam diametro minori AD : *is cometa percurret* chordam obliquam F'L'I', ubi *tempora* per F'L', L'I' erunt inæqualia , & *appulsus ad diametrum* BE , quæ tum referet arcum circuli horarii , non fiet in medio inter appulsus F', & I'. Si ex præcedentium dierum observationibus innotescat motus diurnus in declinationem , & fiat ut horæ 24 ad tempus *t''* per chordam FI , ita motus ille ad quartum terminum ; habebitur I'N', cujus dimidia est N'H'. Ea redacta ad secunda circuli maximi , & divisa per 15*cos.decl.* exhibebit tempusculum per ipsam , cujus tempusculi dimidium addendum erit tempori medio inter binos appulsus ad latera , vel ab eo demendum , ut habeatur appulsus ad diametrum BE in L', prout motus in declinationem fit versus verticem *ejusdem semirhombi* , *vel* versus oppositum . Inde habebitur correctio pro *differentia ascensionis rectæ* . *Pro differentia* declinationis , inventâ F'N' in *partibus circuli maximi* multiplicando *t''* per 15*cos.decl.* , habebitur tota F'H', & ejus dimidium F'G', eritque F'N' : F'G' :: N'I' : G'L', quæ ablata a G'B = F'H', exhibebit BL', & habitâ BG habebitur GL' differentia declinationis . Quin imo pro BL' assumi poterit ipsa F'N', cum ob F'G' proxime dimidiam F'N' sit G'L' proxime dimidia N'I', adeoque proxime æqualis H'N'.

20. Inde obvenient hujusmodi regulæ . *Tempori intermedio inter binos appulsus ad bina latera addatur pars quarta motus in declinationem respondentis tempori* t'' *impenso per chordam divisa per* 15cos.decl. , *ut habeatur tempus appulsus ad diametrum*

ma-

majorem adhibendum pro differentia ascensionis rectæ : differentia declinationis inveniatur more solito, habendo pro chorda correcta exhibente distantiam a vertice sui semirhombi tempus t'' ductum in $15 cos.decl.$ verum vix unquam eâ correctione erit opus. Si enim motus in declinationem singulis diebus sit graduum 24, erit IN pro singulis minutis horariis unius minuti, quod prope æquatorem respondet secundis horariis 4, adeoque ejus pars quarta unico secundo. Quare cum motus in declinationem soleat esse multo minor, *correctio reducetur ad fractionem minuti secundi, quæ in ipsâ observatione nequaquam percipitur. Hinc ea correctio non erit sensibilis*, nisi vel motus in declinationem sit ve*locissimus, vel distantia* ab æquatore, aut campus telescopii ita ingens, ut mora per chordam sit perquam *diuturna*. Evitatur autem etiam in eo casu correctio ipsa, si observetur immediate appulsus ad diametrum majorem in L'.

21. Si, observatis omnibus sex appulsibus, bina tempora t, t' fixæ inveniantur æqualia, & tempora cometæ inæqualia; poterit inveniri motus in declinationem debitus tempori impenso per chordam ex ipsâ inæqualitate temporum; erit enim N'H' æqualis differentiæ temporum ductæ in $15 cos.decl.$, cujus dupla N'I' exhibebit quæsitum motum. Verum male inde deduceretur motus in declinationem respondens integræ diei, cum ipsæ fractiones secundorum neglectæ *in observatione inducant errorem*, qui a paucis *minutis moræ intra rhombum traductus ad horas* 24 *nimis augetur*. Porro eæ *fractiones* efficient sæpe, ut in rhombo etiam accuratissime collocato respectu motus diurni inveniatur inæqualitas temporum t, t' unius, vel binorum secundorum in altera, vel etiam in utraque e binis fixis, & quidem etiam in iis inæqualitas prorsus contraria, atque idcirco etiam in positione rhombi obliqua sæpe fiet, ut tempora t, t' pertinentia ad bina astra non inveniantur prorsus accurate proportionalia. Eam ob causam correctiones *hujusmodi possunt omitti*, si differentia inventa non sit plurium secundorum, vel potius observari debet transitus plurium fixarum *advenientium* ad campum telescopii inter appulsus binorum astrorum, quæ comparantur; & ad determinandam positio-

ſitionem rhombi accuratius, & tutius, tangens inclinationis a determinari debet assumendo pro t'', & dt, summam ejuſmodi valorum pertinentium ad eas fixas omnes.

§. II.

Regulæ & exempla.

22. NOTENTUR appulſus ad bina latera, & ad diametrum majorem rhombi pro utroque e *binis astris*, *quæ* comparantur, & *ſi libet pro alia fixa quavis*, *vel pluribus*.

23. Pro ſingulis *ſubtrahatur tempus appulſus ad primum latus* a tempore *appulſus ad diametrum majorem*, & *hoc a tempore appulſus ad ſecundum latus*, ac intervalla ita inventa dicantur t, t', & fiat $t'' = t + t'$, $dt = t - t'$.

24. Inveniatur angulus, cujus tangens $\frac{2dt}{t''}$, qui dicatur a: aſſumantur autem ad eam inventionem valores t'', & dt pertinentes ad aſtrum quodvis carens motu in declinationem diurno multorum graduum, vel ſummæ *ejuſmodi* valorum pertinentium ad aſtra plura.

25. Is angulus addatur angulo $26^{\circ}.34'$, & ab eo auferatur, ac ſumma tangentium angulorum inde provenientium dicatur m.

26. Inveniatur in ſecundis circuli maximi valor utriuſque chordæ inſtitutâ *multiplicatione valoris t'' per* $15 cos.decl.$ *de more*. Differentia ejuſmodi chordarum diviſa *per* m exhibebit differentiam declinationis in eo caſu, in quo utrumque aſtrum percurrit eundem ſemirhombum, earum ſumma ſubtracta a diametro majore ducta in $sin.a$ pro ſemirhombis oppoſitis.

27. Si differentia declinationis, vel diſtantia ab æquatore fuerit exigua; habitis pro æqualibus earum declinationibus, ſatis erit differentiam, vel ſummam temporum t'' ſemel ducere in $\frac{15 cos.decl.}{m}$. Generaliter ſic poterit inſtitui calculus: inveniatur logarithmus $\frac{15 cos.decl.}{m}$ adhibendo declinationem aſtri cogniti: huic

ad-

addatur logarithmus valoris t'' astri incogniti : obveniet primo chorda substituta astri cogniti accurata, tum astri cogniti nondum correcta. Voco chordam substitutam perpendiculum ductum e vertice rhombi propiore in chordam observatam, quod in methodo communi æquatur ipsi chordæ, hic autem æquatur ipsi divisæ per m: correctio adhibenda chordæ substitutæ respondet differentiæ declinationis astri incogniti a declinatione cogniti, cui assumpta est æqualis : hæc adhibebitur *post inventam declinationem* astri incogniti *nondum correctam, & itidem corrigendam: differentia, vel summa chordarum substitutarum* adhibebitur ad habendam *differentiam declinationum* non correctam. Inveniatur per eam declinatio astri incogniti, quæ non erit correcta, sed erit veræ quamproxima : logarithmo chordæ secundæ reductæ jam invento addatur logarithmus cosinus declinationis inventæ, & complementum arithmeticum cosinus declinationis prius assumptæ, nimirum declinationis astri cogniti : habebitur valor chordæ substitutæ correctus. Est enim ut cosinus declinationis assumptæ ad cosinum declinationis veræ, ita *valor ejus* ipsius *chordæ* prius inventus ad valorem correctum, & *ejus ope poterit* corrigi etiam ipsa declinatio astri incogniti.

28. Differentia ascensionis rectæ determinetur per differentiam temporis appulsus binorum astrorum ad *diametrum majorem: ascensioni rectæ astri incogniti inde deductæ* adhibeatur correctio, quæ erit *differentia declinationis* ducta in tangentem anguli a, & divisa per cosinum declinationis addenda, vel subtrahenda juxta regulas numeri 13.

29. Pro eodem semirhombo correctio ascensionis rectæ haberi poterit etiam ducendo differentiam binorum dt in $\frac{30}{m}$, quæ an addenda sit, an subtrahenda, determinabitur eodem modo, quo in numero superiore.

EXEMPLUM I.

Utroque astro percurrente eundem semirhombum.

30. Tempora appulsuum ad bina latera, & ad diametrum rhombi, cum valoribus t, t', t'', dt inde deductis habentur in tabula sequenti

Pro astro cognito	Pro incognito
$6^h. 16'. 32''$	$6^h. 32'. 25''$
17.42	34.10
18.28	35.19
t = 1.10	1.45
t' = 0.46	1. 9
t'' = 1.56 = $116''$	2.54 = $174''$
dt = 0.24	0.36

31. Debet primo inveniri angulus a, cujus tangens $\frac{2dt}{t''}$, tum summa tangentium angulorum, qui inde proveniunt, fieri $= m$. Porro e numeris astri prioris ea fractio est $\frac{48}{116}$, e numeris posterioris $\frac{72}{174}$. Adhibetur in sequenti calculo prior valor, qui hic est accurate idem, ac posterior (*). In primis autem tribus lineis adhibentur logarithmi cum complemento arithmetico logarith-

(*) Si enim tam numeratori, quam denominatori prioris addatur suum dimidium; ea migrat in posteriorem. Hic quidem valor secundæ fractionis est accurate idem, ac valor primæ, in exemplo nimirum selecto ad id ipsum. Fere semper in fractionibus exhibitis ab observationibus habebitur aliquod exiguum discrimen, ob fractiones minutorum, vel saltem secundorum temporis, quæ negligantur, vel etiam sub sensum non cadant. Tum si plures fixæ adhibeantur ad determinandum angulum a; assumendum erit medium inter valores inventos de more. Verum exiguus error in eo angulo inducet in valores determinandos ope ipsius errorem exiguum, & fere penitus contemnendum.

rithmi divisoris 116 de more, in tribus postremis tangentes ipsæ naturales, & valor *m* earum summa.

$$\begin{array}{rcl} 48 & \ldots & 1,681241 \\ 116 & \ldots & \underline{2,064458} \\ tan.a & \ldots & 9,616783 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} ABE = DBE = a = 22^{\circ}.29' \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{26.34} \\ \qquad\qquad\qquad tan.49.\ 3 = 1,15240 \\ \qquad\qquad\qquad tan.\ 4.\ 5 = \underline{0,07139} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad m = 1,22379 \end{array}$$

32. *Tum debent* inveniri binæ chordæ substitutæ in partibus circuli maximi per formulam $\frac{15t'' cos.decl.}{m}$. *Declinatio* astri cogniti sit $26^{\circ}.32'$: accipietur primo declinatio astri incogniti pro æquali ei eidem declinationi, & invenietur $log.\frac{15cos.26^{\circ}.32'}{1,22379}$, scribendo in primâ columnâ $log.15$, $log.cos.26^{\circ}.32'$, ac complementum arithmeticum logarithmi inventi 1,22379, & capiendo eorum summam: sub hac scribetur logarithmus utriusque $t''=116''$, & $=174''$: hi singuli additi logarithmo invento exhibebunt logarithmos binarum chordarum substitutarum, quibus adscribentur sui numeri in fine divisionis primæ ejus columnæ.

33. *In prima divisione columnæ secundæ scribentur ex chordæ substitutæ inventæ, quarum differentia exhibebit differentiam de-* clinationum. Hìc habetur chorda astri incogniti major, quam chorda cogniti; supponemus autem borealem declinationem astri cogniti, ac transitum per semirhombum borealem, in quo casu differentia declinationum inventa erit subtrahenda juxta numerum 2 a declinatione astri cogniti ad inveniendam declinationem incogniti, ac ambæ erunt ejusdem denominationis, quia differentia obveniet minor quam declinatio astri cogniti. Calculus habetur in quatuor *divisionibus tabulæ sequentis*.

34. Priores *binæ lineæ primæ columnæ divisionis primæ* continent eas chordas, *uti inventæ sunt in* secundis, tertia earum differentiam, quarta eandem reductam ad minuta, & secunda, quæ

erit *differentia declinationum* nondum correcta, quinta declinationem astri cogniti, a qua subtrahetur ea differentia; unde in linea sexta emerget declinatio astri novi nondum correcta. Ea invenietur in columna secunda divisionis primæ: ibi habebuntur primo loco binæ chordæ substitutæ in fine columnæ præcedentis, tum in binis lineis sequentibus earum differentia, quæ est differentia declinationum in secundis, ac eadem in primis, & secundis, deinde declinatio astri cogniti, tum declinatio incogniti nondum correcta (*). Hæc corrigetur *in columna prima divisionis* secundæ, ubi habebitur *logarithmus cosinus declinationis inventæ in fine divisionis præcedentis*, tum *complementum logarithmi cosinus declinationis astri cogniti prius adhibitæ*, & *in postrema linea* summa eorum *duorum logarithmorum* cum logarithmo valoris, qui habebitur in linea præcedenti ultima columnæ primæ divisionis primæ, quæ exhibebit ibidem chordam substitutam astri incogniti correctam. Demum in secunda columna divisionis secundæ habebitur idem calculus, qui in secunda divisionis primæ, ponendo in secunda linea hanc chordam correctam pro præcedente nondum correcta.

15	1,176091	Chorda prima substituta	1272''
Cos. 26°. 32'	9,951665	secunda nondum correcta	1908
. 1,22379	$\bar{9}$,912294	Differ. decl.	— 636
	1,040050	Eadem in minutis, & secundis . . .	— 10'. 36''
116''.	2,064458	Decl. astri cogniti	26°. 32', 0''. B.
174	2,240549	Decl. incogniti nondum correcta . .	26 . 21, 24 . B.
1272	3,104508	Chorda prima substituta	1272
1908	3,280599	secunda correcta	1915
		Differ. declin.	— 643
Cos. 26°. 21'. 24''. .	9,952332	Eadem in minutis, & secundis . . .	— 10. 43
. *Cos.* 26 . 32	$\bar{0}$,048335	Decl. astri cogniti	26. 32, 0 . B.
1915	3,282266	Decl. incogniti correcta	26. 21, 17 . B.

35. Pro

(*) Hic exhibetur calculus pro prima e binis circumstantiis contrariis cujuscumque e tribus binariis expressis numero secundo, ubi declinatio astri cogniti est borealis, semirhombus borealis, chorda astri incogniti major, quam astri cogniti: idcirco differentia declinationum subtrahitur a declinatione astri cogniti. Remanet autem ejusdem denominationis utraque denominatio, quia differentia inventa est minor declinatione astri cogniti. In tota, & sola *prima* columna adhibentur logarithmi.

35. Pro ascensione rectâ differentia declinationis inventa debet duci in $\frac{tan.a}{cos.decl.}$, quæ erit correctio ascensionis rectæ inventæ per appulsum ad diametrum majorem addenda juxta num. 10 hìc, ubi semirhombus est borealis, tempus t'' astri cogniti longius quam incogniti, chorda ipsius propior cuspidi boreali, quia brevior in semirhombo boreali. Porro ascensio recta invenitur per appulsus ad diametrum demendo tempus *appulsus* astri præcedentis ab appulsu sequentis: *differentia temporaria reducenda ad partes æquatoris more solito*, & *addenda ascensioni rectæ* astri cogniti, quod *hìc ponitur præcedens: ea ascensio recta ponetur hìc* 125°. 8'. 32''.

Tangens anguli *a*	9,616782
Differentia declinationis = 639''	2,805501
Complem. log. cos. declin. correctæ = 26°. 21'. 17'' . .	$\overline{0}$,047688
Correctio in secundis additiva = 295'' (*)	2,469971
Eadem in minutis & secundis + 4'. 55''	

Appulsus ad diametrum majorem astri	incogniti . . .	6^h. 34'. 10''
	cogniti . . .	6 . 17 . 42
Differentia horaria		16 . 28
Differentia in gradibus, & minutis		+ 4°. 7. 0
Ascensio recta astri cogniti		125. 8. 32
Ascensio recta incogniti nondum correcta		129. 15. 32
Correctio additiva		4. 55
Ascensio recta astri secundi correcta		129. 20. 27

36. Pro correctione poterat assumi (num. 14) differentia binorum $dt = 36'' - 24'' = 12''$ ductà in $\frac{30}{m} = \frac{30 \times 12''}{1,224}$, sive $\frac{360''}{1,224}$ $= 294'' = 4'.54''$, qui valor facilius inventus non differt a priore

(*) Hæc correctio est additiva juxta regulas expositas numero 13; quia semirhombus est borealis, primum tempus *t* astri cogniti majus secundo *t'*, & chorda astri cogniti minor, quam chorda incogniti, & idcirco in eo semirhombo propior vertici boreali, quam ipsa.

re nisi per unicum secundum, discrimine tam exiguo orto ex fractionibus minoribus contemptis in toto calculo.

EXEMPLUM II.

Pro binis astris percurrentibus semirhombos oppositos.

38. Tempora appulsuum ad latera, & diametrum rhombi habentur in tabula sequenti.

Pro astro primo	Pro secundo
$6^h.16'.32''$	$6^h.32'.25''$
17.42	33.34
18.28	35.19
$t = 1.10$	1.9
$t' = 0.46$	1.45
$t'' = 1.56 = 116''$	$2.54 = 174''$
$dt = 0.24$	0.36

39. Cum dt, & t'' sint hìc iidem ac in exemplo primo, inventio anguli a fit, ut ibi: is evadit idem, adeoque iidem bini anguli inde deducti, & eadem summa m tangentium, ac iidem valores chordarum substitutarum. Sed pro declinationis differentia oportet invenire longitudinem diametri ductam in cosinum a, & subtrahere ab ipsa summam chordarum substitutarum. Sit diameter major $= 1^\circ.30' = 90' = 5400''$.

Sit diameter major $1^\circ.30' = 5400''$ . . . . $3,732394$
Est cosinus $a = 22^\circ.29'$ . . . . $9,965668$
Erit MS $= 4989''$ . . . . $3,698062$

40. Ab hoc valore debet auferri summa chordarum prius inventarum $1272''$, & $1908''$, ut obtineatur differentia declinationis non correcta, quæ addita suppositæ exhibet declinationem astri incogniti non correctam, sed proximam. Valor secundæ chordæ hìc etiam est corrigendus multiplicando ipsum per cosinum declinationis inventæ, & dividendo per cosinum prioris. Ita invenitur

tur novus valor chordæ correctus, & iteratur calculus prior. En autem totum calculi progressum

Chorda substituta astri cogniti	1272''
Astri incogniti nondum correcta	1908
Summa	3180
Diameter major multiplicata per *cos.a*	4989
Differentia declinationum nondum correcta	− 1809
Eadem redacta ad minuta, & secunda	− 30'. 9''
Declinatio astri cogniti	26°. 32'. 0
Declinatio astri incogniti nondum correcta	26. 1. 51

Chorda astri incogniti nondum correcta 1908''	3,280599
Cosinus declinationis inventæ 26°. 1'. 51''	9,953590
Cosinus prius assumptæ 26°. 32'. 0'' cum complemento log.	$\bar{0}$,048335
Chorda correcta 1917''	3,282524

Chorda substituta astri cogniti	1272''
Astri incogniti correcta	1917
Summa	3189
Diameter major multiplicata per *cos.a*	4989
Differentia declinationum correcta	− 1800
Eadem redacta ad minuta, & secunda	− 30'. 0
Declinatio astri cogniti	26. 32. 0
Declinatio astri incogniti correcta	26. 2. 0

41. Sine nova repetitione calculi poterat declinationi inventæ addi differentia valoris correcti novi chordæ secundæ substitutæ a valore priore non correcto. Prior erat 1908'', novus est 1917'', differentia est 9'', quæ addita priori declinationi 26°. 1'. 51'' exhibet novam correctam 26°. 2'. 0''. Facile in singulis casibus apparebit, an ea differentia debeat addi, an subtrahi: verum omnis difficultas determinandi id ipsum tollitur repetito calculo.

42. Differentia ascensionis rectæ invenitur prorsus ut prius per differentiam declinationis ductam in $\frac{tan.a}{cos.decl.}$

Tan-

Tangens anguli a	9,616782
Differentia declinationis 1800''	3,255272
Complem. logar. cosin. declinationis correctæ 26°. 2'. 0'' .	0,046463
Correctio in secundis additiva 829''	2,918517
Eadem in minutis, & secundis + 13°. 49'	

Appulsus ad diametrum majorem astri	incogniti . .	6^h. 34'. 10
	cogniti . . .	6 . 17 . 42
Differentia horaria		16 . 28
Differentia in gradibus, & minutis		4°. 7. 0
Ascensio recta astri cogniti		125 . 8 . 32
Ascensio recta astri incogniti nondum correcta . . .		129 . 15 . 32
Correctio additiva		13 . 49
Ascensio recta astri incogniti correcta		129 . 29 . 21

42. Methodus inveniendi unum e sex appulsibus, qui desit, ita facilis est ex proportionalitate valorum t, t' directa, vel inversa, ut peculiari exemplo non indigeat. Hìc illud tantummodo admonebimus, correctionem chordæ, & restitutionem calculi non esse peculiarem huic methodo positionis chordarum obliquæ: ea pertinet etiam ad methodum communem, cum pendeat a declinatione assumptâ æquali declinationi alterius astri. Si e præcedentium dierum observationibus innotescat, saltem proxime, nova declinatio; tum poterit assumi immediate ejus cosinus in reductione valoris chordæ secundæ a tempore ad partes circuli maximi. Hìc adjecta est sola inventio valorum n, m, & eorum usus simplex in calculo.

§. III.

De casibus, in quibus viæ astrorum secent utramque rhombi diametrum, vel solam minorem.

43. In superioribus persecuti sumus casum, qui semper usuvenit, in quo via astri utriusque secat diametrum rhombi majorem tantummodo: ita enim rhombus disponi solet, ut ea via sit ad sensum parallela diametro minori, cui si accurate parallela sit, nunquam secabitur diameter minor. At si via altera, vel utraque

que ſecet utrumque axem; adhuc admodum facile determinantur ambæ differentiæ, nimirum declinationis, & aſcenſionis rectæ.

44. Chorda rhombi occurrens utrique diametro (fig. 3) minori in Q', majori in L debet omnino occurrere binis lateribus oppoſitis parallelis, ut AE in F, & BD in I. Tempora per FL, LI dicantur t, t', ut prius, ac tempus totale t'', tempora vero per FQ, QI' dicantur T, T', ac tempus totale T + T' erit idem ac t'', ob æqualitatem chordarum FI, F'I' parallelarum inter latera rhombi parallela. Erit autem EL : LB :: FL : LI :: t : t'.

45. *Hinc capiendo ſemiſummas, & ſemidifferentias* eruitur $\frac{1}{2}(t + t') = \frac{1}{2}t'' : \frac{1}{2}(t - t') :: CB : CL = \frac{(t - t')\times CB}{t''}$. Pariter AQ : QD :: FQ : QI :: T : T', adeoque $\frac{1}{2}(T + T') = \frac{1}{2}t'' : \frac{1}{2}(T - T') :: CA : CQ = \frac{(T - T')\times CA}{t''}$. Quare CL : CQ :: $\frac{(t - t')\times CB}{t''} : \frac{(T - T')\times CA}{t''}$. Ea eſt ratio radii ad tangentem anguli CLQ, ſive BLI, & ob t'' communem, ac CB = 2CA evadit ratio $2(t - t') : T - T'$, ſive $1 : \frac{T - T'}{2(t - t')}$.

46. Quare habetur hujuſmodi theorema. *Differentia temporum inter appulſus ad bina latera oppoſita, & diametrum minorem diviſa per duplam differentiam inter eoſdem appulſus ad ea latera, & appulſum ad diametrum majorem exhibet tangentem anguli, quo via ſideris inclinatur ad diametrum majorem.*

47. Determinato eo angulo, determinabitur facile diameter utraque. Nam in triangulo ILB præter eum angulum habetur IBL = 26°. 34' (num. 9). Quare habebitur & tertius BIL. Eſt autem ut ſinus IBL ad ſinum BIL, ita LI ad LB, & LF ad LE, adeoque ita tota FI ad BE. Datur FI = $15t''$*coſ.decl.* Quare habebitur BE, & ejus dimidia AD.

48. Præterea erit $t + t' = t'' : t' :: FI : LI :: BE : BL$; idcirco hæc datur ob data tempora, & datam diametrum majorem BE, ac habetur hujuſmodi theorema. *Ut tempus totale ad tempus inter diametrum majorem & latus poſterius, ita diame-*

ter major BE, *ad ejus partem* BL *interceptam inter chordam & verticem* B.

49. Si binæ chordæ, ut FI, F'I', occurrant utrique diametro; inventis per id theorema BL, BL' invenietur earum differentia LL'. Quod si L'O sit perpendicularis ad viam astri cogniti FI; invento angulo L'LO (num. 46), invenietur L'O, ducendo LL' in ejus sinum, quæ erit differentia declinationum, & ducendo ipsam in ejus cosinum habebitur LO (*), quæ divisa per cosinum declinationis ejus astri cogniti exhibebit arcum ejus paralleli addendum differentiæ ascensionis rectæ inventæ per binos appulsus ad diametrum majorem BE, vel ab ea subtrahendum, ut habeatur differentia eadem correcta.

50. Verum notato appulsu alterius astri ad utramque diametrum, pro altero satis erit notare appulsum ad unicam, & ad unicum latus. Tempus totale erit quam proxime idem in utroque, ut vidimus. Quamobrem notato tempore appulsus ad diametrum, & ad latus alterum, habetur appulsus etiam ad alterum, & utrumvis e temporibus per bina segmenta, alterum immediate ex observatione, alterum subtrahendo ipsum a tempore totali t''. Sed alterum illud, quod obtinetur per immediatam observationem, sufficit: id jacebit in alterutro e semirhombis separatis ab illa diametro, ut si notentur appulsus L', I', jacebit L'I' in eodem semirhombo BDE cum LI: tum vero per bina segmenta binarum chordarum jacentia in eo semirhombo facile invenietur LL'. Sic in eo casu erit LI ad L'I', ut BL ad BL', cumque sint LI, L'I' quam proxime ut tempora, erit ut tempus per LI ad differentiam temporum per LI, L'I', ita BL inventa per theorema numeri 47 ad LL'. Inde invento angulo L'LO (num. 45) invenitur LO pro ascensione recta, & L'O pro declinatione. Ex eo casu patet, quid agendum in omnibus reliquis, in quibus inventum sit in observatione potius primum tempus, vel chordarum partes sint aliter

(*) Si differentia declinationum sit satis magna, ut timeri possit error sensibilis in valore chordæ F'I' erutæ multiplicando tempus per 15*cos.decl.* adhibita declinatione astri cogniti; potest adhiberi correctiuncula ut num. 28 inveniendo declinationem astri incogniti per eam differentiam, tum adhibendo hanc novam declinationem in formula 15*cos.decl.*, & repetendo eundem brevem calculum.

liter diſpoſitæ, ac in ea figura. Semper adhibendo ſegmenta jacentia in eodem ſemirhombo invenietur ratio ſive BL ad BL', ſive EL ad EL', & inventa BL, vel EL' habebitur LL', ac LO, L'O.

51. Quod ſi alterâ chordâ, ut FI, occurrente utrique diametro, altera, ut F''I'', vel F'''I''' occurrat uni tantum, & notentur appulſus; habebitur determinatio ſimilis. Erit enim ut tempus per LI ad differentiam temporum per LI, L''I'', ita BL ad LL'', vel ut tempus per FL ad differentiam temporis per FL, F'''L''', ita EL = BE − BL ad LL'''. Inde vero, ut prius, habebuntur LO', L''O', vel LO'', L'''O'' pro aſcenſione rectâ, & declinatione.

52. Si binæ chordæ occurrant ſoli diametro minori, vel altera *huic, altera utrique; poſſunt itidem determinari omnia*, mutatis admodum parum iis, quæ dicta ſunt in fig. 1 de concurſu utriuſque chordæ cum majore, vel alterius cum ipſa; & alterius cum utroque in fig. 3. Satis eſt in iis figuris concipere EB non duplam, sed dimidiam AD. Tum angulus DBC habebit pro tangente 2, non $\frac{1}{2}$, eritque non 26°.34', ut num. 9, ſed ejus complementum 63°.26': erit in fig. 1 IN non dupla, ſed dimidia HN, & angulus IFN, ſive MBL $= \frac{IN}{NF}$ non habebit pro tangente $\frac{2dt}{t''}$, ut num. 7, ſed $\frac{dt}{2t''}$, qua mutatione factâ, procedent omnia reliqua, ut prius. *Verum ſi ita obvertatur rhombus, ut viæ aſtrorum ſecent diametrum minorem, amittetur magnitudo campi* teleſcopii, cum in eo caſu aſtrum poſſit tranſire per ipſum campum extra rhombum, dum in caſu, in quo viæ ſint perpendiculares diametro majori, nullum aſtrum poteſt tranſire per campum teleſcopii, quin ingrediatur ipſum rhombum, & appellat ad utrumque latus, & ad eam ipſam diametrum.

53. Eam ob cauſam ita diſponendus eſt tubus ferens rhombum, *ut diameter major ſit proxime perpendicularis viæ aſtrorum*, nimirum *ut congruat proxime cum arcu horarii*. *Exigua deviatio* ab *ea poſitione deprehendetur per inæqualitatem* temporum t, t', & ope eorum *differentiæ*, *invenietur correctio* adhibenda, cujus theoriam continet §. I, & regulas, ac exempla §. II.

OPUSCULUM XVII.

DE ERRORE INDUCTO A REFRACTIONE IN USU HOROLOGII SOLARIS ANNULARIS UNIVERSALIS METHODO POSTERIORE SIMPLICIORE (*).

NOTISSIMUM *est horologii solaris genus constans binis annulis, quorum alter in usu instrumenti redditur alteri perpendicularis cum suspensione excurrente per primum ita, ut collocari possit in distantia a secundo* æquali latitudini *loci*, & foramine idoneo ad transmittendum radium excurrente per axem infixum primo annulo, & perpendicularem secundo, ut collocari possit in distantia a centro communi, quæ sit æqualis tangenti declinationis ad radium secundi circuli, quam ob

(*) Habetur hic numero 2, qua occasione conscriptum sit hoc Opusculum, in quo solvitur methodo breviore, & simpliciore idem problema, quod initio tentatum aliis, quæ se sponte rem consideranti obtulerant primæ, ut obviæ, & maxime ad rem idoneæ, exhibuerant complicationem maximam, & usum curvarum ordinis admodum elevati: sub ipsum finem ejusmodi perquisitionis animadverteram, *licere alia via progredi, quam ingressus deveneram ad solutionem, quæ mihi videbatur ita simplex, ut nihil ulterius desiderandum superesset*. Eam solutionem *exposueram in alio* Opusculo, quo jam penitus absoluto, incidi in aliam adhuc multo simpliciorem, quam hic propono. Plerumque id accidit, quod & alibi monui, potissimum in geometricis meditationibus, ut quæ simplicissima sunt, postrema demum menti sese offerant.

Cum in eo priore Opusculo continerentur multa admodum idonea ad perspiciendam Geometriæ vim, atque fœcunditatem, & considerationes uberes, quæ pertinent ad comparationes methodorum, ac contemplationem constructionum geometricarum, evolutionem formularum algebraicarum, enumerationem casuum, originem errorum, qui oriri possunt in usu inconsiderato methodorum differentialium, potissimum ubi eæ applicantur non ad quantitates infinitesimas, nimirum indefinite parvas, sed in se determinatas, & *tantum physice* exiguas; illud ipsum destinaveram typis huic subjiciendum. Verum cum ibidem occurrant nonnulla fere prorsus communia huc inde translata; iis tantummodo indicatis, excerpam ibi ea, quæ vel prorsus discrepant ab hic proponendis, vel utut cum ipsis congruentia ita connexa sunt cum adjectis, ut ab iis divelli non possint.

ob causam quadrans primi circuli a secundo ad polum dividitur in gradus respondentes latitudinibus, & in axe a centro versus utramque partem notantur tangentes respondentes declinationibus, adscriptis numeris graduum, ad quos eæ pertinent, & signis zodiaci in altera facie, in altera mensibus anni, quibus respondent eæ declinationes.

2. Usus ejus instrumenti supponit radium solarem delatum recta a sole ad instrumentum collocatum in centro terræ, cui suppositioni contraria est *refractio*, quæ radium incurvat per atmosphæram, ac *parallaxis*, *quæ respondet distantiæ superficiei terrestris, in qua id adhibetur*, a centro, nimirum semidiametro terræ. *Utraque exigua est*, & inducit errorem fere semper exiguum, ac plerumque insensibilem in usu eorum *instrumentorum*, quæ plerumque solent esse exigua, & facile portatilia. Verum aliquando ea fiunt multo majora ad habendam horam multo magis exactam, cujusmodi unam admodum affabre elaboratam ostendit mihi Eminentissimus Cardinalis de Luynes Astronomiæ & protector, & cultor egregius; quanquam ejus constructio est admodum diversa, constans nimirum tribus circulis, & alidada habente pinnulam cum foramine. Errores, quos inducit refractio multis vicibus major parallaxi, obstant omnimodæ exactitudini. Promisi ipsi eorum determinationem, quam aliis complicatioribus methodis quæsitam, & inventam alio longiore Opusculo sum persecutus. *Illud absolveram*, &. *ipsi obtuleram*, *cum paullo post incidi in aliam* multo breviorem, ac simpliciorem, quam in hoc Opusculo evolvam. Occurrent autem in quibusdam casibus errores non contemnendi. Ii communes sunt illi alteri constructioni adbibenti tres circulos cum alidada, de qua agam, posteaquam evolvero ea, quæ pertinent ad hanc constructionem communiter usitatam.

§. I.

Proponitur descriptio, & usus ejus instrumenti.

3. CIRCULUS (Tab. XII fig. 1) AEBD exprimit primum annulum, DKEK' secundum ipsi perpendicularem cum diametro communi

muni *DCE*, & axe PCP', referente P polum borealem elevatum *pro nostro hemisphærio* boreali supra horizontem, P' australem depressum *infra*: A est suspensio mobilis, quæ *collocatur* ad distantiam DA æqualem latitudini loci, F *foramen* transmittens radios, quod excurrit per axem PP', & collocatur ad distantiam CF æqualem tangenti declinationis ad radium CD versus P, vel P', prout declinatio fuerit borealis, vel australis.

4. Suspenso libere instrumento per annulum affixum ipsi puncto mobili A, si *primus circulus fuerit in plano* Meridiani, patet, axem P'P habiturum *directionem axis mundani ita*, ut productus versus P abeat in polum *borealem* P'' *sphæræ cælestis habentis* pro centro punctum F. *In ea sphæra sit* P''ZQ *quadrans Meridiani cælestis jacens in plano primi* circuli, Z zenith respondens puncto F, Q punctum æquatoris. Si recta HF ducta e quopiam puncto secundi circuli per foramen F concipiatur producta usque ad punctum S superficiei ejusdem sphæræ cælestis, & punctum ipsum H concipiatur excurrens per totum secundum circulum; punctum S percurret in ea sphæra parallelum respondentem ei declinationi: nam angulus P''FS = HFC erit complementum anguli FHC = FDC, nimirum declinationi, quæ respondet tangenti CF, adeoque arcus P''S erit distantia ejus paralleli a polo: recta EF tendet in Meridiano ad punctum N, in quo is parallelus ipsum intersecat, & erit QN *declinatio*, ZQ *latitudo loci*, P''Z *complementum latitudinis*, *ZS distantia puncti S a zenith*. *Si autem sol fuerit* in eo *parallelo* ubilibet in S; *ejus* radius *SF* abibit ad aliquod punctum H secundi circuli, qui si fuerit divisus in horas 24, quarum hora XII meridiana respondeat ejus puncto infimo E; punctum H indicabit horam, quod sic facile demonstratur.

5. Angulus horarius in superficie cælesti erit ZP''S, qui exhibet inclinationem plani CP''S ad planum CP''Z, sive plani CP'H ad planum CP'E, cujus mensura in sphæra instrumenti est arcus EH: idcirco is redactus ad tempus exhibebit *distantiam horariam* momenti observationis a meridie, adeoque *horam* vespertinam, vel complementum matutinæ ad XII.

6. Verum in eo consistit maxima utilitas ejus instrumenti, quod

quod ipsum per se, dum indicat horam, simul indicat directionem plani Meridiani. Si enim instrumentum convertatur circa axem AB; radius transmissus per F non poterit abire ad secundum circulum, nisi in binis punctis H, & H' æque distantibus a puncto infimo E: quod si demonstretur; patebit, satis esse, ut innotescat, an observatio fiat ante, an post meridiem, ut ex iis binis positionibus seligatur illa, quæ respondet momento observationis, quæ nimirum indicabit planum Meridiani congruens cum plano primi circuli. *Id autem sic facile* demonstratur.

7. Recta ZF *occurrat primo circulo in G*, ac eadem producta in I, *& si per conversionem* instrumenti radius abeat in H' pro H, *angulus IFH' radii retinentis semper directionem* eandem cum recta FI, quæ itidem remanet verticalis, *erit* = *IFH*. *Concipiatur* in plano instrumenti CFE recta ex E parallela FC, quæ occurrat in *M* rectæ FI jacenti in eodem plano: erit ipsa perpendicularis toti plano secundi circuli, ut FC; adeoque triangula MEH, MEH' rectangula ad E. Porro in iis latus ME est commune, & hypothenusæ MH, MH' æquales sunt, cum in triangulis MFH, *MFH'* latus *MF* sit commune, *radii FH, FH'*, sunt æquales, ut & latera coni recti habentis verticem in F, & axem FC perpendicularem plano basis circularis EKDK', & æquales anguli MFH, MFH', qui sunt iidem, ac IFH, IFH'. Quare & chordæ circuli EH, EH' æquales *erunt, & æquales arcus horarii, quos subtendunt hinc, & inde ab E, quæ æqualitas in nullo alio puncto ejus circuli haberi potest*.

§. II.

Determinantur errores orti e refractione.

8. QUÆ superiore paragrapho sunt proposita rite procedunt, si mente secludatur refractio, & parallaxis, quarum altera solem *elevat in plano verticali*, altera deprimit. Hæc posterior nunquam *pertingit ad 9* secunda, illa prior in horizonte assurgit etiam ad 33 *minuta*, & quanquam in majoribus altitudinibus sit etiam ipsa exigua, *semper adhuc est multo major*, quam parallaxis. Quin immo parallaxis negligi etiam poterit, cum refractio

in

in minoribus altitudinibus supra horizontem, in quibus parallaxis est minus insensibilis, sit incerta intra non pauca secunda, & vero etiam variabilis. Effectus earum conjunctus elevabit solem in circulo verticali sphæræ cælestis ex S in s, adeoque deprimet radium FH in plano verticali transeunte per rectam GI ad punctum h positum in intersectione ejus plani cum superficie sphæræ instrumenti. Hinc primo hujus circulo habente directionem Meridiani sibi debitam, radius non incidet in secundum circulum KEK'; sed instrumentum debebit converti, donec quoddam punctum h' ejus circuli incidat in radium Fh. Oportet determinare arcum Hh', qui reductus ad tempus divisione solita per 15, exhibebit errorem temporarium in hora indicata ab instrumento inductum ab ea depressione radii, & inclinationem plani IFh' ad planum IFh, qui erit error inductus ab eadem in positione Meridiani: nam post conversionem recta FI instrumenti remanebit verticalis, & recta Fh' acquiret directionem radii Fh, dum planum instrumenti IFH recedet a positione præcedenti tantundem, quantum recesserit planum IFh', quo eodem angulo, patet, debere converti totum planum primi circuli circa rectam verticalem GI. Omnia fient, tanquam si conversio fieret circa ipsam rectam GI immotam: si enim post conversionem transferatur totum instrumentum motu sibi parallelo, donec recta GI redeat ad locum priorem; radius abibit in idem punctum h'; & remanebunt omnia, ac si conversio facta fuisset circa ipsam GI.

9. Recta h'F positionis prioris debebit in sphæra cælesti abire ad quoddam punctum s' paralleli SN (num. 4), ita ut Zs, Zs' mensuræ angulorum ZFs, ZFs', sive IFh, IFh', sint æquales, & in conversione circa rectam GI immotam, puncto Z immoto, debebit arcus Zs abire in Zs': adeoque angulus sZs' erit secundus error inclinationis primi circuli ad verum Meridianum: angulus autem ZP''s' habebit pro mensura arcum Eh', ut angulus ZP''S habebat arcum EH. Quare angulus SP''s' habebit pro mensura arcum Hh', qui exhibet primum errorem horarium divisione instituta per 15. Quærendi sunt igitur anguli SP''s', SZs', qui exhibebunt errores quæsitos.

10. Si

10. Ii facile invenientur pro quavis data latitudine loci, declinatione solis, & hora vera, methodo sequenti, ex qua determinatione licebit computare pro loco quovis, in quo instrumentum adhibendum sit, tabulam errorum habentem duplex argumentum, declinationem solis, & horam veram. Poterit autem error computatus pro hora vera applicari etiam horæ indicatæ ab horologio, quæ cum ob exiguitatem refractionis parum admodum differat a vera, habebit correctionem ad sensum eandem, ac illa. Porro quotiescumque hìc in posterum nominabimus refractionem, intelligemus eam *imminutam perquam exiguo numero secundorum, quem continet parallaxis*. Refractionum tabula passim habetur applicata *distantiis a zenith*, quæ pro quavis distantia observata, vel inventa per Trigonometriam facile inde eruetur, & corrigetur per parallaxim, nisi hæc negligatur etiam juxta num. 8. En eorum angulorum determinationes admodum simplices.

11. Data latitudine loci, dabitur ejus complementum P''Z, & data declinatione solis, dabitur ejus complementum P''S, addendo ipsam gradibus 90, *si fuerit australis*, vel inde auferendo, si borealis: ea sunt bina latera trianguli ZP''S. Si assumatur hora quævis, & reducatur ad partes æquatoris tribuendo singulis horis, minutis, secundis, 15 gradus, minuta, secunda; habebitur angulus etiam ZP''S. Inde in eo triangulo invenietur latus ZS distantia vera a zenith, a qua si auferatur *refractio Ss*, habebitur *distantia apparens Zs = Zs': in eodem autem triangulo* ZP''S habebitur itidem angulus P''ZS. In triangulo ZP''s' habebitur latus P''Z idem ac prius, & Ps' erit = PS, puncto nimirum s' posito in eodem parallelo SN, ac habebitur etiam tertium latus Zs' = Zs jam inventum ex ZS invento in priore triangulo, & refractione subtracta. Quare invenientur in ipso anguli s'P''Z, s'ZP'', quorum priore ablato ab SP''Z, & SZP'' a posteriore, habebuntur *bini anguli* quæsiti SP''s', SZs', & per ipsos quæsiti errores.

12. *Si arcus Zs' fuerit minor arcu* ZN; casus erit impossibilis: nam *in triangulo s'P''Z deberent bina latera* P''Z, Zs' simul esse minora *tertio P''s', quod debet æquari arcui* P''N = P''Z + ZN. Constat sane, distantiam *a* zenith meridianam esse omnium

minimam in eodem parallelo : hinc si differentia distantiæ a zenith *SZ*, quæ respondet horæ datæ, sit minor, quam distantia meridiana ZN, quæ est = ZQ ± QN = *lat.* ± *decl.*, per quantitatem minorem refractione; nulla conversione instrumenti poterit radius adduci ad secundum circulum. Porro facile admodum determinabuntur omnes casus, in quibus id accidit, & limites, in quibus impossibilitas incipit, ac errores respondentes iis limitibus, qui cæteris paribus erunt omnium maximi.

13. In primis pro quovis loco, & quavis declinatione solis, id accidet prope meridiem: nam distantia *ZS* prope meridiem mutatur parum admodum ita, ut demum desinat in ipsam *ZN*. Quare utcumque sit exigua refractio *Ss*, aliquando arcus *Zs* evadet æqualis ipsi *ZN*, ac deinde fiet minor. Limes habebitur in ipsa æqualitate: is autem invenietur resolvendo triangulum P''ZS pro casu congruentiæ punctorum *s'*, N in circulo meridiano. In eo triangulo dabitur latus P''Z = *compl.lat.*, & P''S = *compl.decl.* Quoniam prope meridiem distantia a zenith mutatur parum admodum; poterit assumi pro *r* refractio debita distantiæ solis a zenith meridianæ = *lat.* ± *decl.* pro refractione debita puncto S constituto in illo limite prope punctum *s'*, quod abit ibi in meridie in N, adeoque dabitur arcus ZN = Z*s'* = Z*s* = ZS − S*s*, qui evadet = *lat.* ± *decl.* − *r*, nam sole S appellente ad meridianum infra N per arcum æqualem refractioni, ejus distantia a zenith evadit = *P''S* − *P''Z* = *90* ± *decl.* − *compl.lat.* = *lat.* ± *decl.* Hinc in triangulo sphærico ZP''S habebuntur omnia tria latera, adeoque invenientur anguli SP''Z, SZP'', quorum posterior ablatus a 180° exhibebit secundum errorem maximum ejus diei in ipso limite, & primus divisus per 15 distantiam horariam limitis ejusdem a meridie, quæ ipsa erit error maximus possibilis instrumenti pro eo die.

14. Deinde prope polum casus evadet impossibilis per totam conversionem solis circa polum. Nam est arcus *ZS minor*, quam P''Z + P''S, sive quam 2P''Z + ZN. Quare si fuerit P''Z minor, quam $\frac{1}{2}$*Ss*; erit ZS − *Ss*, nimirum Z*s minor*, quam ZN: adeoque si fuerit distantia a polo minor, quam dimidia refractio;

casus

casus erit impossibilis. Limes impossibilitatis habebitur, ubi distantia loci a polo fuerit æqualis dimidiæ refractioni. Refractio in eo casu erit quam proxime ipsa refractio debita altitudini æquali declinationi solis, qui in tanta vicinia loci respectu poli conservat tota die eandem altitudinem supra horizontem. Sole existente in æquatore, ea erit refractio proxima horizontali; adeoque casus evadet impossibilis in æquinoctiis pro locis distantibus a polo minus, quam per 16 minuta: limes autem erit eo propior polo, quo anni tempus *fuerit propius solstitio æstivo*.

15. *In superioribus solutionibus oportebit* calculos triangulorum *urgere usque ad secunda*, ne error *exiguus in determinatione* arcus *ZS primi trianguli traductus* ad *latus* Zs' *secundi* inducat errorem non exiguum in angulos trianguli $s'P''Z$ ad P'', & Z, ut posset ob exiguam mutationem distantiæ a zenith prope meridiem: is error posset esse etiam multo major ipsis quantitatibus quæsitis. Ea calculi exactitudo potest evitari adhibitâ methodo differentiali, quæ etiam exhibebit formulas expeditiores, ac fere semper veris valoribus quamproximas: in *iis* habebuntur valores angulorum, & arcuum, quos *satis* erit *nosse* *accuratos* intra *limites* multo magis remotos.

16. *Concipiatur* arcus ss', qui ob $Zs = Zs'$, & angulum sZs' exiguum *haberi* poterit pro recta perpendiculari arcui Ss itidem *habito pro recta*. *Haberi etiam poterit* $s'S$ *pro recta perpendiculari arcui* $P''S$, *adeoque angulus* $s'Ss$ *erit complementum* anguli $P''SZ$. Porro erit in triangulo Sss' rectangulo ad s latus $Ss = r$,

$$\& \; Ss' = \frac{Ss}{cos.s'Ss} = \frac{r}{sin.P''SZ}, \; \& \; ss' = \frac{r}{cos.P''SZ}.$$

Porro arcus Ss' divisus per $sin.P''S$ exhibet angulum SPs', & $s's$ divisus per $sin.Zs'$, pro quo poni potest ZS, angulum $s'Zs$. Quare satis erit resolvere primum triangulum $P''ZS$, & invenire in ipso latus *ZS distantiam* solis a zenith, quæ dicatur D, & exhibeat *refractionem* r, ac *angulum* $P''SZ$, qui dicatur S: *bini errores* erunt $\frac{r}{15 sin.S \times cos.decl.}$, ac $\frac{r}{cos.S \times sin.D}$.

17. Si libeat eliminare angulum S, retentâ solâ distantiâ a zenith

nith D; satis erit ponere angulum horarium ZP''S = H, & adhibere proportionem sinuum laterum, & angulorum oppositorum. Erit nimirum $sin.P''SZ = \frac{sin.P''Z \times sin.SP''Z}{sin.ZS} = \frac{cos.lat. \times sin.H}{sin.D}$,

unde fiet primus error $= \frac{rsin.D}{15cos.decl. \times cos.lat. \times sin.H}$. Arcus Ss',

qui erat $\frac{r}{sin.P''SZ}$, erit $\frac{rsin.D}{cos.lat. \times sin.H}$, qui si dicatur a, & bini errores e, e'; erit $e = \frac{a}{15cos.decl.}$; $e' = \frac{\surd((a+r)(a-r))}{sin.D}$; nam in triangulo $Ss s'$ est $ss' = \surd(Ss'^2 - Ss^2) = \surd(a^2 - r^2) = \surd((a+r)(a-r))$, qui valor divisus per $sin.D$ exhibet eum valorem pro e'.

18. Prope meridiem $\frac{1}{sin.H}$ excrescit in immensum, & in meridie evadit valor infinitus: idem accidit valori $\frac{1}{cos.lat.}$ prope polum, & in polo. Ibi valor erroris primi e evaderet immensus, ac demum infinitus, quod per se ostendit, valorem formulæ ibi esse erroneum: nam si radius facta conversione aliquando incidit in secundum circulum; distantia puncti incursus a puncto meridiei E non potest esse major semicirculo. Sed jam vidimus, in iis casibus problema esse impossibile. Error provenit ex eo, quod dum anguli $s'sS$, $s'SP''$ assumuntur pro rectis, negliguntur quantitates exiguæ, quæ tuto negligi possunt, donec angulus P''SZ, respectu cujus negliguntur, est non nimis exiguus: secus, si sit exiguus etiam ipse, ut est, ubi S nimis accedit ad N prope meridiem, vel Z ad P'' prope polum.

19. Si sol fuerit in æquatore cælesti; formula evadit simplicior, facto $cos.decl. = 1$, adeoque fit $e = \frac{rsin.D}{15cos.lat. \times sin.H}$. Si locus fuerit in æquatore terrestri, & sol extra cælestem; $cos.lat.$ evadit $= 1$, & formula $e = \frac{rsin.D}{15cos.decl. \times sin.H}$. Si & sol fuerit in æquatore cælesti, & locus in terrestri; obtinebitur $e = \frac{rsin.D}{}$

$\frac{r sin.D}{15 sin.H}$. Sed eo casu H = D; nam pro loco posito in æquatore terrestri æquator cælestis evadit primus verticalis, in quo sol positus ascendit rectà ab horizonte ad zenith ita, ut existente meridie in ipso zenith, distantia D a zenith sit ipse arcus horarius æquatoris H. Idcirco ibi fit $e = \frac{1}{15}r$. Refractio elevat solem in æquatore ipso, ac nulla conversione instrumenti est opus ad hoc, ut radius refractus incidat in secundum circulum. Id indicat ipsa formula $e' = \frac{\sqrt{((a+r)(a-r))}}{sin.D}$, in qua valor $a = \frac{r sin.D}{cos.lat. \times sin.H}$ evadit $= r$ ob $cos.lat. = 1$, & H = D; adeoque $a - r = 0$. Si sol fuerit in zenith; *sin.*D evadit = 0, quo casu formula evadit = 0 ex duplici capite; quia fit = 0 tam *sin.*D, quam *r*: nec in ipso meridie, in quo *sin.*H = 0, impeditur evanescentia formulæ: nam in numeratore evanescunt binæ dimensiones simul, in denominatore unica *sin.*H. Nec vero potest evanescere ulla alia simul. Nam *cos.decl.* non potest decrescere infra cosinum maximæ declinationis 23°. 28'; & *cos.lat.* non potest evanescere nisi loco existente in polo terrestri, in quo sol non potest ascendere ad zenith.

20. Porro satis patet per sese, in ipso zenith, in quo refractio est nulla, errorem ab ipsa ortum esse itidem nullum, nec haberi locum pro perquisitione, in qua quæratur error inductus a refractione.

21. Formula tuto adhibebitur pluribus gradibus procul a meridie, & procul a polo terrestri. Prope eos casus poterit adhiberi illa alia methodus accurata, nimirum resolutionis binorum triangulorum sphæricorum ZP''S, ZP''s'. In usu formulæ valores *sin.*D, *cos.decl.*, *cos.lat.*, *sin.*H possunt assumi laxiores, nimirum etiam neglectis secundis, quia exiguus error respectu singulorum sinuum, vel cosinuum, inducet errorem exiguum respectu totius formulæ. Assumpto *r* in minutis, vel secundis circuli maximi, obveniet valor formulæ *e* in minutis itidem, vel secundis horariis vero proximus, si ii sinus, & cosinus assumpti fuerint discrepantes a ve-

ris

ris per quantitates exiguas respectu totius. Hinc si libeat computare integram errorum tabulam; possent ipsi valores distantiæ D a zenith assumi multo facilius per constructionem graphicam.

22. Ego jam olim edidi constructionem planam omnium casuum Trigonometriæ sphæricæ sane simplicem, & elegantem (*): en casum præsentem, in quo datis lateribus P''Z, P''S cum angulo horario ad P'', quæritur latus tertium ZS. Describatur (*fig.* 2) centro quovis F, & radio quovis FP circulus, in cujus peripheria assumantur hinc, & *inde a P arcus PZ, PZ'* æquales distantiæ P''Z a zenith *figuræ* 1, *sive complemento latitudinis loci*. Ductâ diametro PFP', & *chordâ ZZ', quam ipsa secabit bifariam* in C, centro C *radio CZ fiat semicirculus ZHZ', in quo capiatur arcus Z'H, qui sit* mensura anguli horarii dati ZP''S figuræ *primæ*, ac demittatur HD perpendiculum in ipsam diametrum. Assumatur versus Z' arcus PS æqualis distantiæ solis P''S a polo P'' figuræ 1, & ducatur diameter SFS', ac ipsi perpendicularis recta DE, quæ producta ex parte utravis usque ad primum circulum in Z'' exhibebit arcum SZ'' æqualem distantiæ quæsitæ ZS solis a zenith in fig. 1.

23. Nam si *concipiatur semicirculus* ZHZ' erectus verticaliter *suprà planum primi circuli*; patet, ipsum debere jacere in superficie hemisphærii habentis ipsum circulum pro basi, cujus semicirculi *polus erit* P, & *HD erit perpendicularis ei basi circulari*. Si arcus *PZ gyret circa diametrum PFP'; punctum Z percurret* utique *peripheriam ejus semicirculi*, adeoque *abibit* aliquando in H. Itidem si arcus SZ'' gyret circa diametrum SFS'; punctum Z'' describet peripheriam circuli habentis polos in S & S', adeoque perpendicularis plano primi circuli, quod punctum idcirco aliquando perveniet ad positionem imminentem perpendiculariter puncto D, & eo casu congruet ipsum etiam cum H. Hinc ibi habe-

(*) Ea methodus habetur hìc etiam Tomo III Opusc. I (*Mémoire correlatif* I). Eâ usus sum in hoc Opusculo, cujus textum integrum retineo, ne mutandus sit ordo numerorum, & citationum, dum hæc est applicatio quædam theoriæ generalis ad hunc casum particularem, & quoddam ipsius Opusculi complementum: præstat autem potius id habere hìc, quam quærere in alio Volumine.

bebitur vertex trianguli sphærici, cujus latera erunt arcus PZ, PS, SZ'', & anguli ad P mensura erit arcus Z'H semicirculi habentis polum in P. Quare id erit ipsum triangulum datum, & arcus SZ'' æqualis tertio lateri quæsito $=$ D.

24. Datâ latitudine loci, idem semicirculus ZHZ' adhibebitur pro horis omnibus cum declinationibus solis assumendis pro inveniendo puncto S. Delineato eo circulo, satis erit ipsum dividere in partes 12 respondentes singulis horis, & e singulis divisionibus demittere singula perpendicula HD, quæ præparatio semel facta inserviet pro omnibus declinationibus solis, nec remanebit nisi pro singulis determinandum suum punctum S. Assumptis declinationibus pluribus, ut in quinos gradus, ducentur totidem diametri SS'. Pro singulis unum latus normæ applicatum ei diametro ducetur secundum ipsam, donec alterum transeat per singula puncta D, & assumetur distantia puncti S ab ejus occursu cum arcu primi circuli in Z'', quæ determinabit valores singulos D notandos in tabula præparata cum valoribus refractionum r ipsis respondentium. Ubi eo pacto inventi fuerint omnes valores D, & r respondentes uni e punctis S respondentibus uni declinationi, idem præstandum erit respectu alterius, quo pacto brevi tempore habebitur tabula eorum binorum valorum, qui conjuncti cum valoribus *decl.*, *lat.*, & H, exhibebunt valorem $a = \frac{r\,sin.D}{cos.lat. \times sin.H}$, $e = \frac{a}{15\,cos.decl.}$, $e' = \frac{\sqrt{((a+r)(a-r))}}{sin.D}$: (num. 17).

25. Chordæ SZ'' translatæ in circinum proportionis exhibebunt valores D. Verum ipsi facile admodum habebuntur accuratiores, si radius FP primi circuli fiat partium 500 scalæ cujuspiam, cujusmodi plures haberi solent æri incisæ, quæ dividunt pollices 6 in partes 1000 ope transversalium. Chorda SZ'' translata in ejusmodi scalam exhibebit numerum respondentem sinui dimidii ejus arcus ad radium $=$ 1000. Nam si radius FP contineret partes 1000; ea chorda haberet numerum duplum ejus, quem habet, qui idcirco exprimeret ejus dimidium, nimirum sinum dimidii arcus in partibus radii $=$ 1000.

26. Si

26. *Si libeat habere eâdem constructione etiam angulum* P''SZ *figuræ* 1, adhibendum immediate in formulis *numeri* 16; is habebitur facile. In diametro ZZ' producta, *si opus* est, capiatur DE' = DE, ducaturque HE'. Angulus HE'D, vel ejus supplementum, æquabitur quæsito angulo, prout punctum D respectu radii SF ceciderit versus P, vel versus partem oppositam. Nam in casu punctorum Z, Z'' coeuntium in H, habebitur in E angulus trianguli rectanguli in H, quorum latera circa ipsum angulum erunt, recta *DE manens in plano basis*, & *HD* verticaliter erecta. Quare *is angulus erit æqualis angulo HE'D trianguli* HDE' habentis idem *latus HD*, & *DE'* = *DE*. *Porro is angulus semper acutus erit ipse angulus ejus trianguli sphærici in S'*, *si eo angulo existente acuto* perpendiculum HD ceciderit respectu diametri *SS'* versus P, & erit ejus supplementum, si eo existente obtuso, id perpendiculum ceciderit ad partes oppositas: nam is angulus ejus trianguli rectilinei rectanguli exhibebit inclinationem plani lateris SZ'' oblique elevati ad planum lateris SP remanentis suo loco.

27. Hoc pacto habebuntur vel per calculum accuratum ope binorum triangulorum sphæricorum, vel per constructionem unici trianguli, & per formulas expeditas omnes valores necessarii ad construendam tabulam pro utroque errore respondentem datæ cuivis *latitudini loci habens argumentum duplex*, *declinationem solis*, & *horam*. *Habebuntur etiam limites impossibilitatis*. Limes pro distantia a polo *facile invenietur methodo numeri* 14, per quem is limes est distantia loci a polo æqualis dimidiæ refractioni, quæ debetur altitudini supra horizontem æquali declinationi solis, sive distantiæ a zenith æquali ejus complemento. Pro distantia a meridie debet concipi in fig. 1 punctum *s'* congruens in meridie cum puncto N evadente Z*s* = Z*s'* = ZN = *lat.* ± *decl.*, & ZS = Z*s* + S*s* = *lat.* ± *decl.* + *r*. Hinc satis erit resolvere unicum triangulum sphæricum figuræ primæ, nimirum triangulum P''ZS, in quo erit ZS = *lat.* ± *decl.* + *r*, ZP'' = *compl.lat.*, SP'' = *compl.decl.*

28. Sole existente in æquatore, evitari poterit resolutio ejus

trianguli ope formulæ, quæ sic determinabitur. In eo casu ipse arcus SN est arcus æquatoris, congruentibus punctis N, Q, & ZNS evadit triangulum sphæricum rectangulum ad N, in quo ZN $=$ *lat.*, ZS $=$ *lat.* $+ r$. Ponatur latitudo $= b$, & SN $= x$: erit e formulis trigonometricis *cos.*SZ $=$ *cos.*SN $\times$ *cos.*ZN, unde jam habebitur $cos.SN = \frac{cos.SZ}{cos.ZN} = \frac{cos.(lat. + r)}{cos.lat.} = \frac{cos.(b + r)}{cos.b}$, quod jam reddit faciliorem inventionem arcus SN, qui tum est ipse arcus horarius dividendus per 15 ad habendam distantiam horariam limitis a meridie, & primum errorem ibidem. Deinde est $cos.(b + r) = cos.b cos.r - sin.b sin.r$, & $cos.SN = cos.x = 1 - sin.vers.x = 1 - 2sin^2.\frac{1}{2}x$. Ob exiguitatem r poni poterit 1 pro $cos.r$, & ob exiguitatem x, $\frac{1}{2}sin.x$ pro $sin.\frac{1}{2}x$. Hinc fiet $1 - \frac{1}{2}sin^2.x = \frac{cos.b - sin.b sin.r}{cos.b} = 1 - tan.b sin.r$, & $sin.x = \sqrt{2tan.b sin.r}$. In ea formula præstabit evitare sinum arcus r, ubi is fuerit nimis exiguus: nam oporteret quærere ejus logarithmum in tabulis sinuum ingentibus, ut Gardinerii; cum logarithmi secundorum non habeantur in tabulis communibus, nec inveniri possint methodo usitata differentiarum, quæ in logarithmis sinuum arcuum exiguorum non sunt inter se proportionales. Ad eam rem fiat r' $= 60r$, nimirum pro minutis, & secundis valoris r scribantur gradus, & minuta ad habendum r': erit $r = \frac{1}{60}r'$, adeoque proxime $sin.r = \frac{1}{60}sin.r'$, & $sin.x = \sqrt{\frac{tan.b sin.r'}{30}} = \sqrt{\frac{tan.lat.sin.r'}{30}}$, quæ formula exhibet sinum arcus SN $= x$, sive anguli ZP''S, qui divisus per 15 est error primus temporarius. Error secundus, qui est angulus NZS habet sinum $= \frac{sin.SN}{sin.ZS} = \frac{sin.x}{sin.(b + r)}$, pro quo poni etiam potest $sin.b$ in denominatore, neglecto ibi exiguo valore r, sive *sin.lat.*

29. *Similis formula potest inveniri pro limite etiam extra æquatorem. Sit in figura 3* PZQP' *Meridianus cælestis idem, qui in fig. 1, posito* P *in polo boreali*, & *addito* P' *in polo australi*: *sit etiam* arcus SN idem, qui ibi, tum arcus SA polo Z, ut sit

AN excessus arcus SZ supra ZN æqualis refractioni r, ac arcus SM sit arcus circuli maximi perpendicularis Meridiano. Puncto S jacente in hemisphærio boreali, jacebunt puncta A, N ultra ipsum: sed existente S' in hemisphærio australi, jacebit quidem A' ultra, sed N' citra M' respectu punctorum P, Z, ut jaceat ipsum N' ultra M' respectu P': ea omnia facile deducuntur ex theoria sphæricorum ob hypothenusas PS, ZS, ZS', P'S' minores quadrante, & arcus SM, S'M' exiguos. Hinc autem erit AN differentia arcuum MN, MA, & A'N' summa M'N', M'A', quod indicabunt etiam formulæ, quas pro iis valoribus inveniemus.

30. Fiat SM $= x$, PM $= b$, MN $= c$: erit PS $=$ PN $= b + c$, ac $cos.\mathrm{SM} = \frac{cos.\mathrm{PS}}{cos.\mathrm{PM}}$, sive $cos.x = \frac{cos.(b+c)}{cos.b}$, nimirum, ob exiguitatem arcus c, $1 - \frac{1}{2}sin^2.x = \frac{cos.b - sin.b\,sin.c}{cos.b} = 1 - \frac{sin.c}{cot.b}$, adeoque $sin.c = \frac{1}{2}cot.b\,sin^2.x$. Eodem pacto si fiat ZM $= b'$, MA $= c'$; erit $sin.c' = \frac{1}{2}cot.b'sin^2.x$. Hinc $sin.c' - sin.c = \frac{1}{2}(cot.b' - cot.b)sin^2.x$. Pro $sin.c' - sin.c$ potest poni $sin.(c'-c) = sin.\mathrm{AN} = sin.r$, & pro $b =$ PM potest poni PS complementum declinationis, facto $cot.b = tan.decl.$ Quare si adhuc fiat $r' = 60r$; obtinebitur $sin.x = \sqrt{\frac{sin.r'}{30(cot.b' - tan.decl.)}}$ (*). Hæc formula abit in præcedentem numeri 28, si sol sit in æquatore: ibi enim declinatio evanescit, adeoque valor inclusus parenthesi evadit $\frac{sin.r'}{30cot.b'} = \frac{tan.b'sin.r'}{30}$ valor idem, ac ibi: nam hic b' est ZM, nimirum latitudo loci, puncto M abeunte in æquatorem, & ibi latitudo erat $= b$, adeoque hoc b' evadit id, quod ibi erat b. In hac ipsa formula si S abeat in S', declinatio evadit australis, adeoque mutat

(*) Potuit hic assumi complementum declinationis pro b, & poterit assumi $lat. \pm decl.$ pro b', quia punctum N est proximum puncto, ad quod sol appellit in meridie, cujus distantia b a polo P est complementum declinationis, & distantia a zenith Z est $=$ ZQ $\pm$ QN.

tat signum, & vel, ipsâ habitâ pro negativa, — *tan.decl.* evadit valor positivus, vel scribendum est + *tan.decl.*

31. Poterit in tabulis sinuum assumi tangens declinationis, & cotangens valoris $b' = lat. \pm decl.$ ad radium 10000, quæ tum non excedent quatuor notas, & captâ eorum valorum differentiâ, vel summâ, assumi ipsius logarithmus, qui cum *log.sin.r'*, & complemento logarithmico numeri 30 exhibebit summam, cujus dimidium erit *log.sin.x*. Valor *x*, sive SM divisus per sinum PS, sive per *cos.decl.* exhibebit *sinum anguli MPS*, qui angulus redactus ad *tempus divisione per* 15 *exhibebit errorem primum*, *& idem sin.x divisus per sin.*ZS, sive proxime per *sin.b'* = *sin.(lat.* ± *decl.)*, *exhibebit sinum* erroris *secundi* MZS.

32. Errores plerumque erunt perquam exigui ob exiguitatem refractionis, ut innuimus num. 2: verum prope horizontem, ubi refractio est multo major, error primus perveniet ad plura minuta horaria, secundus superabit unum, vel plures gradus: & id multo magis accidet prope meridiem. Id patebit in paragrapho sequenti. Verum notandum illud, prope meridiem impediri usum hujusce instrumenti ab umbra primi annuli, cujus crassitudo vetat radium pervenire ad foramen. Simile impedimentum præstat umbra secundi annuli, sole posito prope æquatorem: verum in hoc casu remedium est facile. Satis est removere foramen a centro per dimidiam ejus annuli crassitudinem, & excipere radium non in circulo, qui inscribitur mediæ crassitudini annuli ejusdem, sed procul a medio per intervallum, æquale spatio, per quod foramen retractum est a loco, quem debebat occupare relate ad declinationem solis. Res eodem modo habebitur, ac si foramine existente loco debito, radius exciperetur in circulo illo medio.

§. III.

Proponuntur methodi, & formulæ inventæ cum aliquot exemplis.

33. PRO solutione accurata resolvenda sunt (num. 11) bina triangula sphærica obliquangula ZP''S, ZP''s' (fig. 1). In priore

datur angulus ZP''S, qui dicatur H : is est hora vespertina, vel complementum matutinæ ad XII redactum more solito ad partes æquatoris: habebuntur itidem bina latera P''Z, P''S ipsum continentia, quorum alterum $=$ *compl.lat.*, alterum $=$ *compl.* ($90° \pm$ *decl.*). In eo inveniendum est tertium latus ZS distantia solis a zenith, quod dicatur D : capietur refractio ipsi respondens, & parallaxis, nisi ea negligatur, qua ablatâ a refractione, residuum dicatur *r*. In posteriore triangulo latus P''Z erit idem, ac prius $=$ *compl.lat.*, latus P''s' erit æquale priori P''S $=$ *compl.*($90° \pm$ *decl.*), ac tertium Zs' erit $=$ Zs $=$ D $-$ *r*. In hoc invenietur angulus ZP''s', qui dicatur H', & angulus P''Zs'. Supplementum hujus posterioris erit error secundus positionis Meridiani : error primus horarius erit $\frac{H - H'}{15}$. Hæc methodus patet ex num. 11.

34. Bini sunt casus, in quibus problema evadit impossibile, locus nimis vicinus polo pro horis omnibus, & hora nimis vicina meridiei pro locis omnibus. Limes primæ impossibilitatis est (numer. 14) distantia loci a polo æqualis dimidiæ refractioni debitæ distantiæ a zenith æquali complemento declinationis solis, sive distantiæ solis a polo boreali. Limes secundæ impossibilitatis invenitur resolvendo (num. 13) triangulum sphæricum obliquangulum ZP''S, in quo primum latus est P''Z complementum latitudinis loci, secundum est P''S complementum declinationis solis, tertium latus ZS, quod assumendo refractionem *r*, quæ respondet distantiæ a zenith $=$ *lat.* $\pm$ *decl.*, evadit $=$ *lat.* $\pm$ *decl.* $+$ *r*. In eo triangulo inveniendus erit angulus ZP''S, qui divisus per 15 exhibet distantiam horariam a meridie, & is erit error primus in eo limite, tum etiam angulus P''ZS, cujus supplementum erit secundus error : ii autem errores erunt maximi ejus diei.

35. Si sol sit in æquatore, & arcus horarius limitis secundi dicatur *x*, ac fiat *r'* $= 60r$, sumendo nimirum gradus, & minuta pro minutis, & secundis, erit $sin.x = \frac{\sqrt{tan.lat.sin.r'}}{30}$ (num. 28), ac angulus *x* divisus per 15 erit error primus in eo limite : erroris autem secundi tangens erit $\frac{tan.x}{sin.lat.}$. Ubicumque sit

sol, si fiat $b' = lat. \pm decl.$, erit (numer. 30) $sin.x = \sqrt{\frac{sin.r'}{30(cot.b' \pm tan.lat.)}}$, & anguli horarii sinus erit $\frac{sin.x}{cos.decl.}$, qui angulus redactus ad tempus exhibebit (num. 31) errorem primum: sinus erroris secundi erit $= \frac{sin.x}{sin.(lat. \pm decl.)}$.

36. Ii erunt valores veris proximi. Pro solutione generali per formulam veræ proximam invenienda erit distantia D a zenith, vel per resolutionem *primi trianguli sphærici* (num. 11), vel per constructionem *graphicam* (*num.* 22) *ea obtinetur e tribus elementis*, *latitudine loci*, *declinatione solis*, & *distantia horaria* H a *meridie redacta ad partes æquatoris*: e *distantia* autem D a zenith habebitur refractio r. Ex iis elementis habebuntur (num. 24) sequentes formulæ, in quibus a est valor subsidiarius, e error primus horarius, e' secundus plani meridiani.

$$a = \frac{r\,sin.D}{cos.lat.sin.H},\quad e = \frac{a}{15cos.decl.},\quad e' = \frac{\sqrt{(a+r)(a-r)}}{sin.D}.$$

37. Hæ formulæ exhibebunt valores veris satis proximos in distantia non nimis exigua loci a polo, & anguli horarii H a meridie. Paucorum graduum distantia sufficit ad eam rem. In multo minore distantia utravis, formulæ exhibent determinationem erroneam, qui error evadit infinitus, ubi locus sit accurate in polo, *vel hora in ipso meridie*. *Hæc omnia satis patent e reliquo omni paragrapho secundo*.

38. Quod pertinet ad exempla, applicabimus formulas ad plures casus latitudinis Parisiensis, & adhibebimus tabulam refractionum Bradleyanam, quæ est applicata altitudinibus apparentibus supra horizontem, quæ quidem facile transfertur etiam ad altitudines veras, ac veras distantias a zenith: & quidem in majoribus elevationibus discrimen est perquam exiguum inter refractiones respondentes iisdem mensuris distantiæ veræ, & apparentis, prope *horizontem est multo majus*. Idcirco, ne ulla *reductione* sit opus, incipiemus a *casu ortus*, *vel occasus apparentis*, in quo distantia a zenith *apparens est* = 90°, *refractio* 33', parallaxis circiter 8", adeoque refractio imminuta per parallaxim, sive r = 32'.

$= 32'.51''$, $4 = 32',86$. Hora est in æquinoctiis proxime 6, in solstitiis 4, & 8, quibus respondet $H = 90°$, vel $= 60°$, & $120°$, quorum valorum alter est supplementum alterius, adeoque habent functiones communes. Cum distantia a zenith D sit proxime $= 90°$, cujus sinus est proxime unitas, omittemus in hoc exemplo *sin.*D. En calculum (*).

In æquinoctiis	logarithmi	In solstitiis	
$r = 32',86$	1,51667	....	1,51667
.*cos.lat.* = *cos.*48°. 50'.	$\bar{0}$,18161	....	$\bar{0}$,18161
.*sin.*H = *sin.*90	$\bar{0}$,00000	.*sin.*60°	$\bar{0}$,06247
$a = 49',92$ ..	1,69828	.... 57',64...	1,76075
.15	$\bar{8}$,82391	....	$\bar{8}$,82391
.*cos.decl.* = *cos.*0 ...	$\bar{0}$,00000	.*cos.*23°. 28'.	$\bar{0}$,03749
$e = 3',33$	0,52219	.. 4, 19	0,62215
$a + r = 82',78$ ..	1,91793	.. 90',50	1,95665
$a - r = 17,06$ ..	1,23198	.. 24,78	1,39410
$(a + r)(a - r)$ ...	3,14991	....	3,35075
$e' = 37',58$	1,57495	.. 47',36	1,67537

39. Primus error horarius e obvenit in æquinoctiis minutorum $3'\frac{1}{3}$, in solstitiis major, quam 4, & secundus directionis plani in priore casu $37'\frac{1}{2}$, in posteriore $47'\frac{1}{3}$. Ii quidem non sunt contemnendi; sed in majoribus altitudinibus, imminutâ statim plurimum refractione, evadet uterque perquam exiguus.

40. Quod pertinet ad limitem impossibilitatis, sol prope polum

(*) In prima divisione invenitur $a = \frac{r}{cos.lat.sin.H}$: in secunda $e = \frac{a}{15 cos.decl.}$, ubi in ejus linea tertia fit summa logarithmi lineæ postremæ divisionis primæ, & logarithmi lineæ primæ ipsius; cum secunda non habeat nisi zero: in divisione tertia pro valore $e' = \sqrt{(a+r)(a-r)}$ ob $log.D = 0$ fit in linea tertia summa logarithmorum primæ, & secundæ, in quarta sumitur ejus dimidium, quod est logarithmus valoris e'.

lum in solstitio æstivo habet elevationem supra horizontem proxime æqualem declinationi, quæ est 23°.28'. Ipsi respondet refractio paullo major binis minutis, adeoque is limes distat a polo paullo plus, quam per unicum minutum. At in æquinoctiis ea distantia erit circiter minutorum 13. Nam in ea distantia a polo ea ipsa erit in meridie elevatio vera solis supra horizontem, cui respondet refractio proxime = 26', cum hæc addita ei elevationi veræ inducat apparentem proxime = 40', & huic elevationi apparenti respondeat proxime refractio = 26', cujus dimidium 13' debet esse distantia quæsita limitis a polo. Hic negligimus parallaxim, cum is neglectus errorem non augeat ad sensum, & hunc limitem hic definiamus tantum proxime.

41. Pro limite prope meridiem in æquatore formula est (numer. 28) $sin.x = \sqrt{\frac{tan.lat.sin.r'}{30}}$, qui valor exhibet in eo casu angulum horarium erroris primi: is sinus divisus per sinum latitudinis exhibet sinum erroris secundi. Retinendo eandem latitudinem 48°, 50', ea erit distantia solis a zenith in meridie: ipsi respondet refractio 1'. 5'', parallaxis 7'', adeoque r = 0'. 58'', r' = 0°. 58'. En calculum.

tan. 48°. 50'	0,05829
sin. 0 . 58	8,22713
30	8,52288
	6,80830
sin. 1 . 27	8,40415
sin. 48 . 50	0,12332
sin. 1 . 56	8,52747

42. Priores tres lineæ continent *log.tan.lat.*, *log.sin.r'*, *compl.log.*30: quarta summam: quinta semisummam pro radice: sexta *log.sin.* valoris x, qui inventus, & redactus ad tempus est error primus: septima *compl.log.sin.lat.*: octava logarithmum sinus erroris secundi. Arcus distantiæ a meridie est x = 1°.27', qui inducit distantiam horariam fere 6 minutorum. Error secundus 1°.56' accedit ad duos gradus. Iidem valores proveniunt, si resolvatur triangulum sphæricum rectangulum ZSN figuræ 1, ubi latus ZN = *lat.*

$=$ *lat.* $= 48^\circ.50'$, hypothenusa ZS $=$ *lat.* $+ r = 48^\circ.50'.58''$, ac alterum latus SN est error quæsitus x; est enim *log.cos.*SN $=$ *log.cos.*$48^\circ.50'$ $+$ *compl.log.cos.*$48^\circ.50'.58'' = 9,818252 + 0,818392$ $= 9,999860 =$ *cos.*$1^\circ.27'$, & angulus SNZ error secundus. Sed calculus est molestior ob secunda, quorum habenda est ratio in assumendo logarithmo cosinus hypothenusæ $48^\circ.50'.58''$. Consensus ostendit, formulam erutam e calculo differentiali non contine re errorem sensibilem, in ea nimirum distantia adeo magna hypothenusæ, & lateris a zero, & a 90°.

43. In solstitio hyemali errores sunt adhuc majores. Distantia solis a zenith pro latitudine $48^\circ.50'$, additis $23^\circ.28'$, evadit $72^\circ.18'$, cui respondet refractio circiter $3'.8''$, parallaxis circiter $8''$, adeoque $r = 3'.0''$, $r' = 3^\circ.0'$. Quare resolvendum est triangulum sphæricum, in quo primum latus est $90^\circ - 48^\circ.50' = 41^\circ.10'$, secundum $90^\circ + 23^\circ.28' = 113^\circ.28'$, tertium $= 48^\circ.50' + 23^\circ.28' + 3'.0'' = 72^\circ.21'.0''$, & inveniendi sunt bini anguli oppositi lateri tertio, & secundo. Verum res facilius perficietur per formulam numeri 30, quæ transformata juxta adnotationem evadit $sin.x = \sqrt{\frac{sin.r'}{30(cot.(lat. + decl.) + tan.decl.)}}$. Est $r' = 3^\circ.0'$, *lat.* $+$ *decl.* $= 72^\circ.18'$, *decl.* $= 23^\circ.28'$. Debet autem inveniri pro errore primo angulus horarius, cujus sinus $= \frac{sin.x}{cos.decl.}$, & error secundus, cujus sinus $\frac{sin.x}{sin.(lat + decl.)}$. En calculum:

cot. 72°. 18′ = 0,3191		
tan. 23. 28 = 0,4341		
	0,7532	$\bar{0}$,12309
sin. 3. 0	. . . .	8,71880
30	. . . .	8,52288
		7,36477
sin. x	. . . .	8,68238
cos. 23. 28	. . . .	$\bar{0}$,03749
sin. 72. 18	. . . .	$\bar{0}$,02106
	. . . .	8,71987
sin. 3°. 0	. . . .	8,70344
sin. 2. 54	. . . .	

44. Pro-

44. Priores binæ lineæ continent tangentes non logarithmicas, sed naturales complementi *lat.* + *decl.*, & *decl.* ad radium = 1: tertia earum summam cum ejus summæ complemento logarithmico: quarta *log.sin.r*': quinta *compl.log.*30: sexta summam binorum logarithmorum præcedentium: septima semisummam pro radice, quæ est *log.sin.x*: octava, & nona complementa logarithmica binorum divisorum *cos.decl.*, & *sin.b*': decima summam logarithmorum septimæ, & octavæ, quæ est logarithmus sinus anguli horarii erroris primi: undecima summam logarithmorum septimæ, & nonæ, quæ est logarithmus sinus erroris secundi. Pro angulo horario obvenit 3°.0', cui respondet primus error horarius 12'.0", pro errore secundo 2°.54', quorum errorum uterque est satis magnus: sed omnia hujus generis instrumenta prope meridiem nihil satis accurati exhibent ob exiguam mutationem altitudinis supra horizontem, & umbra primi annuli jam impedit ejus instrumenti usum in exigua distantia a meridie, ut monuimus num. 32.

45. Posset etiam inquiri in errores, quos pareret mala collocatio foraminis non respondentis declinationi, vel suspensionis non respondentis latitudini: sed in hoc Opusculo proposuimus solam perquisitionem errorum, quos parit refractio, pro quibus exhibuimus & solutiones accuratas, & formulas exhibentes valores veris proximos, cum determinatione limitum impossibilitatis, & aliquot exemplis errorum, in quibus in latitudine Parisiensi habetur in horizonte error primus horarius major etiam 4 minutis temporis, & prope meridiem 12 minutorum, error autem secundus in priore casu major etiam 47 minutis, in posteriore fere trium graduum.

§. IV.

De alia constructione ejus instrumenti per tres circulos.

46. Proponemus jam constructionem illam aliam, quam innuimus num. 2, & ostendemus, eosdem errores pertinere etiam ad ipsam. Figura 4 exhibet tres circulos centro C; sed vitandæ con-

fusionis gratia non exprimitur ibi, nisi dimidium tertii. Primus est Meridianus PAP'Q, in quo Z est zenith, P polus borealis, P' australis: PDP'F est horarius mobilis circa polos P, P': AEQ est dimidium æquatoris, qui in usu instrumenti collocatur ita, ut sit perpendicularis Meridiano. Horarius habet adnexam alidadam DCF mobilem circa centrum C ita, ut possit collocari punctum ejus D in distantia DE ab æquatore, quæ sit æqualis declinationi: habet ea alidada binas pinnulas DG, FH sibi perpendiculares, in quarum priore habetur *foraminulum*, *in posteriore punctum* positum ad distantiam FH = DG *ita*, *ut radius digressus* a sole S abiens per G in H sit parallelus diametro *horarii DF*.

47. Collocatâ *suspensione* Z ad distantiam AZ ab æquatore respondentem *latitudini loci*, & alidadâ ad distantiam ED æqualem declinationi solis, si secludatur mente refractio, & *parallaxis*; non poterit radius abire in H, nisi horarius PDP' *habeat* positionem debitam horæ. Nam si recta HG dirigatur ad centrum solis, etiam diameter FD ipsi parallela confundetur cum recta, quæ tendit a centro C ad ipsum solis centrum. Quamobrem arcus ZD metietur distantiam solis a zenith: cumque PD, PZ referant distantiam poli a sole, & a zenith; triangulum PZD sphæræ instrumenti habebit tria latera respondentia lateribus trianguli sphæræ cælestis terminati ad polum, solem, zenith. Quare ejus angulus in P *æquabitur angulo cælesti determinanti* distantiam horariam a *meridie*, *quam metietur arcus æquatoris AE*. Angulus quoque *DZP erit æqualis cælesti*. Cumque planum DCZ congruat cum *plano* circuli verticalis cælestis transeuntis per solem; etiam planum CZP congruet cum plano Meridiani cælestis.

48. Ad hujus instrumenti usum, oportebit collocare horarium ad horam nonnihil anteriorem hora vera, & expectare *nonnihil*, donec conversione instrumenti ipsius circa punctum *suspensionis* Z, radius incidat in pinnulam FH ita, ut centrum *circelli*, quem is ibi exhibet, *sit in* puncto notato. Id *reddit paullo* complicatiorem ejus usum; quia requiritur motus *duplex*, alter horarii PDP' circa polos, *alter* Meridiani PAP' circa suspensionem Z: sed ipsius ope obtinetur major exactitudo; quia cum horario PDP'

ex-

excurrit nonius ipsi affixus, qui relatus ad divisionem horarum æquatoris AEQ exhibet etiam minuta. Præterea radius GH percurrens lineam æqualem integræ diametro est fere duplo longior radio prioris instrumenti, qui percurrit semidiametrum ipsius, vel lineam paullo longiorem. Demum distantia DG foraminis a D efficit, ut etiam sole existente in æquatore, adeoque puncto D in E, umbra æquatoris nihil obsit. Quin immo plura foraminula pinnulæ amplioris, cum totidem punctis respondentibus in altera pinnula id præstant, ut evitari possit semper tam umbra Meridiani, quam æquatoris, adhibito jam alio foramine, jam alio.

49. Verum errores inducti a refractione hìc etiam sunt iidem prorsus, ac in illa alia communi constructione. Si enim DI sit refractio, D*d* arcus habens polum in P, I*d* in Z; pro triangulo ZPD habebitur triangulum ZP*d*, in quo latus PZ erit idem ac prius, P*d* æquale priori PD, Z*d* = ZI distantia apparens a zenith pro vera ZD. Hinc bini errores DP*d*, DZ*d*. Hi autem sunt iidem, ac in fig. 1 errores SP''*s*', SZ*s*'; cum puncta Z, P figuræ 4 respondeant punctis Z, P'' figuræ 1, & D, I, *d* illius, punctis S, *s*, *s*' hujus: adeoque eâdem eorundem binorum triangulorum sphæricorum resolutione, iisdem formulis, & numeris utendum erit utrobique.

OPUSCULUM XVIIII

De eodem argumento præcedentis Opusculi methodo complicatiore, quæ prima in mentem venerat.

§. I.

Compendium eorum, quæ dicta sunt in Opusculo primo, & habent nexum cum iis, quæ sunt hìc proponenda.

1. In adnotatione ad numerum 1 Opusculi præcedentis enunciavi, me hìc indicaturum tantummodo ea, quæ in alio Opusculo conscripto ante ipsum occurrebant prorsus communia cum iis, quæ inde in ipsum fuerant translata, & propositurum ea, quæ vel prorsus discrepant a proponendis ibidem, vel utut cum ipsis congruentia ita connexa sunt cum adjectis, ut ab iis divelli non possint: id jam aggredior.

2. Communis est descriptio, & usus instrumenti, de quo agitur utrobique, quæ habetur ibi, & habebatur hìc itidem in §. I. Figura 1 (Tab. XIII) habet communia fere omnia cum figura 1 (Tab. XII) Opusculi præcedentis, circulum primum instrumenti PADP'E collocandum *in plano Meridiani cælestis* P''ZQ *cum ejus polo* P'', *zenith* Z, *puncto æquatoris* Q: axem PCP' cum foramine F, per quod debet transire radius solis SFH, qui debet notare horas in circulo secundo perpendiculari priori: recta verticalis ZF occurrens primo circulo in G, & I, ac in M rectæ EM perpendiculari diametro DCE, adeoque parallelæ axi PP': rectæ FH, FH', EH, EH': demum refractio HF*h*, cum puncto *h*', in quod abit punctum *h* conversione instrumenti circa rectam verticalem GI.

3. Deest tantummodo in hac figura productio rectarum *h*F, *h*'F usque ad circulum cælestem verticalem ZS, & ad parallelum SN, quæ rectæ in illa abeunt in puncta *s*, & *s*', & accedit punctum L,

in quo chorda verticalis GI occurrit diametro DE intersectioni communi binorum circulorum, cum rectis Ch', LH, Lh'. Error primus horæ notatæ in h' pro H est utrobique arcus Hh' secundi circuli redactus ad partes æquatoris, & error secundus motus circularis circa rectam GI immotam, quo punctum h abit in h', nimirum inclinatio plani IFH ad planum LFh', quod exprimitur ibi numero 8.

4. Ibi post productionem rectarum hF, h'F in s, s' patuit (num. 9), eos errores reduci ad angulos $SP''s'$, ZSs', ad quos obtinendos satis fuit resolvere bina triangula sphærica $ZP''S$, $ZP''s'$, in quorum primo ex datis lateribus $P''Z$, $P''S$ obtinebatur latus ZS cum angulis ad P'', & Z, in secundo latus PZ erat idem, ac in primo, latus $P''s'$ erat æquale lateri $P''S$ prioris, & latus tertium Zs' erat minus latere ZS ejusdem prioris per differentiam æqualem refractioni Ss: inventis angulis ad P'', & Z hujus secundi trianguli, habebantur eorum differentiæ ab iis angulis trianguli prioris, quæ erant illæ ipsæ mensuræ quæsitæ binorum errorum. Tum per methodos differentiales inquisitum est in differentias exiguas angulorum ad P'', & Z trianguli $ZP''S$ ortas e differentia exigua lateris ZS abeuntis in Zs' per additionem refractionis exiguæ: eruta est formula differentialis pro mensura erroris utriusque, & inquisitum est in varios casus, in quibus ea formula potest inducere in errorem, & eos, in quibus problema evadit impossibile idcirco, quod nulla instrumenti conversione effici potest, ut radius refractus abeat in circulum DKEK' ad inveniendum ibi punctum erroneum h', & determinati sunt limites ejus impossibilitatis.

5. Hæc ibi: hic inquisitum est in errores per positiones ipsas rectarum FH, Fh, Fh', quod reddidit investigationem, ac determinationem aliquanto complicatiores, per quas tamen demum deventum est ad formulas differentiales easdem: inventi sunt alia ratione limites impossibilitatis iidem, tum multo prolixior instituta est analysis formularum pertinentium ad utrumque errorem in binis paragraphis, in quibus omnibus occurrunt pauca communia præter determinationes finales, multa autem diversa, quæ non

exi-

exiguam *utilitatem habent* singula, considerationes in primis, ac *methodi* non vulgares adhibitæ in amplissima *evolutione* formularum per enumerationem omnium *mutationum*, quæ possunt occurrere in singulis valoribus eas ingredien*tibus*, & quæ inde profluunt in valorem finalem, cum omnibus casibus, in quibus habetur impossibilitas, vel in quibus methodus differentialis, potissimum ea, quæ applicatur ad quantitates physice tantum exiguas, potest in errorem inducere, quo tutior sit *ejus* usus in aliis omnibus, in quibus *ea est aptissima ad reddendum* calculum multo magis expeditum *pro obtinendo valore finali*, qui vero sit satis proximus, ut per *eam* applicationem *quærebatur*. *Hinc* pro iis omnibus *retinebo hic ejusdem* Opusculi *prioris textum*, omissâ *tantummodo constructione* planâ trianguli sphærici P″ZS, quæ in Opusculo *præcedente* habetur itidem a numero 22 ad 27, cujus repetitio hic esset prorsus inutilis.

6. Initium sequentis paragraphi, in quo exhibetur determinatio utriusque erroris per calculum trigonometricum, habet pauca sane communia cum iis, quæ habentur etiam in Opusculo præcedente, ac sternunt viam ad solutionem problematis; sed progressus discrepat prorsus. Retento textu priore in ipso, & reliquis sequentibus, addam tantummodo adnotatiunculas, quæ ad rem idoneæ videbuntur.

§. II.

Determinatur effectus refractionis calculo exacto per Trigonometriam finitam.

7. SUPPOSUIMUS in paragrapho superiore, radium solis devenire ad punctum F cum directione, quæ respondeat declinationi solis, & plano primi circuli congruente cum plano Meridiani, ipsum radium progredi ea directione usque ad punctum H circuli secundi indicans ibi horam quæsitam. At eum radium deprimit refractio elevans solem, elevat parallaxis ipsum deprimens. Parallaxis, ubi est maxima in ipso horizonte, non pertingit ad 9 secunda, quam ob causam negligi tuto potest, vel si libeat, de-

trahi

trahi a refractione, quam agentes de ejus effectu intelligemus semper curtatam per parallaxim subtractam. Ipsa refractio est sane exigua; nam in horizonte, ubi est maxima, vix pertingit ad minuta 33, in altitudinibus etiam paulo majoribus statim reducitur ad paucissima minuta. Hinc ejus effectus in minoribus potissimum instrumentis, quæ portari solent in pera, & habent diametrum trium, vel quatuor pollicum, itidem contemni potest. Adhuc tamen erit operæ pretium, si is ipse effectus accurate determinetur, atque id eo magis, quod fiunt aliquando ejus generis instrumenta multo majora, ut possint determinari non solum horæ, & quadrantes, sed & singula minuta. Id hìc præstabimus.

8. Concipiatur planum ductum per rectam GI, & per punctum H horæ cujusvis e designatis in circulo EKD, ad quod eâ horâ appelleret radius delatus per rectam SF, & progrediens per FH, si nulla haberetur refractio. Id planum erit verticale ob rectam GI verticalem, & in eo jacebit radius depressus per angulum HF*h* æqualem refractioni, ac appellet ad punctum *h* circumferentiæ circuli GHI, qui erit intersectio ejus plani cum superficie sphæræ instrumenti, positum extra ipsum circulum EKDK', nec incurret in hunc, nisi is per liberam conversionem instrumenti adducatur ad ipsum radium F*h*, & eum excipiat in aliquo alio suo puncto *h*'. Ita duplex habebitur error; alter in hora indicata a puncto *h*' pro H, alter in directione Meridiani abludente a vera per angulum, quo nova primi circuli positio mutata est in eo motu instrumenti. Horum errorum mensuras oportet determinare pro quavis latitudine loci, hora vera, & declinatione solis, datis iis tribus, & datâ tabulâ refractionum applicatâ distantiis solis a zenith. Determinabimus eos errores primum determinatione accurata ope Trigonometriæ finitæ, tum per formulas differentiales ob exiguitatem refractionis, e quibus profluent formulæ simpliciores pro utroque errore.

9. Recta GI occurrat diametro DE communi in L, & concipiantur rectæ ductæ a C, & L ad H, & *h*'. Datâ declinatione datur distantia P''S solis a polo complementum ipsius declinationis additæ 90 gradibus, vel inde ablatæ, prout ea fuerit australis,

vel

vel borealis : datâ latitudine loci, datur ejus complementum P''Z, & datâ horâ verâ datur angulus horarius ZP''S per conversionem temporis in partes æquatoris. Hinc in triangulo sphærico ZP'S habebitur ZS distantia vera solis a zenith, quæ est mensura anguli ZFS = IFH, & ex tabula refractionum habebitur refractio HFh, adeoque & angulus IFh æqualis distantiæ apparenti a zenith; cui erit æqualis etiam angulus IFh', in quem ipse IFh abit per illam conversionem instrumenti.

10. Assumatur radius sphæræ CD = 1, & radius tabularum itidem = 1. Habebitur DF secans declinationis = $\frac{1}{cos.decl.}$, CF ejus tangens: tum FL dividendo hanc ipsam per sinum latitudinis loci CLF = DCA, & CL multiplicando eandem CF per ejus cotangentem. In triangulo LFh' habebitur LF, & Fh', quæ est = FD, ob FC perpendicularem plano secundi circuli, ac LFh' distantia a zenith curtata per refractionem. Quare invenietur Lh' tertium ejus trianguli latus: tum in triangulo CLh' habebuntur latera CL, Lh' inventa, & latus Ch' = 1, adeoque invenietur angulus ad C, qui est idem, ac ECh', sive arcus Eh', cujus conversione in tempus habebitur hora puncti h' in instrumento, & ejus differentia ab hora assumpta pro H exhibebit primum errorem quæsitum.

11. Pro errore directionis plani Meridiani concipiatur post gyrum instrumenti circa axem AB chorda GI, quæ in illa conversione remanet verticalis, per novam totius instrumenti translationem reddita in locum pristinum, manente eadem nova directione plani primi circuli: radius adhuc abibit in punctum instrumenti h'. In priore positione planum instrumenti congruens cum plano verticali transeunte per eandem rectam LF & per radium solis erat planum LFh, sive LFH, in secunda ei succedit planum instrumenti LFh'. Quare motûs plani est inclinatio mutua eorum planorum.

12. Ad inveniendam eam inclinationem notetur in primis, triangula HCh', HFh' esse isoscelia, adeoque dimidium chordæ Hh' esse sinum dimidii anguli HCh' jam inventi ad radium CH =

CD, & dimidii anguli HFh' ad radium FH = FD. Quare erit ut FD ad CD, ſive ut radius ad coſinum declinationis CDF, *ita* ſinus dimidii anguli inventi HCh', ad ſinum dimidii HFh': nimirum *ſin.* $\frac{1}{2}$ HFh' = *coſ.decl.* × *ſin.* $\frac{1}{2}$ HCh', qui proinde habebitur. Hinc in tribus rectis FL, FH, Fh' habebuntur tres anguli ad F, nimirum LFH vera diſtantia ſolis a zenith, LFh' eadem curtata per refractionem, & angulus HFh' hic inventus; quæretur autem inclinatio planorum LFH, LFh'. Eſt notiſſimum, rem reduci ad ſolutionem *trianguli ſphærici*, in quo illi tres anguli habebunt pro menſura illa tria latera, & tres inclinationes planorum erunt tres ejus anguli, inter quos inveniendus erit is, qui reſpondet iis binis planis. Sint in fig. 2 rectæ FL, FH, Fh' eædem ac in prima, & poſterioribus binis occurrat in M, & N ſuperficies ſphæræ habentis centrum F, ac radium FL. In triangulo ſphærico MLN dabuntur tria latera LM, LN, MN, quæ metiuntur eos tres angulos LFM, LFN, NFM datos, adeoque invenietur angulus MLN, qui eſt inclinatio planorum LFM, LFN exhibens ſecundum errorem quæſitum.

13. Hoc pacto habebitur uterque error calculo exacto, qui poſſet applicari angulo refractionis utcumque magno. Sed cum agatur de inveniendo (fig. 1) angulo HCh' exiguo, & exigua inclinatione planorum; calculus debet fieri exactus uſque ad ſecunda pro inventione anguli LCh', cujus debet aſſumi differentia ab aſſumpto LCH. Exiguitas refractionis efficit, ut res multo facilius abſolvi poſſit per formulas differentiales Trigonometriæ, quod ſequenti paragrapho perſequemur.

§. III.

Determinantur eadem per theoriam differentialem Trigonometriæ.

14. NOTISSIMA ſunt theoremata, quæ pertinent ad exiguas variationes occurrentes in ternis triangulorum lateribus, & angulis. Eorum plura protulit olim Coteſius: alia multa Aſtronomi addiderunt, in quibus plerumque duo ex iis ſex habentur pro con-

 ſtan-

stantibus, & in singulis habetur proportio exhibens rationem variationum pertinentium ad singula binaria eorum quatuor, quæ mutantur. Ego (*) ad Academiam Parisiensem Scientiarum transmisi quatuor æquationes generales, in quibus habentur omnes nexus mutui earum variationum, ubi etiam mutentur omnia; eæ continent omnia earundem quaternaria, adeoque omnes etiam casus, in quibus supponatur unum aliquod constans, vel duo: nam in iis casibus satis est efficere $= 0$ omnes terminos, in quibus occurrat variatio quæpiam *termini constantis*. Possem hic adhibere unam ex iis proportionibus, vel *æquationibus*; *sed cum* res reducatur *ad casum, in quo constantibus binis lateribus* quæratur *nexus inter variationes tertii lateris*, & *anguli ipsi oppositi*, ac *ejus evolutio geometrica* sit admodum simplex, eam hic adhibebo.

15. Vertex C (fig. 3) trianguli ACB abeat exigua mutatione in *c* ita, ut latus AB maneat, & BC sit $=$ B*c*. Centro A concipiatur arcus *c*D, qui abscindet differentiam CD laterum AC, A*c*. Quæratur nexus inter ipsam CD differentiam lateris AC, & CB*c* differentiam anguli ipsi oppositi ABC. Si concipiatur arcus C*c* habens centrum in B; is, & *c*D haberi poterunt pro rectis perpendicularibus ad suos radios. Hinc haberi poterunt pro rectis anguli *c*CB, *c*DC, & proinde anguli ACB, C*c*D complementa ejusdem *c*CD erunt æquales inter se, eritque $CD = Cc \times sin.CcD = Cc \times sin.ACB$. *Porro cum arcus quivis sit ut radius*, & *angulus*, *quem subtendit in centro*; *erit* $Cc = BC \times CBc$, adeoque $CD = CBc \times BC \times sin.ACB$. *Si latus variabile dicatur* x, angulus ipsi oppositus p, alterum e reliquis binis lateribus z, angulus ipsi adjacens q, & differentiæ, seu variationes designentur de more, præfixâ litterâ d; erit $dx = dpzsin.q$.

16. Huc reducitur prima e meis æquationibus continens variatio-

(*) Hæc sunt ea, quæ habentur fuse exposita, ac demonstrata in Opusculo XV. Hic etiam haberi posset nova earundem illarum æquationum applicatio præter tot alias ibidem vel adhibitas, vel indicatas: sed hic exhibetur immediate, & demonstratur sola illa totius generalis theoriæ particula, quæ pertinet ad hunc usum. Habetur paullo inferius num. 16 applicatio prima et illis quatuor, ad quam pertinet præsens problema, unde semper magis innotescet illarum utilitas latissime patens.

tiones trium laterum, & unius anguli, factis $= 0$ terminis, qui continent variationes binorum laterum adjacentium eidem angulo. Æquatio integra est mihi $dx - dy\cos.r - dz\cos.q - dp\sin.z\sin.q = 0$, ubi x, y, z sunt tria latera trianguli sphærici p, q, r anguli iis oppositi. Factis dy, & $dz = 0$, habetur $dx = dp\sin.z\sin.q$: posito latere z pro ejus sinu in triangulo plano, obtinetur æquatio particularis $dx = dpz\sin.q$, quam hic directe demonstravimus. En ejus applicationem ad casum præsentem. In triangulis (fig. 1) LFH, LFh' latus LF est idem, latus FH $=$ Fh': quare fieri poterit $LH = x$, $LFH = p$, cujus differentia HFh, nimirum refractio r, erit $= dp$: tum $FH = z$, $FHL = q$. Hinc differentia lateris $LH = r \times FH \times \sin.FHL$. Simili modo in triangulis LCH, LCh' latus CL est constans, CH $=$ Ch': quare eadem differentia lateris LH erit $= HCh' \times CH \times \sin.CHL$. Hic valor æquatus illi priori exhibebit $HCh' = \dfrac{r \times FH \times \sin.FHL}{CH \times \sin.CHL}$.

17. Ex ea formula facile eliminantur bini anguli FHL, CHL. Ex proportionalitate sinuum angulorum cum lateribus oppositis est $\sin.FHL = \dfrac{FL \times \sin.LFH}{LH}$, & $\sin.CHL = \dfrac{CL \times \sin.LCH}{LH}$. Quare formula evadit $r \times \dfrac{FH}{CH} \times \dfrac{FL}{CL} \times \dfrac{\sin.LFH}{\sin.LCH}$. Porro est $\dfrac{CH}{FH} = \dfrac{CD}{FD}$ cosinus declinationis, $\dfrac{CL}{FL}$ cosinus anguli CLF, sive latitudinis loci DCA, LFH $=$ SFZ est distantia solis a zenith: LCH habet pro mensura arcum horarium EH, nimirum horam vespertinam, vel residuum matutinæ ad XII redactam ad partes æquatoris. Quare si distantia a zenith dicatur D, & hic angulus horarius H; habebitur valor formulæ $\dfrac{r\sin.D}{\cos.decl.\cos.lat.\sin.H}$.

18. *Is valor pendet a tribus elementis, declinatione solis, latitudine loci, & horâ: nam ab iis pendet D distantia a zenith, & ab hac refractio r. Ad habendam ex iis elementis distantiam* a zenith, satis est resolvere triangulum sphæricum ZP"S, in quo

habebuntur hæc tria, latus P''S complementum declinationis additæ gradibus 90, vel inde ablatæ, prout ea fuerit australis, vel borealis, latus P''Z complementum latitudinis loci, & angulus horarius ad P'' = H. Quare habebitur latus ZS = D. In tabula refractionum habebitur refractio *r* respondens distantiæ a zenith D.

19. Resolutio numerica trianguli ZP''S evitari potest per constructionem graphicam, quæ exhibebit valorem arcus quæsiti ZS satis proximum vero ad hanc rem, ubi valor formulæ debet esse exiguus. Plurium minutorum error in valore D inducet errorem in *ejus sinu*, & in *refractione r exiguum* respectu totius, qui evadit insensibilis (*). *Inventis vel per calculum trigonometricum, vel per constructionem graphicam distantiis D a zenith*, & *eruto e tabulis refractionum* valore *r* refractionis, quæ ipsi respondet, *facile* ope logarithmorum invenietur pro singulis horis singularum declinationum valor formulæ $\frac{r\,sin.D}{cos.decl.cos.lat.sin.H}$, qui factâ conversione in tempus, nimirum divisus adhuc per 15, exhibebit errorem primum.

20. Sic pro dato loco facile obtinebitur tabula primi erroris habens duplex argumentum, nimirum declinationem, & horam. Eadem obtinebitur etiam pro secundo errore deviationis plani instrumenti a plano Meridiani, & quidem facilius itidem per usum quantitatum exiguarum. Concipiatur in fig. 2 arcus N*n*, qui abscindat M*n* differentiam *laterum* LM, LN; *sive angulorum* LFH, LF*h*', quæ est = *r*. Positis in num. 12 angulis HF*h*', HC*h*' pro eorum sinubus, habebitur valor prioris, si valor posterioris ducatur in *cos.decl.*. Valor autem anguli HC*h*' est (num. 17) = $\frac{r\,sin.D}{cos.decl.cos.lat.sin.H}$. Quare valor anguli HF*h*', sive arcus MN, erit $= \frac{r\,sin.D}{cos.lat.sin.H}$, qui dicatur *a*. Ob angulum rectum M*n*N erit

(*) Hic habebatur constructio prorsus eadem, quæ in Opusculo præcedente a numero 22 paullo aliter expressa, sed re prorsus eadem, quæ quidem nec esset necessaria: poterat enunciari, methodum generalem ejusmodi constructionis haberi in prima parte Tomi III hujus Collectionis statim post Opusculum primum.

erit $Nn^2 = MN^2 - Mn^2$, adeoque $Nn = \sqrt{(a^2 - r^2)} = \sqrt{((a+r)(a-r))}$. Is arcus divisus per sinum arcus LN, vel LM, sive anguli LFH distantiæ a zenith = D, exhibebit angulum MLN, sive quæsitam inclinationem planorum $= \frac{\sqrt{((a+r)(a-r))}}{sin.D}$.

21. Error primus horarius erat, num. 19 $= \frac{r sin.D}{15 cos.decl.cos.lat.sin.H}$, adeoque erit $= \frac{a}{15 cos.decl.}$. Quare si is error dicatur e, & error secundus positionis plani Meridiani e'; addito valore a utili pro utroque, habebuntur sequentes formulæ (*).

$$a = \frac{r sin.D}{cos.lat.sin.H},\ e = \frac{a}{15 cos.decl.},\ e' = \frac{\sqrt{(a+r)(a-r)}}{sin.D}.$$

§. IV.

Proponuntur considerationes prioris methodi ad solutionem adhibitæ (**).

22. PRIMA methodus (§. II) est accurata, nec unquam potest inducere in errorem, potest tamen deficere in casibus nonnullis: secunda (§. III) fere semper exhibet valorem saltem vero quamproximum, sed aliquando inducit in errores maximos, qui possunt etiam excrescere in infinitum, quod quidem accidit methodis omnibus differentialibus, nisi caute adhibeantur, & quidem aliquando etiam, ubi agitur de quantitatibus vere infinitesimalibus, sed multo magis, ubi methodi infinitesimales applicantur, ut hic, quantitatibus non infinite parvis, sed finitis, utut exiguis. Evolvemus hoc, & sequenti paragrapho ea omnia, quæ evolutio erit utilis non modo ad habendam accuratam determinationem eorum, quæ in hoc Opusculo quæruntur, sed ad agnoscendam intimius indolem methodorum, & evitandos errores, quibus

(*) Hi valores iidem obvenerunt in præcedente Opusculo numero 17 eruti ibi alia methodo simpliciore.

(**) Hæ investigationes habentur in Opusculo præcedente institutæ paullo aliter, nimirum relate ad illam aliam methodum solvendi idem problema, & continentur intra limites arctiores.

bus obnoxii esse possunt, qui eas temere adhibent, nec solutiones generales excutiunt, & applicant ad diversos casus particulares, qua in re veteres Græci Geometræ fuerunt accuratissimi: nostri recentiores nonnunquam sunt multo negligentiores.

23. Prima illa methodus adhibet (fig. 1) resolutionem trigonometricam triangulorum L*h*'F, L*h*'C, assumpto ubicunque puncto H, ex quibus profluat angulus HC*h*', qui exhibet arcum horarium H*h*' erroris primi, & inclinationem planorum IFH, IF*h*', sive errorem secundum inclinationis plani Meridiani. Quare si ea triangula haberi non possint in quibusdam casibus; in iis ea methodus deficiet. Porro ea triangula haberi non possunt, *si utrumque* e punctis F, L, vel *alterum abeat in* C, *vel in infinitum*, quo casu ea triangula *evanescunt*, vel abeunt in infinitum ita, ut eorum angulus, qui habebat ibi verticem, nusquam jam sit. Ipsa autem triangula *evadunt impossibilia*, & inducunt eam, quam in calculo *appellamus imaginarietatem*; si conditio problematis reddat unum e *tribus lateribus majus* reliquis binis simul sumptis. Ad evolvendos eos casus consideranda est positio punctorum F, L, H, *h*', quæ pendet a declinatione solis, latitudine loci, & hora, a quibus elementis pendent errores inducti a refractione in usu instrumenti, de quo agimus.

24. Refractio ipsa HF*h* habetur semper, sole posito extra zenith Z. In eo solo casu evanescit, in quo sol *apellat* ad zenith, in quo quidem *patet*, *errorem provenientem* a *refractione* nullum esse. Id non *potest* accidere nisi *sub* zona torrida in singulis *ejus locis semel*, vel ad summum bis in anno, in meridie, quo casu puncta H, *h* abibunt simul in I. In quavis alia determinata distantia solis a zenith refractio habetur aliqua, quæ est perquam exigua in exigua distantia, augetur, eâ auctâ, sed ita, ut ad minutum integrum non perveniat, nisi post gradus 45 ejus distantiæ, & in ipso horizonte, in quo est maxima, sit circiter minutorum 33.

25. Punctum H pendet a sola hora, *punctum F* a sola declinatione, punctum L ab ipsa, & a *latitudine loci*. Punctum H in meridie est in E, a quo puncto reliquis horis distat ita, ut

arcus

arcus EH in meridie evanescat, nec abeat in semicirculum, nisi sub zonis frigidis eo tempore, quo sol evadit inocciduus, puncto H tempore, quod mediæ nocti responderet, abeunte in D. Punctum F abit in C in æquinoctiis, factâ $= 0$ declinatione CDF: reliquis anni temporibus recedit inde versus P, vel P', prout declinatio fuerit borealis, vel australis, sed ita, ut radio existente $= 1$, maxima ejus distantia CF non excedat partes 0,4341, quæ est tangens maximæ declinationis 23°. 28' in solstitiis, adeoque id punctum non potest abire in infinitum, potest autem abire in C. Punctum L pro quovis loco sito extra æquatorem ita pendebit a puncto F, ut, eo abeunte in C in æquinoctiis, abeat simul eòdem etiam ipsum: declinatione existente boreali, ut figura exhibet, abit pro locis latitudinis borealis, quibus eadem est aptata, a C versus E, & cadit citra E, in E, vel ultra; prout latitudo loci fuerit major, æqualis, vel minor declinatione CEF; ipsa vero declinatione existente australi, abibit a C versus D itidem citra D, vel in D, vel ultra, prout latitudo borealis ipsa fuerit major, æqualis, vel minor ea declinatione. Quod si latitudo loci fuerit nulla, loco nimirum posito in æquatore terrestri; id punctum, declinatione existente aliqua, abit in infinitum ex parte E, vel D, prout declinatio fuerit borealis, vel australis, quia tum angulus CFL complementum latitudinis evadit angulus rectus, ut FCL, & rectæ CL, FL evadunt parallelæ. *Sed sole posito in æquatore cælesti, loco in terrestri*, punctum L quodammodo veluti diffunditur per totam rectam ACB utrinque in infinitum productam, congruentibus rectis CL, FL, vel potius nusquam jam est. Ea omnia patebunt magis inferius (num. 37) in figura 4 ordinata ad exhibendas diversas positiones punctorum F, L.

26. Hinc facile jam definiuntur casus omnes, in quibus prima *methodus deficit priore defectu* triangulorum adhibitorum: 1°. *deficit quovis anni tempore pro locis positis in æquatore terrestri*, pro quibus *punctum L abit in infinitum ita, ut nusquam jam sit*: 2° deficit pro *quavis alia etiam latitudine in* æquinoctiis, punctis F, L abeuntibus in C, & evanescente utroque triangulo L*h*F,

L*h*C

LhC. Deficiet secundo modo prope polum quavis hora, & prope meridiem quovis loco, in quibus casibus occurrit imaginarietas, nimirùm impossibilitas incursus radii refracti in circulum DKEK', quæ pro utroque casu facile demonstrabitur sequenti pacto.

27. Angulus IFE est minimus omnium angulorum, quos rectæ digressæ ab F, & terminatæ ad eum circulum continent cum recta verticali FI: cum enim recta ME sit (num.4) perpendicularis ad planum circuli ejusdem; erit minor quavis MH, adeoque in triangulis MFE, MFH, in quibus latus MF est commune, latera FH, FE æqualia, angulus MFE oppositus basi minori ME erit minor, quam MFH oppositus majori MH. Quare si angulus IF*h* fuerit minor angulo IFE; nulla conversione instrumenti circa AB, sive GI radius F*h* poterit incurrere in eum circulum. Porro angulus IF*h* erit minor angulo IFE quavis hora in exigua distantia a polo, & in quavis latitudine loci in exigua distantia a meridie.

28. Concipiatur enim recta EF producta usque ad Meridianum cælestem in N, in quo sit Q punctum æquatoris, ac dicatur *r*' refractio debita distantiæ ZN a zenith meridianæ minimæ omnium distantiarum ejusdem diei, quæ refractio erit minor quavis alia refractione *r* diei ejusdem. Sol in meridie erit in N, adeoque QN erit *declinatio solis*: QZ erit *latitudo loci*, & ZN = *lat.* ± *decl.*, quæ erit *mensura anguli ZFN* = *IFE*. Erit itidem P''S = P''N.

29. Jam vero prope polum impossibilitas sic facile demonstratur, & determinatur ejus limes. Arcus ZS mensura anguli ZFS, sive IFH est minor binis arcubus simul P''S + P''Z, sive P''N + P''Z, vel ZN + 2P''Z. Quare IF*h* = IFH − *r*, erit minor, quam ZN + 2P''Z − *r*, & adhuc minor quam ZN + 2P''Z − *r*', ob *r*' minorem, quam *r*. Hinc si fuerit 2P''Z minor *r*', sive *distantia a polo* P''Z minor dimidiâ refractione *minima* debitâ *distantiæ minimæ a zenith meridianæ diei cujuspiam*; nullâ horâ ejus diei radius refractus poterit incidere in circulum DKEK', & limes, in quo incipiet ejusmodi impossibilitas respondens *ho-*

ris omnibus, erit æqualitas distantiæ a polo cum ea dimidia refractione minima. Ea refractio invenietur facile. Distantia solis a zenith in polo est complementum declinationis: sumatur refractio debita ei distantiæ, & distantia a polo veræ proxima erit ejus dimidium: dematur hæc a complemento declinationis, & habebitur distantia meridiana a zenith magis correcta, cui respondens refractio erit jam correctior, & exhibebit distantiam a polo correctiorem æqualem ejus dimidio.

30. Quod pertinet ad impossibilitatem prope meridiem in majoribus a polo distantiis, ea itidem facile demonstratur, & determinatur facile ejus limes. Quoniam angulus IFH in exigua distantia ab IFE est eo tantillo major, & quo major est distantia a meridie, eo magis augetur is angulus, refractio autem non mutatur ad sensum, mutatâ parum admodum distantiâ a zenith; habebitur aliquis limes, in quo differentia eorum angulorum erit æqualis refractioni: citra eum limitem ea differentia erit minor refractione, adeoque angulus IF*h* erit minor angulo IFE, & nulla conversione instrumenti radius F*h* poterit incidere in eum circulum. Is limes determinabitur per resolutionem unici trianguli sphærici P''ZS. In eo erit P''Z = *compl.lat.*, P''S = *compl.decl.*, ZS = ZN + *r* = *lat.* ± *decl.* + *r*. Datis tribus lateribus invenietur angulus ad P'', cujus mensura est arcus horarius EH, qui redactus ad tempus divisione instituta per 15 exhibet primum errorem temporarium in eo limite, & angulus SZP'', cujus supplementum est angulus SZN exhibens secundum errorem directionis plani Meridiani.

31. Sole existente in æquatore, determinatio evadet facilior. Concipiatur arcus circuli maximi SN: is erit arcus æquatoris, cadente N in Q, adeoque perpendicularis Meridiano in N, qui metietur angulum horarium SP''N quæsitum. In triangulo ZNS rectangulo ad N habebitur latus ZN = *lat.*, quia tum declinatio QN est nulla, & hypothenusa ZS = *lat.* + *r*. Quæretur arcus horarius SN, qui exhibebit distantiam limitis a meridie, & angulus SZN, qui exhibebit errorem plani Meridiani. Erit ex formulis trigonometricis *cos.*ZS = *cos.*SN × *cos.*NZ, adeoque *cos.*SN

$= \frac{cos.ZS}{cos.NZ} = \frac{cos.(lat. + r)}{cos.lat.}$. Pariter ex iisdem $sin.SZN = \frac{sin.SN}{sin.SZ}$ $= \frac{sin.SN}{sin.(lat. + r)}$, vel, omisso r tam exiguo $= \frac{sin.SN}{sin.lat.}$. Poterunt autem pro $sin.SZN$, & $sin.SN$ poni ipsi arcus, atque id, sive ii arcus assumantur in iisdem partibus radii, in quibus assumuntur sinus, sive in gradibus, minutis, & secundis, ratione eorum valorum remanente eadem, quæcumque scala partium adhibeatur. Hinc habebitur $SZN = \frac{SN}{sin.lat.}$, *ubi in capiendo sinu latitudinis tuto poterunt negligi secunda.*

32. In *formula* $cos.SN = \frac{cos.(lat. + r)}{cos.lat.}$ poterunt itidem negligi secunda latitudinis tam in numeratore, quam in denominatore; sed in valore r, qui constat vel solis secundis, vel paucis admodum minutis, negligi non possunt. Is neglectus induceret errorem in valorem cosinus SN, qui esset exiguus respectu ipsius, sed pareret errorem ingentem in valore SN; nam cosinus arcuum exiguorum mutantur parum admodum, mutatis plurimum arcubus. Tota determinatio ejus arcus provenit ab additione valoris exigui r, in quo si negligantur partes non exiguæ respectu ipsius, orietur in determinatione error itidem non exiguus respectu ejus, quod inde *determinatur*. Idcirco in applicando ipsi formulæ calculo numerico oportet adhibere *partes proportionales* ad eruendum e tabulis valorem $cos.(lat. + r)$. Usus partium proportionalium evitari potest reducendo ipsam formulam sequenti pacto (*).

33. Est $cos.(lat. + r) = cos.lat.cos.r - sin.lat.sin.r$. Pro $cos.r$ potest poni radius $= 1$: arcus quæsitus SN dicatur x, & erit $cos.x = \frac{cos.lat. - sin.lat.sin.r}{cos.lat.} = 1 - tan.lat.sin.r$. Porro $cos.x$ $= 1 - sin.vers.x = 1 - 2sin^2.\frac{1}{2}x$. Quare $2sin^2.\frac{1}{2}x = tan.lat.$ $sin.r$

(*) Hæc methodus congruit fere penitus cum adhibita in Opusculo præcedente numero 3, ac formulæ proveniunt re ipsa eædem: pro applicatione numerorum non omnia, quæ hic habentur, illuc sunt translata.

$sin.r$, vel ponendo $\frac{1}{2}sin.x$ pro $sin.\frac{1}{2}x$ ob arcus exiguos proportionales sinubus quamproxime, $\frac{1}{2}sin^2.x = tan.lat.sin.r$, & $sin.x = \sqrt{2tan.lat.sin.r}$. Hìc ad habendum logarithmum $sin.r$ necessarius esset usus tabularum majorum, ut Gardinerii, habentium sinus pro minutis, & secundis priorum graduum; nec vero in tabulis communibus adhiberi possent partes proportionales, cum differentiæ logarithmorum sinuum exiguorum non sint proportionales differentiis suorum arcuum. Adhuc tamen potest evitari usus tabularum majorum, & partium proportionalium duplici pacto.

34. Primo quidem si numerus secundorum contentus in radio fiat $= n$, & numerus r exprimat refractionem reductam ad secunda; sinus r in iis partibus radii, in quibus assumuntur sinus in tabula, erit $\frac{r}{n}$, & $sin.x = \frac{x}{n}$, exprimente itidem x numerum secundorum ejus valoris quæsiti. Hinc fiet $\frac{x}{n} = \sqrt{\frac{2r tan.lat.}{n}}$, adeoque $x = \sqrt{2nr tan.lat.}$ Porro ob exiguitatem valoris x satis erit assumere logarithmorum notas 4, vel 5 priores post characteristicam, & duplicato numero r adhibere semisummam logarithmorum $2r$, n, $tan.lat.$ Est autem $log.n = 4,31442$. Alia ratio (*) evitandi usum partium proportionalium erit, assumendo $R = 60r$, quo pacto migrabunt minuta prima in gradus, secunda in minuta, retentis iisdem numeris, & ob proportionalitatem sinuum cum arcubus exiguis, erit $sin.r = \frac{1}{60}sin.R$. Quare habebitur $sin.x = \frac{\sqrt{nt an.lat.sin.R}}{30}$.

35. In formula præcedente valor x quæretur in tabula logarithmorum respondentium numeris naturalibus, in hac formula posteriore quæretur in tabula respondentium sinubus: nec vero poterat in formula $\frac{1}{2}sin^2.x = tan.lat.sin.r$ poni x, & r pro $sin.x$, & $sin.r$, quia non erant ii valores dimensionum earundem, altero habente duas, altero unam; neque enim in æquatione possunt

 sub-

(*) Hæc sola secunda e binis rationibus hìc adhibitis ad eam rem retenta est in Opusculo præcedente, appellando r', quod hìc est R.

substitui numeri alterius scalæ cujuspiam exprimentes easdem quantitates, nisi in utroque membro id fiat pro coefficientibus totius membri, vel singulorum terminorum utriusque eodem dimensionum numero. Hæc formula posterior erit commodior, quia exhibebit immediate ipsum arcum x in gradibus, & minutis; dum illa prior exhibens numerum secundorum requiret reductionem ad minuta, & gradus; præterquam quod pro latitudinibus majoribus, in quibus refractio pertingit ad plura minuta in æquinoctiis in ipso meridie ob majorem in ea poli, & æquatoris positione distantiam a zenith, requiritur prævia reductio valoris r ad secunda.

36. In hisce casibus, in quibus problema evadit impossibile, primum triangulum LFh' nihil impossibilitatis involvet; cum datis lateribus LF, Fh' cum angulo intercepto LFh' magnitudinis cujusvis, semper haberi possit triangulum reale iis constans, quod & facile construitur. At in eo obveniet valor Lh' ejusmodi, ut reddat impossibile secundum triangulum LCh', in quo invenientur semper bina latera simul sumpta minora tertio; atque id absurdum profluet ex eo, quod radio Fh depresso in iis casibus per refractionem infra FH, magis quam recta FE sit inclinata ad horizontem, punctum h, adeoque & h' deberet esse inferius puncto E, dum omnium punctorum secundi circuli EKDK' inclinati ex parte E omnium infimum est punctum H.

37. Id facile patebit, si concipiantur omnes positiones puncti L in recta DE producta quantum oportet utrinque, de quibus supra num. 25. Sint in fig. 4 bini circuli cum axe, & suis punctis, ut in prima, sed cum exigua latitudine AD, quæ præbebit locum iis positionibus omnibus. In ingenti declinatione boreali recta verticalis ZF occurret rectæ DE in L infra punctum E, in minore supra in L' inter C, & E: in exigua australi incidet in ipsam in L'' supra C inter ipsum, & D, in aliqua alia majore in L''' supra ipsum D. Posset cadere punctum L etiam in E, C, D; sed facile patebit, absurdum, quod invenietur in illis quatuor ejus positionibus prope ea puncta, haberi etiam in concursu cum ipsis. In prima positione anguli LFh', LFE essent supple-

men-

menta angulorum ZFh', ZFE, adeoque horum priore existente majore, angulus LFh' esset minor, quam LFE, & ob Fh' = FE recta Lh' minor, quam LE, adeoque ob h'C = EC summa laterum Lh' + h'C minor, quam LE + EC, nimirum quam latus tertium LC. In secunda positione angulus L'F'h' esset itidem minor angulo L'F'E, adeoque itidem L'h' minor, quam L'E, & summa laterum CL' + L'h' minor, quam CL' + L'E, nimirum minor, quam radius CE æqualis tertio lateri Ch'. At puncto L'' abeunte supra F'' in positione tertia, anguli L''F''h', L''F''E essent iidem, ac anguli Z''F''h', Z''F''E, adeoque e contrario angulus L''F''E minor angulo L''F''h', & L''E nimirum summa L''C + CE, sive L''C + Ch' minor tertio latere L''h'. Demum in positione quarta itidem L'''F'''E minor, quam L'''F'''h', adeoque L'''E, sive itidem summa L'''C + CE, nimirum L'''C + Ch' minor, quam tertium latus L'''h', quod erat absurdum propositum. Id absurdum occurreret etiam in calculo trigonometrico, in quo devenitur ad sinum anguli quæsiti majorem radio, quotiescunque proponatur resolvendum triangulum, datis tribus lateribus ita, ut bina simul sint minora tertio.

38. Polo P posito prope A non poterit haberi casus primus, & quartus; sed secundus, & tertius demonstrationem complebunt. Prima igitur methodus deficit, tam sole existente in æquatore cælesti, quam loco in terrestri ob defectum triangulorum ad solutionem adhibitorum, quam in accessu nimio ad polum, vel ad Meridiem ob angulum ZFh majorem in figura 1 angulo IFE. Cum in hoc casu habeatur vera impossibilitas; ea methodus ibi suppleri non potest: secus in priore, in quo facile invenitur solutio, quæ plerumque in iis casibus evadit simplicior. Eam hìc proponemus incipiendo a sole existente in æquatore.

39. Eo casu, puncta F, L abeunt in C, chorda GI in diametrum ACB, evadente GHI semicirculo maximo, in quo arcus Hh metietur refractionem HFh = r, IH angulum IFH = ZFS = D, adeoque erit Ih' = Ih = D − r. Erit autem Ih'E triangulum sphæricum rectangulum ad E, ubi bini circuli sunt sibi invicem perpendiculares, cujus latus IE fiet = BE = AD =

lati-

latitudini loci, hypothenuſa $Ih' = D - r$, adeoque latus Eh' habebitur; erit enim ex Trigonometria ſphærica radius $= 1$ ad $cos.Eh'$, ut $cos.IE = cos.lat.$ ad $cos.Ih' = cos.(D-r)$, adeoque $cos.Eh' = \frac{cos.(D-r)}{cos.lat.}$, qui arcus ablatus ab EH aſſumpto ad eruendam diſtantiam a zenith $= D$, & refractionem $= r$, relinquet arcum quæſitum Hh', qui redactus ad tempus exhibebit errorem primum temporarium. Is, invento D, invenietur ita multo facilius per ſolutionem unius *trianguli ſphærici* rectanguli, dum prius inveniebatur per *ſolutionem duorum rectilineorum* rectangulorum. Ipſe autem valor D, qui prius *inveniebatur in triangulo ſphærico obliquangulo* ZP''S, *invenietur facilius in* rectangulo IEH; e- *rit enim* $cos.IH = cos.IE \times cos.EH$, nimirum $cos.D = cos.lat.cos.H$. Error ſecundus erit angulus HIh', qui facile invenietur; cum in triangulis rectangulis IEH, IEh' ſit $cos.EIH = \frac{tan.EI}{tan.IH} = \frac{tan.lat.}{tan.D}$; & ſimiliter $cos.EIh' = \frac{tan.lat.}{tan.(D-r)}$.

40. Si præter ſolem poſitum in æquatore cæleſti, locus ſit in æquatore terreſtri; abibunt præterea puncta D, E, in A, B, æquator fiet primus verticalis, cum quo ſemper congruet GHI, congruente arcu Eh' cum Eh, adeoque arcus quæſitus Hh' erit $= Hh = r$, qui tum obtinetur ſine ullo calculo. Congruit formula $cos.Eh' = \frac{cos.(D-r)}{cos.lat.}$, cum evaneſcente latitudine ſit $cos.lat. = 1$, adeoque $cos.Eh' = cos.(D-r) = cos.Ih'$, unde facto tum $HE = HI = D$, evadit $Hh' = r$. In eo caſu ſol aſcendit rectà ab horizonte ad zenith per æquatorem congruentem cum primo verticali, & refractio deprimit radium in plano ipſius circuli per arcum ſibi æqualem, cum ipſe radius tranſeat tum per centrum ipſius circuli. Hinc error ſecundus ibi eſt nullus.

41. Quod ſi locus quidem ſit in æquatore terreſtri, *ſed* ſol extra cæleſtem; tum vero alio modo inſtituenda erit ſolutio. Sint in figura 5 primus circulus EPDP', dimidium ſecundi EHD, exiſtente diametro communi DE verticali in ea poſitione, adeo-

que

que parallela chordæ GFI transeunti per foramen F. Sit autem H punctum hujus, ad quod radius deveniret sine refractione, & h' id, ad quod devenit per conversionem. Erit mensura anguli IFH distantia a zenith $=$ D, quæ ex datis hora, & declinatione hic invenietur facile. Si enim concipiatur arcus æquatoris cælestis transeuntis per Z occurrens arcui P''S in R; erit ZR mensura anguli ZP''S $=$ H, & SR declinatio solis, ZS distantia quæsita D ipsius a zenith: cumque in triangulo rectangulo SRZ sit $cos.ZS = cos.SR \times cos.ZR$; erit $cos.D = cos.decl.cos.H$. Invento D, habebitur refractio r. Angulus $h'FI$ erit $= D - r$. Concipiatur per h' planum perpendiculare rectis DE, GI parallelis, quibus occurrat in t, u. Erit $cos.Dh' = Ct$ (ob $Ch' = 1$) $= Fu = Fh' \times sin.h'FI = \frac{sin.(D-r)}{cos.decl.}$ ob $Fh' = FD = \frac{1}{cos.decl.}$: (num. 10). Inde habebitur arcus Eh', qui ablatus ab EH assumpto $=$ H relinquet quæsitum Hh': hic redactus ad tempus divisione per 15, erit primus error horarius.

42. Error secundus inclinationis planorum invenietur hic methodo adhibita pro solutione generali. Satis est in fig. 2 puncto L substituere punctum I hujus figuræ. Erit hic, ut ibi numero 12 $sin.\frac{1}{2}HFh' = sin.\frac{1}{2}HCh' \times cos.decl.$. Invento inde HFh', & adhibitis IFH, IFh' hujus figuræ pro LFH, LFh' illius, sive D, & $D - r$, angulus MLN erit quæsitus error.

§. V.

Proponuntur considerationes secundæ methodi paragraphi III.

43. FORMULA pro errore 1°. fuerat, num. 19 $\frac{r sin.D}{15 cos.decl.cos.lat.sin.H}$. Inquirendum in singulos hosce valores. In primis refractio r est $=$ o in ipso zenith, & *est exigua quidem, sed semper aliqua in quavis alia distantia D a zenith. Quare ex hoc capite formula tota evadit ibi $=$ o; nisi divisores excrescentes in infinitum* compensent ejus evanescentiam: verum jam constat, sole existente in zenith, & proinde refractione nulla, non habere locum

hanc

hanc perquisitionem, in qua inquiritur in effectum ipsius refractionis. Valor *sin.*D, sole existente in zenith, est itidem $= 0$, cum ibi sit nulla distantia D ab ipso zenith, adeoque etiam ex hoc capite formula ibi evanescit, nisi ab evanescentia divisorum compensetur, quod nonnunquam accidit. Extra zenith is sinus est semper aliquid, & in horizonte $= 1$. Si instrumentum adhibeatur in elevatione, quæ solem videat infra horizontem, tum ipse *sin.*D iterum decrescit. Valor *cos.decl.* in æquinoctiis evadit $= 1$, declinatione ibi evanescente, & est minimus in solstitiis $= cos.23°.28'$. Valor *cos.lat.* in æquatore terrestri, ubi *lat.* $= 0$, evadit $= 1$, & in polo, ubi ea est $= 90°$, evadit $= 0$, adeoque valor formulæ in polo evadit infinitus, in quo cum sol non possit appellere ad zenith, nec *r*, nec *sin.*D potest evadere $= 0$. Demum valor *sin.*H evadit $= 0$ in meridie, & hora 6 est $= 1$, cum arcus horarius H sit tum $= 90°$. Hinc etiam in meridie formula evadit infinita, atque id, ubicunque sol sit extra zenith, nam, ipso sole existente in zenith, ea adhuc est $= 0$, cum ibi evadant $= 0$ binæ dimensiones numeratoris *r*, & *sin.*D, unica vero denominatoris *sin.*H, quæ sola sine auxilio evanescentiæ valoris *cos.lat.* non potest compensare evanescentiam numeratoris.

44. Hìc autem jam patet, formulam esse erroneam in casu *lat.* $= 90°$, vel H $= 0$, nimirum in polo quavis hora, & ubique in meridie, dummodo sol non sit in ipso zenith, & quidem ea est in iis casibus erronea errore infinito. Si enim in prima integra conversione instrumenti radius incidit aliquando in circulum continentem horas; distantia ejus puncti a puncto infimo horæ 12 erit utique finita: si autem in tota prima conversione nunquam incidit; continuatâ ipsâ in infinitum, utique nunquam incidet, adeoque valor formulæ non potest esse infinitus. Vidimus num. 29, & 30, in iis binis casibus valorem a formula expressum esse Imaginarium, non realem: adeoque in ipsis ea formula est omnino erronea. Porro debet esse erronea etiam prope polum, & prope meridiem: nam decrescente in immensum distantia loci a polo terrestri, vel solis a Meridiano cælesti, *cos.lat.*, vel *sin.*H decrescunt in immensum, adeoque crescit in immensum valor for-

mulæ,

mulæ, dum arcus reſpondens errori horario ab ipſa expreſſo non poteſt ſuperare ſemicirculum. Et quidem etiam in iis caſibus oſtendimus, haberi imaginarietatem, cujus etiam limites determinavimus in paragrapho ſuperiore.

45. Videndum eſt igitur, cur in iis caſibus formula evadat erronea. Id quidem provenit ex eo, quod in fig. 3 habitis cC, cD pro rectis lineis, nimirum adhibitis chordis eorum arcuum, aſſumpti ſunt anguli BCc, CDc pro rectis, unde profluxit (num. 15) æqualitas angulorum ACB, CcD, quorum uterque habitus eſt pro complemento ejuſdem cCD. Revera angulus CDc acutus excedit rectum per dimidium anguli DAc, per quod deficit a recto angulus ADc ad baſim Dc trianguli iſoſcelii, & angulus BCc e contrario deficit a recto per dimidium anguli CBc oppoſiti baſi trianguli iſoſcelii CBc. Anguli CAc, CBc dicantur b, & b', & erit $BCc = 90° - \frac{1}{2}b'$, ac $ADc = 90° - \frac{1}{2}b$. Hinc $cCD = BCc - ACB = 90° - \frac{1}{2}b' - ACB$, & $CcD = ADc - cCD = 90° - \frac{1}{2}b - 90° + \frac{1}{2}b' + ACB = ACB + \frac{1}{2}(b' - b)$. Præterea aſſumptus eſt valor $CD = Cc \times sin. CcD = Cc \times sin. ACB$, dum revera ſi concipiatur verum perpendiculum cd in rectam AC, non erit $CD = Cc \times sin. CcD$, ſed $Cd = Cc \times sin. Ccd$. Hinc neglecta eſt primo ſemidifferentia $\frac{1}{2}(b' - b)$ angulorum CBc, CAc, tum angulus Dcd, qui eſt $= \frac{1}{2} cAD = \frac{1}{2}b$, ac lineola Dd.

46. In figura 3 angulus ACB eſt minor angulo cCB; ſed ille *poteſt eſſe hoc eodem major*, quo caſu adhibito ſimili neglectu, *angulus CcD non erit æqualis angulo ACB*, ſed ejus *ſupplemento*: migrabit figura tertia in ſextam, in qua producto latere BC in B', erit angulus cCD habendus pro complemento hinc anguli CcD, inde anguli ACB', adeoque angulus CcD pro æquali angulo ACB': adhuc tamen erit $CD = Cc \times sin. ACB$, cum debeat eſſe $= Cc \times sin. ACB'$, & ſinus ſupplementorum ACB, ACB' ſit idem. Sed *neglectus lineolæ Dd*, qua $Cd = Cc \times sin. Ccd$ ſuperat rectam CD, & anguli $Dcd = \frac{1}{2}b$ erit idem. Accedit autem *contemptus valoris $\frac{1}{2}(b' + b)$ pro $\frac{1}{2}(b' - b)$*. Erit enim hic itidem $BCc = 90° - \frac{1}{2}b'$, adeoque $B'Cc = 180° - BCc = 90° + \frac{1}{2}b'$, & $ADc = 90° - \frac{1}{2}b$, adeoque $cCD = B'Cc - ACB' =$

$90^\circ + \frac{1}{2}b' - \text{ACB}'$, & $\text{C}c\text{D} = \text{AD}c - c\text{CD} = 90^\circ - \frac{1}{2}b$ $- 90^\circ - \frac{1}{2}b' + \text{ACB}'$, qui valor evadit $= \text{ACB}' - \frac{1}{2}(b' + b)$. In priore caſu habebatur æqualitas anguli C*c*D cum angulo ACB per contemptum semidifferentiæ angulorum CB*c*, CA*c*, in secundo cum ejus ſupplemento per contemptum semiſummæ.

47. Donec anguli CA*c*, CB*c* fuerint exigui tam reſpectu anguli ACB figuræ 3, quam reſpectu ejus ſupplementi, contemptus semidifferentiæ ipsorum, vel semiſummæ exiguus reſpectu eorum, reſpectu quorum fit, non afferet errorem ſenſibilem in formula, quæ per eum neglectum eruitur: nec vero lineola D*d* rem turbabit, quia erit exigua reſpectu differentiæ CD, reſpectu cujus negligitur, quod ſic demonſtratur. Lineola *d*D eſt ad *d*C, ut tangens anguli *dc*D ad tangentem anguli *dc*C: prior ex iis duobus angulis debet eſſe exiguus, poſterior non poteſt: nam angulus *dc*D eſt $= \frac{1}{2}\text{CA}c = \frac{1}{2}b$, & *dc*C eſt $= 90^\circ - \text{AC}c$: ipſe autem AC*c* in fig. 3 eſt $= \text{BC}c - \text{ACB} = 90^\circ - \frac{1}{2}\text{CB}c - \text{ACB}$, adeoque $dc\text{C} = \text{ACB} + \frac{1}{2}\text{CB}c$, & in fig. 6 eſt $\text{AC}c = \text{ACB} - \text{BC}c$ $= \text{ACB} - 90^\circ + \frac{1}{2}\text{CB}c$, adeoque $dc\text{C} = 180^\circ - \text{ACB} - \frac{1}{2}\text{CB}c$. Quamobrem prior angulus *dc*D debet eſſe exiguus, poſterior *dc*C differt ab angulo ACB, vel ab ejus reſiduo ad 180°, per dimidium angulum exiguum $\text{CB}c = b'$, adeoque non poteſt eſſe exiguus, niſi ipſe ACB vel ſit exiguus, vel nimis accedens ad 180°.

48. Hinc extra eos caſus lineola D*d* erit exigua reſpectu differentiæ CD, *reſpectu cujus negligitur, & formula exhibebit* valorem vero proximum, quotieſcumque angulus ACB nec erit nimis exiguus, nec nimis accedet ad duos rectos. At in utroque ex his caſibus negliguntur quantitates, quæ poſſunt eſſe non ſolum non exiguæ reſpectu eorum, reſpectu quorum negliguntur, ſed iis æquales, & in immenſum majores, quod accideret imminuto in fig. 3 angulo ACB, vel in fig. 6 ACB', donec evaneſcat, vel accedente ACB in infinitum in ipſa fig. 6 ad duos rectos, donec evaneſcat ACB' ejus ſupplementum, imminutâ *nimirum in infinitum* rectâ AB in priore caſu, auctâ in *poſteriore*, & remanente exiguo, ſed finito utroque ex angulis CA*c*, CB*c*; vel ſaltem altero, in quo caſu etiam D*d* poteſt evadere æqualis, & in

im-

immensum major respectu CD. Hinc nisi forte fortuna quantitates neglectæ se mutuo compensent, determinatio erit erronea, & error poterit excrescere etiam in infinitum.

49. Regrediamur jam ad figuram 1, cum qua ita comparata est figura 3 numero 15 (adjecta deinde est ipsi figura 6 ad exprimendum casum anguli ACB obtusi), ut triangulum ABC hujus abiens in AB*c* referat triangulum LFH illius abiens in LF*h*', tum triangulum CFH ejusdem abiens in triangulum CF*h*. Anguli ACB, CA*c*, CB*c* hujus referunt in prima comparatione angulos LHF, HL*h*', HF*h*' illius, in secunda ejus angulos HC*h*', HF*h*'. Angulus HF*h*' est refractio, quæ quidem est semper exigua, sed semper aliqua in hac perquisitione, in qua quæritur effectus refractionis ipsius. Hinc erit exiguus etiam arcus H*h*', adeoque & angulus HC*h*' ob distantiam puncti C a toto circulo DKEK', cujus id est centrum, & vero etiam HL*h*', nisi L accedat proxime ad E, & punctum H sit itidem ipsi proximum. Quare illi bini anguli *b*, & *b*', qui respondent angulis HL*h*', HF*h*, HC*h*', quorum semidifferentia, vel semisumma negligebatur, debent esse exigui semper præter casum, in quo præter viciniam punctorum L, E, punctum H sit ipsi E proximum, tempore nimirum proximo meridiei, in qua duplici eorum casuum conjunctione vicinia puncti L respectu punctorum H, *h*' potest plurimum augere angulum HL*h*.

50. *At anguli* LHF, LHC, *respectu quorum negligebantur anguli b, & b', possunt tam imminui in infinitum, quam accedere in infinitum ad duos rectos.* Minuuntur ambo in infinitum, imminutâ in infinitum declinatione, cum debeat tum imminui in infinitum ejus tangens CF, adeoque latitudine manente finita, etiam utrumque latus LF, LC trianguli CFL habens ad ipsam CF rationem radii ad tangentem, & secantem anguli CFL = P''FZ complementi latitudinis, qua manente finita, tangens, & secans remanent finitæ. *Latitudine manente finita, evanescent ea ipsa latera cum angulis* LHF, CHL, *si sol abeat in æquatorem*. Minuetur in infinitum etiam extra æquatorem alter ex iis binis angulis, nimirum CHL in accessu puncti L ad C, quod accidet latitudine loci auctâ usque ad quadrantem: eâ enim ita auctâ, augetur

angulus CLF, adeoque minuitur ejus complementum CFL cum recta CL, donec evanescant simul, loco abeunte in polum. Idem angulus CHL accedet in infinitum ad duos rectos latitudine loci imminuta in infinitum, & sole posito extra æquatorem: quia tum angulus CLF minuetur in infinitum, adeoque punctum L recedet in infinitum a C, & E, atque id versus E respectu C, in casu declinationis borealis expresso a figura 4 per L, & ad partes D, in casu declinationis australis, in quo F abeat ibi in F''', & L in L'''. Angulus LHF in distantia ab æquatore non exigua non potest evadere exiguus, non evadente exigua FL, quæ semper est major, quam CF; nec potest accedere ad duos rectos, nisi puncto L abeunte in infinitum, sive loco accedente ad æquatorem.

51. Patet ex hac omni perquisitione, formulam non posse esse suspectam, nisi sole accedente ad æquatorem, hora accedente ad meridiem, loco accedente ad polum, vel ad æquatorem. Extra eos casus ipsa exhibebit semper valores veris proximos. Porro jam vidimus, hora accedente ad meridiem, & loco accedente ad polum, ipsam formulam debere esse erroneam, cum exhibeat valorem infinitum, evanescente in primo casu divisore *sin.*H, in secundo divisore *cos.lat.*. In accessu solis, & loci ad æquatorem formula nihil absurdi continet, cum *cos.lat.*, & *cos.decl.* evadant demum $= 1$. Adhuc tamen nisi aliunde demonstretur, eam habere locum etiam in iis casibus, contemptibus se compensantibus; debebit esse suspecta, nec analysis, ex qua profluxit ea formula, potest extendi ad ipsos.

52. Quod pertinet ad solem positum in æquatore, facile evincitur pluribus methodis, eam esse exactam etiam in eo casu, in quo quidem ipsa reducitur ad formam adhuc simpliciorem, & tamen accuratam. Proferemus binas methodos, quæ exhibent formulam consentaneam cum ea generali rite applicata ad eos casus.

53. Sole existente in æquatore abibit in fig. 1 chorda GFI in diametrum ACB, adeoque GHI erit semicirculus maximus, in quo arcus H*h* erit mensura anguli HF*h* $= r$, arcus IH anguli IFH $=$ ZFS, sive distantiæ solis a zenith $=$ D, arcus autem

IE

IE erit $=$ BE $=$ AD latitudo loci, arcus EH horarius $=$ H, ut prius: erit IEH triangulum sphæricum rectangulum ad E, ubi bini circuli sunt sibi invicem perpendiculares, & hh' erit arcus circuli habentis polos in G, & I, qui idcirco erit perpendicularis arcui Hh circuli maximi GHI. Quare triangulum exiguum hHh' habitum pro rectilineo erit rectangulum in h, habens pro hypothenusa arcum Hh', adeoque latus Hh, nimirum r, adjacens angulo hHh' erit $= Hh' \times cos.hHh'$ erit $= Hh' \times cos.$IHE.

54. Porro in triangulo sphærico IEH erit IH hypothenusa, EH latus adjacens angulo IHE, & ex Trigonometria sphærica est radius ad cosinum anguli, ut tangens hypothenusæ ad tangentem anguli adjacentis, adeoque $cos.\text{IHE} = \frac{tan.\text{EH}}{tan.\text{IH}} = \frac{tan.\text{H}}{tan.\text{D}}$. Hinc $r = \frac{Hh' \times tan.\text{H}}{tan.\text{D}}$, & $Hh' = \frac{r tan.\text{D}}{tan.\text{H}} = r tan.\text{D} cot.\text{H}$, formula multo simplicior, quam generalis inventa numero 17 $\frac{r sin.\text{D}}{cos.decl.cos.lat.sin.\text{H}}$. Verum ea in hoc casu reducitur ad hanc ipsam simplicem. Nam in primis sole posito in æquatore fit $decl. = 0$, $cos.decl. = 1$: deinde in eodem triangulo sphærico, in quo IH est hypothenusa, est $cos.\text{IH} = cos.\text{EH} \times cos.\text{IE}$, sive $cos.\text{D} = cos.\text{H} cos.lat.$, & proinde $cos.lat. = \frac{cos.\text{D}}{cos.\text{H}}$. Quare formula evadit $\frac{r sin.\text{D}}{cos.lat.sin.\text{H}} = \frac{r sin.\text{D} cos.\text{H}}{cos.\text{D} sin.\text{H}} = \frac{r tan.\text{D}}{tan.\text{H}} = r tan.\text{D} cot.\text{H}$.

55. In hac formula datur hora H, pro qua quæritur error, & invenienda est distantia D a zenith per latitudinem, & horam, necessaria etiam ad habendam refractionem r. Ea distantia facile deducitur ex iis elementis per ipsam æquationem $cos.\text{D} = cos.lat.cos.\text{H}$; quanquam sæpe poterit inveniri per immediatam observationem factam hoc eodem instrumento, cui aliquando additur aliud foramen, & divisio indicans altitudines supra horizontem, sive distantias a zenith, quas satis est habere veris proximas tam pro habenda refractione r, quam pro eruendo valore arcus Hh' per formulam, quæ continet valorem D. Observatio exhi-

exhibet non distantiam D veram, sed D — r apparentem: adhuc tamen, ubi agitur de corrigenda hora inventa per instrumentum, possunt adhiberi pro H, & D valores exhibiti ab ipso, qui sunt illis veris tam proximi, ad habendam ope formulæ correctionem veræ quamproximam. Secus si ageretur de computanda tabula errorum pro toto anno. Tum assumendæ essent pro argumentis diversæ declinationes, & pro quavis declinatione diversæ horæ; ac pro singulis inveniendi valores D vel hoc calculo, vel per constructionem indicatam *num.* 19.

56. Secunda methodus deducendi eam formulam erit differentialis. Differentia cosinus est differentia arcus ducta in sinum. Abeunte triangulo EIH in EIh' latus EI remanet constans; mutantur autem hypothenusa IH = D in Ih' = Ih = D — r mutatione r, & latus EH in Eh' mutatione Hh'. Hinc assumendo solas differentias, æquatio $cos.D = cos.lat.cos.H$, exhibet $rsin.D = cos.lat. \times Hh' \times sin.H$, sive $Hh' = \frac{rsin.D}{cos.lat.sin.H}$, ut prius, formulam nimirum erutam ex generali, quæ reducitur ad simpliciorem $rtan.D\,cot.H$.

57. Secundus error inclinationis planorum est angulus HIh', qui redit, ut num. 20. Facto nimirum arcu Hh' = a, cum Hh sit = r, erit $hh' = \surd(a^2 - r^2) = \surd((a + r)(a - r))$, qui arcus divisus per sinum Ih, pro quo arcu ponatur IH = D, exhibebit eum angulum $= \frac{\surd((a+r)(a-r))}{sin.D}$.

58. Hic est valor formulæ sole posito in æquatore, pro latitudine loci quacumque. Si ea fiat = 0, loco posito in æquatore terrestri; fit $cos.lat. = 1$, adeoque formula $= \frac{rsin.D}{sin.H}$, quæ reducitur ad simpliciorem = r; quia sol positus in æquatore pro loco posito in æquatore describit primum verticalem, cum quo ibi congruit æquator, & distantia a zenith est arcus ipse æquatoris, qui metitur distantiam horariam a meridie, adeoque H = D, & $\frac{sin.D}{sin.H} = 1$. Patet autem, ibi circulo DHE congruente cum

GHI,

GHI, arcum Hh' congruere cum $Hh = r$, adeoque formula tum etiam exhibet valorem debitum. Hic casus adeo simplex est ille numeri 25, in quo punctum L diffundebatur per totam diametrum DE productam in infinitum.

59. Remanet casus ultimus, in quo locus est in æquatore terrestri, & sol extra ipsum. Formula etiam pro ipso est exacta, quod sic facile ostenditur. In fig. 5 planum perpendiculare rectis DE, GI parallelis ductum per H occurrat in T, V; & erit CT cosinus arcus EH = H, ut num. 41, ac FV ipsi æqualis = $FH \times cos.HFV = \frac{cos.D}{cos.decl.}$ ob $FH = DF = \frac{1}{cos.decl.}$ per numer. 10, adeoque $cos.H = \frac{cos.D}{cos.decl.}$. Differentia cosinuum est differentia arcus ducta in sinum, ut num. 56, quæ assumenda est cum signo negativo, cum crescente arcu minore quadrante, decrescat ejus cosinus positivus: differentia arcus EH = H est arcus quæsitus Hh': differentia anguli HFI = D abeuntis in $h'FI$ est r, & *cos.decl.* non mutatur. Quare differentia primi membri *cos.*H erit $- Hh' \times sin.H$, & secundi $\frac{cos.D}{cos.decl.}$ erit $- \frac{r sin.D}{cos.decl.}$, quibus valoribus æquatis obtinetur $Hh' = \frac{r sin.D}{cos.decl. sin.H}$. Porro huc reducitur formula generalis numeri 17, & 54 $\frac{r sin.D}{cos.decl. cos.lat. sin.H}$, in hoc casu, in quo latitudine evanescente, ejus cosinus evadit = 1.

Scholium Generale.

60. Hoc pacto revocatâ ad trutinam utraque methodo, habetur solutio generalis directa, & accurata in methodo 1 pro casibus omnibus, in quibus radius adduci potest ad secundum circulum per conversionem instrumenti: habetur demonstratio impossibilitatis prope polum quavis hora, & ubique prope meridiem: habentur limites ejus impossibilitatis, & errorum, qui in iis limitibus sunt maximi, determinatio accurata: habetur formula gene-

nera-

neralis eruta methodo differentiali simplicior, sed minus accurata. Habetur ejus methodi defectus duplex, primus, ubi problema est adhuc possibile, secundus, ubi est impossibile: habetur supplementum pro casibus, in quibus methodus deficit, per alias methodos, quæ ostendunt formulam generalem valere etiam pro ipsis: habetur, in medio impossibilitatis errorem formulæ esse infinitum, & prope ipsos, nimirum prope polum, & prope meridiem, etiam extra limites impossibilitatis errorem formulæ esse adhuc ingentem: habetur ratio ejus defectus, cum accurata inquisitione in ipsam methodum, & in quantitates neglectas.

61. Longo ambitu deveneram ad finem ipsum paragraphi postremi; cum in quærenda demonstratione ultimi casus demum animadverti, longum eum ambitum esse prorsus inutilem; cum omnia multo facilius expediri possint alia via simpliciore, & breviore, addito resolutioni trianguli sphærici ZP''S alio unico itidem sphærico pro binis rectilineis, quod rem perficiat, quotiescumque impossibilitas non occurrit. Ante methodos hìc adhibitas tentaveram alias vias adhuc in immensum complicatiores, quæ indigebant curvis duplicis curvaturæ. Illud enim primum se objecerat animo, dum instrumentum convertitur circa axem AB, radium *Fh* habentem semper directionem eandem describere in superficie sphæræ, ad quam pertinent bini circuli instrumenti, curvam quandam, cujus concursus cum circulo DKEK' maximo ejus sphæræ debet determinare punctum *h'*. Diu pluribus methodis quæsivi eum concursum, sed nihil se mihi offerebat, quod non esset complicatissimum: nam ea curva est duplicis curvaturæ orta nimirum ab intersectione superficiei cylindri obliqui cum superficie sphæræ. Quærendo projectionem ipsius circuli in planum, in quo cylindri superficies describeret circulum, & is circulus ellipsim, concursus illius cum hac rem perficiebat: sed id ipsum erat magis complicatum, quam videretur debere exigi ab ejusmodi problemate, & novo ambitu opus erat ad determinandos arcus quæsitos in ipso circulo in superficie sphæræ.

62. Hinc alias tentavi vias ad inveniendum concursum superficiei cylindricæ cum eo circulo non per longiores calculos, algebrai-

braicos, quod est facile, sed molestum, verum methodo aliqua brevi & eleganti. Diu evagatus animadverti, posse evitari motum radii cylindricum concipiendo instrumenti conversionem circa rectam GI, quæ semper potest reduci ad sedem priorem. Id mihi statim exhibuit solutionem paragraphi II accuratam, ex qua profluxit solutio tertii per differentias.

63. Inventis iis solutionibus putabam, me multum profecisse: nunc, inventâ hac novâ adeo magis ad rem idoneâ, tot evagationum me pudet. Id mihi sæpe accidit: methodi simpliciores postremæ omnium se offerunt. Adhuc tamen ea, quæ hìc prolata sunt, possunt esse utilia ad exercendam Geometriam, & perspiciendam intimius vim methodorum. Novam methodum persecutus sum alio breviore, & simpliciore Opusculo, quod habet aliqua huic communia. Ipsum huic præmisi, hoc adjecto, quod censeo posse adhuc esse nec inutile, nec injucundum iis, qui geometricis perquisitionibus delectantur.

64. Illud unum hìc iterum monebo, quod & num. *6* indicavi, binos circulos hìc consideratos esse, ut meros tenues circulos. Revera ipsi inscribuntur in medio annulorum crassiorum, qui impediunt umbrâ suâ transitum radii per foramen in æquinoctiis toto die, & quavis die prope meridiem. Hæc secunda jactura nullius est momenti, cum jam prope meridiem problema, ut vidimus, sit *impossibile*, & omnia *hujusmodi instrumenta*, quæ *adhibent solis altitudines ad determinandas horas*, *non possint tuto adhiberi prope meridiem*, *ubi altitudines longo tempore* parum admodum mutantur. In æquinoctiis, & prope ipsa satis est, foramen F (fig. 1) removere a loco debito per intervallum æquale dimidiæ crassitudini annuli, & excipere radium non in circulo medio, sed in margine ex ea parte, versus quam foramen est retractum: res eòdem redibit, & umbra non officiet.

65. Posset inquiri in errores, quos parit collocatio indebita foraminis non accurate respondentis declinationi solis, vel suspensionis non accurate respondentis latitudini loci: sed hìc proposui determinandum solum effectum refractionis imminutæ a parallaxi, quod præstiti fusius, quam oporteret. Superesset applicatio nu-

merorum ad aliquot casus, quam illi alteri novo Opusculo reservavi simpliciori. Innuam duo tantummodo; primo quidem errorem temporarium plerumque esse perquam exiguum, sed aliquando etiam Parisiis, sole horizonti proximo, excedere quatuor minuta temporis: 2° formulam generalem nova methodo inveniri eandem quam hìc inveni; tantummodo methodum, qua eruitur, faciliorem esse, & simpliciorem, ac valere æque pro omnibus casibus, in quibus non nimis acceditur ad limites impossibilitatis.

EXTRAIT

DU TOME IV.

1. Le sujet de ce Volume est la vérification & rectification des principaux instruments, qui sont en usage en Astronomie : il contient 18 Opuscules ; mais beaucoup plus courts, que ceux des Volumes précédents : tous sont écrits en latin à l' exception d' un, qui l' est en françois, & il n' a pour objet aucun instrument particulier, mais une théorie générale appartenante à la Trigonométrie, qui avoit été employée dans plusieurs autres : ainsi cette pièce sert comme de pièce justificative.

§. I.

Des deux premiers Opuscules.

2. Dans le premier de ces deux Opuscules il y a la vérification des divisions d' un quart de cercle mural, dans le second de son plan : par la première on découvroit les erreurs, non pour les corriger dans l' instrument même, mais pour en tenir compte dans les observations, par la seconde on les découvroit de manière à pouvoir les y corriger en ajoutant la rectification à la vérification.

3. Pour le premier objet on y donne d' abord une légère idée de la méthode la plus sûre, mais très-incommode, sur-tout quand il s' agit d' une grande machine, comme ils sont les quarts de cercle muraux, qui ont ordinairement un grand rayon. Il y en a de huit pieds : celui, dont il s' agissoit dans cet Opuscule, en avoit six : la méthode indiquée est géodésique : la mesure d' une grande base faite en pleine campagne, avec celle des parties d' une ligne droite perpendiculaire tirée d' un bout de la même base, le centre de l' instrument étant placé à l' autre bout, don-

ne la valeur des tangentes des angles marqués par l' alidade, qui porte la lunette : on peut faire de cette manière d'abord la vérification des premiers 45 degrés, & après des 45 suivans ou de chacun des trois arcs de 30.

4. Mais ici il y a la méthode de faire cette vérification dans l' Observatoire même. On pourroit la faire en comparant les cordes de tous les arcs avec une règle bien divisée ; mais pour avoir la totalité de chaque corde exacte il faudroit avoir une règle de cette espèce, & *la vérifier elle-même*. La méthode proposée ici n' employe, que *les seules différences* des arcs qui devroient être égaux comparés immédiatement, ou par leurs cordes: comme ces différences sont toujours bien petites, il est beaucoup plus aisé d' en déterminer la quantité précise avec toute l' exactitude à l' aide d' un, ou de deux micromètres appliqués à une règle.

5. Il y a la manière de former ce micromètre à vis, de trouver la valeur des parties d' un tour entier de la même vis par rapport aux secondes de l' arc circulaire, d' appliquer la règle selon un ordre convenable. On commence par voir si tous les rayons de l' arc circulaire, qui étoit tracé en entier, les divisions y étant pratiquées par des petites lignes transversales, étoient égaux, & ils se sont trouvés tels ; mais il a fallu auparavant s' assurer de la position du centre du trou cylindrique, autour du quel devoit tourner le cylindre convexe attaché à l' alidade : il y a la méthode pour s' en assurer à l' aide d' un autre petit cylindre employée à cet usage avec un petit point marqué sur sa surface, & la méthode pour employer ce petit cylindre comme il faut pour avoir la mesure cherchée.

6. On a commencé la détermination des petites différences par celle du premier rayon comparé à la corde de 60°, le micromètre donnoit la différence de la corde fautive à la vraie, & on en tiroit celle de l' arc par le théorème suivant : *la différence de la corde est à la différence de l' arc, comme le co-sinus de la moitié de l' arc au rayon, ou comme le rayon est à la sécante de cette moitié*. On a déterminé la différence des cordes des deux [illegible]

de 3[illegible],

de 30°, ce qui a donné la différence des arcs mêmes : après on a comparé la corde du dernier arc de 30 avec les cordes précédentes depuis les cordes des arcs de 15 entr' eux, & celle de cinq. La différence des arcs se tiroit de la différence des cordes par le susdit théorème. Quand la division est faite par des points, il peut arriver beaucoup plus facilement qu' il y ait quelque petite différence des distances du centre des différents points, qui par le microscope deviennent des petits cercles, au centre du point central, & alors il faut tenir compte aussi des différences des rayons terminés aux deux bouts des arcs, ce qui vient en usage dans un des Opuscules suivants. Pour avoir la différence des arcs petits, comme de chaque degré, il y avoit une autre espèce de micromètre externe, qui est exposé dans le même Opuscule, qui pouvoit servir aussi pour comparer immédiatement entr' eux les arcs mêmes & en avoir la différence.

7. Quand on a eu la différence des arcs, qui devroient être égaux, on trouve d'abord l'erreur de chaqu' arc en particulier, & ensuite la table des erreurs de tous les arcs, dont chacun commence par zero, & termine à un nombre de degrés quelconque : mais dans chaque arc, qui est un de la subdivision d'un autre, il faut distinguer deux erreurs, dont la somme, ou la différence forme son erreur absolue. J' appelle la première *dérivée*, parcequ' elle dérive de celle du total, dont toutes les parties participent *également prorata de leur nombre*, & *l'autre je l'appelle propre : c' est celle qui provient de l' inégalité des parties* entr' elles. Il y a un beau théorème pour l'évaluation de l'erreur propre tirée de ces différences : après il y a l' ordre pour employer toutes les erreurs derivées avec les propres pour obtenir les erreurs absolues de chaque arc, & l' ordre pour tirer de ceux-ci les erreurs des arcs entiers qu' on doit mettre dans la table, sans multiplier les erreurs par la somme d'un grand nombre des parties, qui doivent former ce total. Tout cela est assez détaillé dans l' Opuscule.

8. Le second Opuscule employe toutes les figures de la Planche I. Les grands quarts de cercle, comme ceux qui sont destinés à être muraux, n' ont pas une plaque continue à pouvoir

voir examiner si elle est exactement plane par l'application d'une règle bien droite en tout sens : ils ont un limbe de quelques pouces de largeur, qui porte les divisions, & l'alidade qui porte la lunette tournée autour d'un cylindre, dont l'axe passe par un point, qui doit être dans le même plan avec tous les points de la division de ce limbe. Celui que j'examinois avoit (Tab. I fig. 3) dans l'angle C une plaque de laiton percée par un trou cylindrique : l'alidade avoit son petit cylindre qui entroit dans ce trou, & on pouvoit l'en ôter : le limbe étoit aussi de laiton attaché par des vis à des supports fixés sur le limbe de la machine, qui étoit toute de fer : on pouvoit l'éloigner un peu de chacun de ces supports en relâchant les vis, & en interposant des petites plaques minces entre les deux. Il falloit trouver le moyen pour voir si tous les points de la division du limbe étoient exactement dans un même plan, qui devoit aussi passer près par le centre du trou de la plaque centrale, & de combien ils s'en éloignoient, pour corriger les erreurs.

9. La première idée, qui me s'étoit présentée à l'esprit, est exposée à la fin de l'Opuscule; parcequ'elle n'a pas réussi à cause de la multiplicité des pièces dont la machine étoit composée, & qui étoient unies par des vis, ces pièces n'ayant pas l'immobilité respective, que par l'immobilité du total de la même machine. J'avois placé le quart de cercle ACB (*fig.* 10) dans la position horizontale à l'œil avec un canal GFED de bois rempli d'eau : on voit sa forme à la *fig.* 12 : on y mettoit le petit bateau de la fig. 11, avec le petits mâts CD, qui par les règles DD' de la fig. 12 empêchoient le bateau de s'approcher des bords EE', où la surface de l'eau n'est pas assez bien horizontale : un fil d'archal EFG descendoit avec la pointe G très-près du limbe DEF. Ce point restoit toujours dans le même plan horizontal : on déterminoit sa distance au limbe à l'aide d'un que j'appelle *coin micrométrique*, qu'on voit à la fig. 1, & dont je détermine les épaisseurs à marquer sur sa face AC en le faisant entrer entre les branches d'un compas de proportion de la fig. 2 ouvert entre le nombre 100 à une ouverture donnée.

conçoit un plan qui passe par la plaque C, & par deux points éloignés du limbe. Ayant par ce coin la distance du point G de la fig. 11 à la plaque & à ces deux points on trouve aisément par un calcul trigonométrique, & même assez exactement par une construction selon la méthode exposée sur les figures *6*, & 7 la distance que tout autre point du limbe devroit avoir de la pointe G de la fi. 11 pour être dans un même plan avec celui qui passe par la plaque, & par les deux autres points : la différence de ce qu' on trouve par ce moyen à ce qu' on a trouvé par le coin micrométrique est l' erreur, qu' on doit corriger pour réduire le limbe à un plan exact, qu' il n' est pas nécessaire que soit horizontal : il suffit qu' il soit un plan, ce qu' on obtient par ce moyen.

10. Pourtant j' ai considéré encore un autre plan. Comme on ne pouvoit pas ni enfoncer les parties du limbe convexes, ni les limer pour ne pas effacer les divisions déjà tracées, j' y ai imaginé un plan, qui étoit également éloignée des deux bouts du même limbe, & qui le touchoit dans sa partie la plus courbée en dehors, & j' ai trouvé les distances de chaque point de la division à ce nouveau plan, ce qui exigeoit les seuls déplacements en dehors, & le minimum de tous les nécessaires de cette espèce.

11. J' avois déterminé tout, quand par le soupçon de quelque dérangement des pièces qui auroit été produit par le changement des points d' appui, j' ai changé de place les soutiens de la grande machine, & j' ai trouvé en effet tout changé : même la concavité dans quelques endroits étoit devenue une convexité, & viceversa. Il a donc fallu changer de méthode. J' ai placé la machine dans la position verticale, dans laquelle elle devoit être employée sans en être plus déplacée. Alors j' ai tendu un fil de soye obliquement, comme on voit dans la fig. 3, en DE, qui ne pouvoit être courbé par son petit poids, que dans le plan vertical : j' en ai fait sortir un autre CF du centre C, & je l' ai éloigné un peu du premier fixe par l' interposition du coin micrométrique *abcd* : en retirant celui-ci vers sa partie la plus épaisse, j' ai approché ce fil à peu-à-peu jusqu' à l' attouchement. J' ai marqué

qué alors la distance de ce second fil au point du limbe, qui étoit donnée par l'épaisseur du même coin. En promenant ainsi ce second fil par tout le limbe j'avois un plan tracé par le fil même, & je trouvois la distance des points du même limbe à ce plan, ce qui revenoit à ce même que j'avois eu par rapport au plan horizontal marqué par le point G de la fig. 11; parcequ'il suffit de rapporter les points du limbe à un plan quelconque pour avoir tout de la manière indiquée. J'ai fait corriger tout par l'interposition des petits morceaux de plaques, & en promenant le fil réduit à une position également éloignée du centre & des deux bouts, j'ai trouvé par tout la même distance, ce qui a fait voir, que toutes les parties du limbe étoient réduites à un même plan avec le centre.

12. Dans la fig. 9 il y a une autre manière de tendre le fil fixe hors de toute la grande machine, & appliquer le coin micrométrique pour comparer le point du limbe avec le plan dessiné par le fil mobile: mais il faut voir le détail de tout cela dans l'Opuscule même.

§. II.

Des Opuscules III, & IV.

13. DANS l'Opuscule III il y a la méthode pour vérifier la collocation du quart de cercle mural & la corriger: on y a aussi pour cet effet la manière de déterminer le point du limbe qui marque la position de la lunette dirigée au zénith, ce qu'on ne peut pas y avoir par la conversion du même limbe. Lorsqu'on a trouvé celui-là, & qu'on connoît l'erreur de l'arc entier de 90 degrés, on trouve aisément aussi le point qui détermine la position dirigée à l'horizon: mais il y a une méthode particulière pour avoir ce second immédiatement en regardant un objet assez éloigné & élevé un peu au dessus de l'horizon, & elle est le sujet de l'Opuscule IV.

14. Si le limbe du quart du cercle mural & placé tout dans un plan, & l'alidade qui porte la lunette tourne de manière aussi

de son centre qu'elle touche toujours le même limbe ; l'axe de la lunette prolongé jusqu'à la surface de la sphère céleste y doit parcourir un quart d'un cercle : ce cercle devroit être un grand cercle, & nommément le Méridien. Il sera bien un grand cercle, si l'axe de la lunette est perpendiculaire à l'axe de son mouvement circulaire : mais si cet axe ne l'est pas, le cercle sera plus petit : la différence de l'angle de ces deux axes à un angle droit sera la première erreur de cette collocation : mais la collocation peut avoir deux autres erreurs. Le plan vertical, qui passe par l'axe du mouvement circulaire devroit être dirigé vers l'Est, & l'axe même être *horizontal*, pour faire que le cercle parcouru par l'axe de la lunette soit le Méridien. La déviation de ce plan vers le Nord ou le Sud est la seconde erreur, & l'*inclinaison* de cet axe à l'horizon est la troisième. Il s'agit de découvrir ces trois erreurs & de les corriger.

15. Ces erreurs peuvent se trouver aussi dans l'instrument des passages, les deux derniers peuvent se trouver encore dans la ligne méridienne, qui doit marquer le midi par l'ombre ou le rayon d'un gnomon, la machine parallatique aussi peut avoir des erreurs de cette espèce. On trouvera quelque chose de commun dans les Opuscules, qui appartiennent à ces instruments sur les méthodes employées pour déterminer ces mêmes erreurs, mais beaucoup aussi de différentes manières, & de formules différentes. *Pour ici on y trouve deux méthodes, & deux systèmes de formules, qui donnent la solution de ces mêmes problêmes.*

16. La première manière employe certaines formules différentielles, dans lesquelles il y a la connexion des petits compléments des deux côtés d'un triangle sphérique peu éloignés de 90°, & des deux angles opposés à ces côtés. L'Opuscule commence par la démonstration de ces formules, & on trouve les formules mêmes au num. 4 : c'est une petite branche d'une théorie différentielle de Trigonométrie, qu'on trouve développée en entier dans l'Opuscule XV de ce *Volume*. La *fig.* 1 de la planche II sert pour la démonstration de ces formules-ci. Pour leur application on employe trois erreurs du passage de trois fixes par le Méridien données

par la lunette, qu' on détermine par les hauteurs correspondantes, qui donnent le vrai moment de ce passage. Dans la fig. 2 le Méridien est AZPB, qui passe par le zénith Z, & le pôle P, AOB le demi-cercle oriental de l' horizon, S, S', S'' les trois lieux des trois fixes arrivées à l' axe de la lunette : les trois erreurs du passage par le Méridien sont trois angles ZPS, ZPS', ZPS'': E le pôle du cercle, qui passe par S, S', S'' vers lequel est dirigé l' axe du mouvement circulaire de la lunette à la place d'être dirigé vers le point oriental O. La première erreur est la différence de l' arc ES à un quart de cercle : si l' on conçoit l' arc du grand cercle ED perpendiculaire à l' horizon, OD est la seconde erreur, ED la troisième. Les trois erreurs ZPS, ZPS', ZPS'' données par les observations faites avec l' instrument donnent ces trois erreurs de l' instrument même par l' application de ces formules.

17. A' la figure 3 il y a une manière plus simple de trouver les deux erreurs dernières de l' instrument, quand on a déjà trouvé la première, ou qu' on l' ait corrigée. La figure 4 sert pour la seconde méthode, qui fait tout sans avoir besoin d' aucune espèce de formules différentielles : on y conçoit la rencontre des arcs ES, ES', ES'' prolongés s' il le faut, jusqu' au Méridien en M, M', M'', & les arcs OI, OI', OI'', qui ont pour pôles ces trois points, & sont terminés aux arcs EM, EM', EM''. On prend les petits arcs de la figure EDOII'I'' pour des lignes droites : tous ces points restent dans la circonférence d' un cercle, qui a OE pour diamètre, & la solution du problême est donnée par la belle propriété du quadrilatère inscrit dans le cercle, que le rectangle des deux diamètres y est égal à la somme des deux des côtés opposés.

18. Au num. *26* on a dans un scholie toutes les dénominations & toutes les formules finales pour les deux systèmes des valeurs tirées de ces deux solutions : on y voit le tout d'un coup d'œil, & ce scholie peut servir seul pour un extrait de ce qui vient en usage pour la pratique. Dans le scholie suivant il y a la manière de corriger ces erreurs par des mouvements qu' on donne à

regardant une planchette, qu' on place à une distance connue, par *des fils à plomb* suspendus à des pointes attachées à différents points de la machine même du quart de cerçle, par des observations des fixes près du zénith, & par d' autres moyens. Il y a dans un autre la méthode de déterminer le point du limbe, qui répond à *la position verticale*, en déterminant la distance au zénith d' une fixe par un instrument, qu' on peut tourner pour avoir la conversion, comme un grand secteur, méthode que j' avois proposée, & fait exécuter à Vienne avec tout le succès. A' la fin il y a une simple indication de la méthode pour avoir aussi immédiatement la détermination du point qui répond à la position *horizontale*, ce qui est le sujet du Mémoire suivant.

19. Dans l' Opuscule IV il y a cette méthode. Elle se réduit à regarder un objet D (Tab. II fig. 5) avec la lunette ABB'A' du quart de cercle mural par les rayons DH, DI, DH' réflechis dans la surface horizontale NN' de l' eau d' un bassin placé près de la même lunette, qui entrent dans celle-ci par les points L, C, L' de l' objectif, & en sont renvoyés au foyer F, parmi lesquels ICF qui passe par le centre du même objectif, conserve sa direction dans ce passage: on le regarde après directement par O'F'D. Le mouvement de l' alidade avec la lunette se fait autour d' un point G, les deux directions OFI, O'F'D se coupent en P, & les deux perpendiculaires GT, GT' tirées sur ces directions sont deux rayons d' un cercle. Si le point D étoit dans un très-grand éloignement, on pourroit considérer les deux lignes PD, ID comme parallèles: l' une des deux seroit autant élevée au dessus de l' horizon, que l' autre déprimée au dessous, & alors le point de la position horizontale seroit au milieu des deux déterminés par l' alidade: mais dans l' endroit, où je me trouvois, on ne pouvoit employer qu' un objet terrestre pas trop éloigné. Il a fallu déterminer l' angle PDI, qui est une espèce de parallaxe, & en tenir compte. Cet angle est la différence des deux positions marquées par l' alidade: pour en tenir compte il y a une petite formule très-simple au num. 12. Mais pour pouvoir employer cette méthode il faut, que le lieu s' y prête: s' il n' y a

 vers

vers le midi à une distance suffisante un objet peu élevé sur l'horizon, & une ouverture dans le mur placé à propos, on ne peut pas s'en servir.

§. III.

Des Opuscules V, & VI.

20. L'Opuscule V a pour objet la courbe qui depuis long-temps est en usage pour tenir en équilibre un pont-levis, appliquée à la lunette du quart de cercle mural, & le suivant la collocation & vérification d'un grand instrument vertical, & horizontal à la-fois, dont on a détaillé les grands avantages dans le dernier Opuscule du Tome II, & on en fait une énumeration au commencement de celui-ci.

21. A la fig. 1 (Tab. III) la droite CF' représente le plan de ce pont, qui en tournant autour du point C va de la position horizontale CG à la verticale CE', & moyennant la corde F'E'M'N' est retenu en équilibre par le poids N', qui descend par une courbe concave M'N'K', & en descendant va en perdant de sa force respective par la direction de la courbe, qui s'approche toujours plus de la position horizontale; comme le pont moins incliné en exerce aussi moins à mesure qu'il monte. On avoit déjà donné la construction de cette courbe au commencement de ce siècle, & son équation algébrique. J'en ai fait l'application pour soutenir en équilibre la lunette du quart de cercle mural de l'Observatoire de Milan, qui étant de métal étoit bien lourd. La corde la prenoit dans son milieu en F, sa moitié étant représentée par la droite CF: le contre-poids Q attaché en N d'une manière particulière exprimée dans les figures 5, 6, 7, & expliquée avec toute l'étendue nécessaire dans cet Opuscule, obligeoit ce point à parcourir la courbe convexe MNK de la fig. 5, qui est de la même nature, que la MNK de la fig. 1, & retenoit la lunette en équilibre par le moyen de la corde FGMN, tandis qu'elle montoit de la position verticale CE à l'horizontale CG.

22. Une différence essentielle des deux applications est, que dans

vis que la force du pont au commencement de sa montée pour aller de CE en CG est la plus grande, & diminue à mesure que celui-là monte, la lunette au commencement en CE ne fait point de force, mais elle en fait après toujours plus à mesure qu' elle monte pour aller en CG : cela exige pour le pont une courbe concave, où le contre-poids a la plus grande force en M', qui diminue dans la descente, & pour la lunette tout au contraire la courbe doit être convexe, où le contre-poids n' exerce en M point de force : il en fait après, & elle augmente dans la descente : ainsi il étoit bien facile de faire descendre le poids N' avec la corde M'N' droite, & sans aucun frottement avec la courbe; mais il paroissoit assez difficile d' obtenir la même chose pour le poids Q, sans faire aller la corde sur la courbe même depuis M jusqu' en N. Il y avoit un moyen de l' obtenir en employant une verge de fer de la forme MNK avec un anneau; mais il y restoit de la difficulté : quand à la fin j'ai trouvé le moyen de faire descendre un petit char N sur deux petits canaux S, S' de la fig. 7, entre deux planches de la fig. 5 de manière à obliger le point N à parcourir la courbe MNK déterminée géométriquement selon les loix de la Méchanique pour obtenir l' équilibre, qu' on devoit avoir : mais pour le bien comprendre il faut voir tout le détail qu' on trouve dans l' Opuscule même.

23. Pour ce qui est de la nature de la courbe il paroîtroit, *que celle du pont devroit être de la même nature que l' autre pour la lunette, & même sa continuation*, comme le mouvement du point F' par GF'E', est la continuation de l' autre F par EFG : la construction géométrique que je trouve pour celle-ci est assez analogue à l' autre qu' on avoit déjà pour l' autre : pourtant l' équation de la courbe pour le pont est du quatrième degré, & l' autre pour la lunette est d' huitième : on voit bien dans l' Opuscule l' analogie des deux constructions, & la différence des équations, comme aussi la source de cette différence. Je donnerai ici seulement la description de la courbe pour la lunette qui répond au cas de l' égalité du contre-poids avec le poids de la même lunette; l' inégalité porte du changement dans la construction.

24. Cet-

24. Cette construction est très-simple. Ayant fait le quart de cercle MFG (fig. 2) avec sa corde MG, on tirera un sinus FR quelconque: avec le centre G, & le rayon GF on trouvera dans la corde le point L: avec le centre M & le rayon ML on trouvera dans le sinus le point N: celui-ci sera à la courbe MNG cherchée. Pour faire monter la lunette de la position verticale à l'horizontale il suffit cet arc ainsi déterminé par les points F du quart de la circonférence: mais la courbe déterminée par la construction entière dépendamment de toute la circonférence du cercle est dessinée dans la fig. 3, & sa continuation entière est MNGT*n*'EN''GM''*g*N'''*en*'''*tg*N'M*n*M'*n*M. Parceque chaque ligne RF rencontre le cercle, qui tout entier est un lieu géométrique, en deux points F, & *f*: avec le centre G & le rayon GF on trouve dans la corde deux points L, & L', & avec le même centre & le rayon G*f* on en trouve deux autres *l*, & *l'*, qui déjà sont quatre: avec le centre M & le rayon terminé à chacun des points L, L', *l*, *l'* on en trouve dans la ligne F*f* prolongée indéfiniment deux si ce rayon est plus grand que l'abscisse MR, un en R s'il est égal, & s'il est plus petit on n'en trouve aucun: ce dernier cas répond dans l'équation d'huitième degré à deux racines imaginaires, le précédent à une racine double, le premier à deux racines réelles. Chaque abscisse en a ici au moins quatre réelles: il y en a de six, & les petites abscisses, comme MR de cette figure, ont ici huit ordonnées réelles.

25. Dans la fig. 4 on a une construction très-peu moins simple pour quelconque rapport du poids, & contre-poids inégaux. Ces constructions, la comparaison des constructions, & équations de ces deux courbes, le développement des différents cas avec la distinction des possibles, & impossibles, qui rendent même des branches de la courbe imaginaires, tout cela forme une pièce intéressante même pour la Géométrie, & l'Analyse, tandis que la courbe même est utile pour la pratique: je l'ai fait exécuter à Milan, où on faisoit monter, & descendre le poids lourd de la lunette sans la moindre difficulté avec deux doigts.

26. L'Opuscule VI donne la description de l'instrument vertical

tical & azimuthal, la manière de placer le total de la machine, la manière de faire les divisions d' un grand cercle horizontal de la dernière exactitude indépendamment de toute adresse d' un artiste, de placer un grand quart de cercle vertical, & de le rendre mural en tout sens : on en donnera ici une légère idée.

27. MN (Tab. IV fig. 1) est une grosse barre de fer verticale avec la traverse horizontale OP en forme de croix, & deux obliques RO, RP pour fortifier cette seconde. ACB est un grand quart de cercle, qui est suspendu en O, & P, comme un cercle mural par deux soutiens, & appuyé seulement à une vis horizontale, qui traverse la barre verticale à la hauteur du limbe AB, & lui donne un appui par derrière de manière à pouvoir le pousser un peu en dedans, & dehors, & réduire son plan à une position exactemeut verticale. Elle n'est pas indiquée à la fig. 1; mais on la voit en QP (fig. 9) où elle traverse la barre MN en R, & donne l'appui à la règle ou plaque AB, qui doit appartenir à la machine du quart de cercle derrière le limbe. Les soutiens à attacher en O, & P sont de la forme l'un de la fig. 7, l'autre de la fig. 8. La partie ECABDF du premier est fixée sur la barre traverse en O, & la partie MGHIKLN sur les barres du derrière de la machine du quart de cercle, qui reste appuyé sur ce soutien par la seule pointe I. La partie CSTD du second soutien de la fig. 8 est aussi fixée sur la traverse de la fig. 1 en P: elle a la pièce ECABDF pareille à celle de la fig. 7, mais ici elle peut être élevée & baissée par la vis QR avec la partie MGHIKLN pareille à l' autre de la même fig. 7, qu' elle soutient, & qui est fixée de même sur les barres de la machine du quart de cercle: par ce moyen on donne la position horizontale au côté AC de la fig. 1.

28. La barre verticale est appuyée en bas sur la cavité d' une pièce de métal, & peut encore entrer dans un petit trou cylindrique en touchant son fond par un point de sa convexité. Comme il faut donner un mouvement circulaire à la barre verticale chargée de tant de poids pour diriger le plan du quart de cercle vers un point quelconque de l' horizon; on peut rendre moins diffi-

difficile ce mouvement, & diminuer le frottement, qui useroit trop le fond en M, en soutenant cette machine si lourde par un contre-poids S d'un poids un peu moindre suspendu par une corde, qui monteroit jusqu'à une poulie attachée à des barres de fer fixées sur les murs de l'Observatoire de manière à soutenir par-dessus sur une pointe le toit tournant. La corde après un demi-tour sur la poulie en descendant par TN soutiendroit le poids de toute la grande machine sans en empêcher le mouvement autour de l'axe de la barre verticale, parceque la corde peut se plier, & replier en elle-même pour un demi-tour en un sens, & un autre en sens contraire sans se dissoudre.

29. On voit l'espèce de base formée par les barres verticales *ab*, obliques *d*, avec les plaques en *c*, qui forceront la grande barre MN à conserver la position verticale, qu'on peut lui donner en faisant mobiles deux plaques en *cc*, par deux vis dans deux directions du Nord au Midi, & de l'Orient à l'Occident, & il est aisé de concevoir, comment par de fils à plomb suspendus sur des pointes attachées à la même barre, & par le mouvement circulaire de la machine autour de son axe on peut lui donner la position verticale exacte, & la vérifier quand on veut.

30. Des barres horizontales II avec les verticales IH peuvent soutenir en HH une grande bande circulaire horizontale, comme un horizon de la sphère armillaire, qui aura les divisions, sur lesquelles l'alidade DE soutenue en équilibre par le contre-poids G marquera les azimuths, tandis que la lunette du grand quart de cercle vertical donnera les hauteurs des astres de manière, que par une observation momentanée on aura le lieu de l'astre déterminé, comme d'une comète, sans attendre une fixe pour lui la comparer, ce qui est un des grands avantages de cet instrument énoncés sur le commencement de cet Opuscule.

31. Dans la fig. 2 ABBA est une partie de la base circulaire du limbe, où la moitié AEEA de sa largeur sert pour y placer 24 plaques de la forme (fig. 3) MNOPP'O'N'M', dont chacune doit avoir dans sa surface supérieure MM' un point I, qu'on voit aussi à la fig. 2, pour avoir une division de 15 en 15 de-

grés par 24 de ces points. On ne voit dans cette figure que sa surface, qui répond à MIM' de la fig. 3, & la surface DD, FF de deux pièces, dont la forme à la fig. 3 est MAQPONM, qui serrent en ON, O'N' ces plaques, étant serrées elles-mêmes contre le limbe QA'E'Q' par deux vis DD', FF': celles-ci étant rélâchées laissent la liberté de mouvoir la plaque avec la division I de la fig. 2 à droite & à gauche. On expose dans l'Opuscule, comment on peut placer la première de ces divisions exactement vers le Nord, en suivant une fixe circompolaire jusqu' à sa plus grande élongation d'un côté & d' autre, & en y plaçant à l' aide de l' alidade DE de la fig. 1 une de ces plaques de chaque côté pour en placer après une autre *bien au milieu* à l' aide d' une seconde alidade postiche: la forme de celle-ci est *indiquée à la fig.* 4: elle doit être attachée provisionnellement en AL à la barre MN de manière à pouvoir *la* faire tourner-autour d' elle circulairement, & l'approcher ou *l'éloigner* de l'autre, autant qu' il est nécessaire, comme *ici à la moitié de l'* intervalle des deux plaques susdites: *par ce moyen on pourra placer* la plaque intermédiaire exactement à *la même distance des deux* autres. Après avoir fixé cette plaque, & *ôté les* deux précédentes, on pourra en placer une autre exactement au Sud en portant la seconde alidade à une position estimée diamétralement opposée à la première: *par une demi-révolution* de la barre MN de la fig. 1 on trouvera *la différence* de sa position *à la diamétralement* opposée, & *à la fin* on arrivera à l'*exactitude* de cette position.

32. Il est bien aisé de concevoir comment à l'aide des deux alidades on peut placer deux autres divisions exactement au milieu entre les deux précédentes d'un côté & d' autre pour avoir les quarts de la circonférence; au milieu de chaque binaire déjà placé on en placera quatre, qui donneront la division en arcs des 45°, & à la fin deux dans chaqu' intervalle, qui la donneront en 15°. Ainsi *l'Astronome* formera par lui même la division exacte, & s'en assurera sans avoir besoin que d'un ouvrier médiocre, qui sache bien limer les pièces, & y imprimer des points nets.

33. La subdivision des 15 degrés sera faite dans un arc GOOG de

de la fig. 2, qui sera attaché à la première alidade, & celle seule restera après la division achevée pour avoir la mesure des azimuths sur le grand cercle horizontal. On y voit les 15 points de cette subdivision sur l'arc *ab* de la même fig. 2. À la fig. 5 & 6 on a des pièces appartenantes à un micromètre, qui par la méthode expliquée dans l'Opuscule donnera la mesure des arcs intermédiaires poussée jusqu'aux secondes. Il y a des petits instruments qui donnent les hauteurs, & les azimuths à la fois; mais un en grand susceptible d'une exactitude poussée jusqu'aux secondes seroit d'une utilité immense pour l'Astronomie.

§. IV.

Des Opuscules VII, & VIII.

34. Le premier de ces deux Opuscules a pour objet les erreurs qu'on trouve généralement dans la position des axes des quarts de cercle, & des sextants qu'on employe en Astronomie, & qui empêchent ce qu'on appelle *caler l'instrument*, pour en déterminer la position, & la quantité: la méthode y proposée doit être très-utile pour diriger les Artistes, qui n'avoient pas des règles fixes pour celà, à ce que j'en fus assuré dans le temps par M. Cannivet, qui avoit fait le sextant de six pieds pour l'Observatoire de Milan défectueux de ce côté-là: pour chaque observation il falloit toucher les vis du pied. Dans l'Opuscule VIII il s'agit de vérifier les divisions du même sextant; la méthode est presque tout-à-fait la même que pour celles du grand quart de cercle dans l'Opuscule I.

35. Pour la forme du sextant pareil à celui, pour lequel j'ai fait cet Opuscule VII, on peut la voir dans l'Astronomie de M. de La-Lande: ici ses pièces ne sont qu'indiquées par des simples lignes à la fig. 1 (Tab. V). On y voit les quatre vis du pied, un axe LG vertical, le second horizontal GF: celui-ci doit être exactement perpendiculaire au premier, & au plan ACB du sextant, qui en tournant autour de cet axe présente différents points D de son limbe divisé AB au fil à plomb CP: & on y a par

une

une lunette parallèle à son rayon AC les distances au zénith, & par une autre, qu'on y place perpendiculairement à la première les hauteurs sur l'horizon.

36. On réduit l'axe ILH à la position verticale par le moyen des vis du pied, & si l'axe GF étoit exactement perpendiculaire tant à l'axe GI qu'au plan ACB, on donneroit aisément la position verticale au premier axe de la manière suivante : on réduiroit l'axe GF à une position parallèle à la direction TS de deux des vis du pied, ce qui donneroit au plan la direction perpendiculaire à celle-là, c'est-à-dire celle des deux S, R : on réduiroit ce plan à être vertical dans cette position en réduisant par le moyen de ces vis le fil CP au simple attouchement du limbe vers son milieu. En tournant l'axe GF autour de LG jusqu'à lui donner la direction des vis S, R on réduiroit de la même manière ce même plan à la position verticale par le simple attouchement du fil CP avec le limbe. L'axe IG par cette double opération seroit réduit à la position verticale, & l'axe GF seroit horizontal. Dans toute autre position de celui-ci, en le tournant autour de l'autre, & en tournant le plan ACB autour du même axe horizontal, de manière à faire répondre le fil à plomb à un point quelconque de la division du limbe, on auroit toujours le même plan dans une position verticale indiquée par le simple attouchement libre du fil à plomb avec le limbe, ce qui est nécessaire pour avoir la mesure exacte de l'angle, qu'on cherche : réduire l'instrument à cette position, cela s'appelle le caler. Quand l'axe GF n'est pas exactement perpendiculaire à l'autre axe & au plan du secteur, après avoir réduit le même plan à la position verticale par l'attouchement de son limbe avec le fil à plomb, le changement de position éloigne ce même fil du limbe, ou l'y colle d'une manière forcée, & l'un & l'autre défaut empêche l'exactitude de l'observation : on est forcé à toucher les vis du pied, & en attendant le mouvement des astres exige un autre mouvement de l'instrument, ce qui porte un nouveau dérangement : il faut perdre beaucoup de temps avant de pouvoir faire une observation exacte.

37. Il s' agit donc de déterminer la quantité de l' erreur de deux angles de celui du second axe avec le premier, & du même avec le plan de l' instrument. On ne peut pas avoir par une mesure immédiate avec exactitude ni l' angle de deux axes, qui ne sont pas deux lignes isolées, ni celui que le second axe attaché par derrière aux barres du chassis fait avec le plan. Je me suis servi de la mesure de la distance du fil à plomb au limbe dans six différentes positions de l' instrument, pour en déduire par la Géometrie les quantités cherchées. Je ne ferai qu' indiquer ici la méthode qui est détaillée dans l' Opuscule.

38. L' axe vertical LG porte en haut un petit cercle horizontal O, O', O'' divisé en degrés, où les azimuths sont marqués par un index, & l' horizontal GF à un bout circulaire *prq*, qui est fixé par des vis sur les barres, qui forment le chassis de l' instrument. En fixant l' axe GF, dans une position donnée par rapport au cercle azimuthal OO'O'', & inclinant un peu l' axe ILG pour détacher *le fil à plomb du limbe*, j' ai tourné le sextant de manière, che le fil à plomb répondoit au milieu du limbe, & en tournant l' horizontal à droite, & à gauche j' ai vu que le fil s' éloignoit plus ou moins du limbe jusqu' à ce qu' il arrivoit à le toucher dans deux positions bien éloignées: au milieu entre ces deux il étoit le plus détaché, & au de-là, & de-çà il s' y appuyoit trop y étant forcé. J' ai pris sa distance au limbe dans trois positions, une vers le milieu, & les deux autres où la distance étoit petite, mais telle à pouvoir être déterminée par un coin micrométrique, que j' avois fait de gros papier, & vérifié de la manière exposée au commencement de l' Opuscule II, en marquant les positions O, O', O'' par l' index. Ces trois distances m' ont donné par la solution du problême les deux petits angles, celui que l' axe premier IG un peu incliné contenoit avec une ligne verticale, & la différence à l' angle droit de celui que le même axe contenoit avec la ligne GQ perpendiculaire au même plan.

39. Pour les trois autres distances je les ai prises, ayant tourné le sextant autour du second axe GF fixé dans une position donnée

née par l'index sur un point O, & je les ai fait répondre successivement aux trois points du limbe o, 30°, & 60°: celle-ci par la solution du second problême m'ont donné deux autres petits angles, l'inclinaison du second axe à l'horizon, & son angle avec la ligne FN perpendiculaire au plan. J'en ai tiré la différence de l'angle des deux axes à l'angle droit: j'ai déterminé la direction de ces erreurs, & par un petit coin AIE (fig. *6*), dont l'angle a été donné par la solution de ce second problême, j'ai corrigé cette seconde erreur: pour corriger l'autre de l'angle des deux axes, il auroit fallu donner dans la construction même la liberté d'un mouvement respectif de l'un par rapport à l'autre, ce qui peut se faire aisément, & il conviendroit bien, n'étant pas aisé de les placer si exactement à angle droit, que dans la grande longueur du fil à plomb n'y reste dans aucune position de l'instrument tourné quelque distance au limbe, petite mais pernicieuse à l'exactitude de l'observation à cause d'une espèce de parallaxe produite par cette distance.

40. Ce que j'ai rencontré de singulier c'est, que tous les deux problêmes ont été résolus par la solution d'un même petit problême de Géométrie la plus simple qu'on y voit. Je n'ajouterai ici, que comme les mêmes défauts peuvent se trouver, & se trouvent très-souvent dans la position des axes d'un quart de cercle mobile, c'est la même théorie, qui peut servir pour les découvrir, & corriger.

41. Dans l'Opuscule VIII pour la vérification des divisions du sextant, j'ai ajouté à la détermination de la différence des cordes employée dans celle du grand quart de cercle à l'Opuscule I la détermination de la différence des rayons produite par des petites erreurs de la position des divisions faite par des points, qu'il est très-difficile de faire tomber exactement à la même distance au point central. On a à la fig. 1 (Tab. VI) ce qui appartient au passage de la différence des cordes BC, BA à celle des arcs, & ce qui appartient au même passage de la différence de deux rayons CB, CD comparés entr'eux à la fig. 2, & à la fig. 3 comparés à un autre CA = CB, que j'appelle rayon de ré-

du-

duction, avec lequel on peut comparer tous les autres. Mais il y a ici aussi la comparaison du premier rayon avec la corde de 60°, la distinction de l' erreur dérivée, & propre dans les parties des subdivisions, & un ordre meilleur dans la manière de tirer des erreurs absolues trouvées dans les arcs particuliers celles des arcs qui vont depuis zero jusqu' à un nombre de degrès quelconque, sans accumuler trop ces erreurs des sommes, & dans l' évaluation du nombre de celles, qui peuvent se rencontrer dans ces sommes.

§. V.

Des Opuscules IX, & X.

42. DANS l' Opuscule IX il y a une méthode pour trouver les erreurs produites dans la détermination de la distance au zénith, ou de la hauteur sur l'horizon donnée par un index, qui tourne avec la lunette d' un instrument des passages, sur les divisions d' un cercle dont le centre ne soit pas exactement dans l' axe de ce mouvement circulaire. Il y avoit dans un Observatoire de Paris un cercle assez grand pour pouvoir servir à cet objet, mais il avoit ce défaut. Il s' agit de trouver la direction & la longueur de l' excentricité CD (Tab. VI fig. 4), & après l' avoir trouvée, la correction, qu' il faut employer à l' angle marqué par l' index en un point A quelconque sur la division du cercle, qui donne l' angle ACE à la place de l' angle ADE, qui répond à la position de la lunette.

43. On trouve ces deux valeurs, c' est-à-dire la longueur, & la direction de l' excentricité CD dirigée à un point E du même cercle, de deux manières. La première en déterminant les arcs AB, AB' donnés par l' index pour trois fixes connues : par leurs déclinations on sait les arcs interceptés entre le lieu de l' arrivée au Méridien de la première & ceux des deux autres : ces arcs répondent aux angles ADB, ADB' : leur différence aux angles ACB, ACB' donnés par les arcs indiqués sur la division du cercle donne les formules, qu' on trouve dans l' Opuscule depuis le num.

jusqu'

jusqu' au num. 12, dont après on tire la correction cherchée. La seconde manière employe la différence des distances DA, DB, DB', qui ne sont pas égales entr' elles, comme les rayons du cercle CA, CB, CB'. On y fait voir comment on peut déterminer ces petites différences par un micromètre attaché à l' alidade de l' instrument & tournant avec elle. On en tire pour le même effet d' autres formules, qu' on y a aussi depuis le num. 21 jusqu' à 24. Il y a à la fin une manière de vérifier les divisions mêmes du cercle, pour en déterminer les erreurs, & en tenir compte dans les observations.

44. L' Opuscule est suivi d' une *Appendix* où l' on fait voir, que les mêmes formules peuvent servir pour trouver l' excentricité, & la position du grand axe de l' orbite d' une planète dans celle, qu' on appelle l' hypothèse elliptique simple, par trois longitudes héliocentriques qu' on détermine aisément dans les oppositions avec le soleil. Cette méthode ne donne pas une détermination exacte, cette hypothèse n' étant pas exacte: mais comme on en a donné la théorie dans plusieurs éléments d' Astronomie, & je me suis apperçu, qu' on pouvoit appliquer les mêmes formules, j'y ai ajouté cette application.

45. L' objet de l' Opuscule X est une recherche sur certaine source d' erreur, qui peut se rencontrer dans un grand secteur destiné à déterminer la distance au zénith des fixes, qui en sont *peu éloignées*, quand elles arrivent au Méridien, de la forme de ceux, qu' on a employés pour déterminer l' aberration de la lumière, & pour la mesure des degrés de Méridien. J' applique ici d' abord la recherche à la forme, dont je me suis servi pour ce second usage, & que j' ai proposée aussi dans l' Opuscule III du Tome II, où il y a pour rayon une longue règle verticale, & à la place du limbe circulaire une règle perpendiculaire droite, qui donne la tangente de l' angle cherché.

46. Le limbe rectiligne est PQ (Tab. VI fig. 5), le rayon devoit être la ligne DC perpendiculaire à la même PQ, & celle-ci parallèle à l' axe de la lunette. Dans la position inclinée de l' instrument dirigé alors vers la fixe le fil à plomb parti du point C

pas-

passant par un point H du limbe rectiligne PQ donneroit la tangente de l'angle DCH, qui seroit sa distance au zénith. Mais si ce rayon est un peu incliné sur le limbe en DI; à la place de cet angle on auroit l'angle DIH. Soit IE la ligne perpendiculaire: il s'agit de déterminer la différence de l'angle DIH à l'angle DCH en supposant connue la tangente DE de l'angle DIE = CDI, qui est la déviation du rayon, ou l'angle même, & la tangente DH. En tournant l'instrument le fil à plomb à la place d'aller en H sur le bras DQ, sur lequel tombe le point E, iroit en G du côté opposé, & on auroit pour correction la différence des angles DCG, DIG à la place de la précédente des angles DCH, DIH.

47. Quand on a la déviation CDI du rayon avec la tangente DH donnée en parties du rayon DC = DI pris pour unité, il est bien aisé de trouver les angles DCH, DIH par la Trigonométrie, & de même les angles DCG, DIG en sachant DG, pour former une table des corrections à appliquer à tout angle déterminé par la DH, ou DG considérée comme tangente de l'angle cherché: mais comme il s'agit d'une petite déviation, on peut trouver des formules, qui donnent les corrections cherchées, ce qui épargne la résolution de tant de triangles, & d'ailleurs donne le moyen de tirer des observations mêmes de quelques étoiles fixes faites avec l'instrument même la quantité de la déviation CDI, ou de sa tangente DE, qu'on trouve difficilement par d'autres méthodes, qui pourtant sont exposées dans le même Opuscule.

48. La recherche de ces formules est délicate, & il faut avoir de l'attention à ne négliger que des quantités de certains ordres, ce qui est détaillé dans l'Opuscule avec toute la précision. Voici la formule qu'on trouve à la fin. En faisant DC = DI = 1, DE = c, DH = b, on aura DIH — DCH = $b^2c - \frac{1}{2}bc^2$, qui est la valeur de la correction à ajouter ou ôter à l'angle trouvé par la tangente, selon que la valeur de cette formule sera positive ou négative: c'est la valeur de la correction en parties du rayon DC = 1: pour la réduire en nombre de secondes il suffit de la multiplier par 60 & diviser par 0,000261,

qui

qui est la valeur du sinus d' un arc d' une minute $= 60''$, & le même de la tangente, & par conséquent de l' arc, parceque ces valeurs ne diffèrent entr' elles que par des fractions inférieures. Mais la correction pour avoir l' angle DIG sera $- b^2c - \frac{1}{2}bc^2$, la valeur de DE $= c$ devenant négative, quand le point H va dans la direction opposée en G.

49. Je considère les variations de la valeur de cette correction, qui est toujours négative du côté de l' angle obtus IDG, & du côté de l' aigu IDH positive ou négative, selon que DH $= c$ est plus petite ou plus grande que 2DE. Elle étant négative du côté de G diminue toujours par l' approche du point G à D, s' évanouit en D, devient positive, quand le point G passe vers B en H, & H reste entre D & E, & d'abord augmente, devient à son maximum lorsque le point H arrive en E, diminue après, & s'évanouit, lorsque la DH devient double de la DE, & depuis passe à être négative en diminuant toujours selon l'expression de la formule : mais la formule s' éloigne de la valeur véritable, quand la DH n' est plus petite par rapport au rayon, sur laquelle petitesse on a fondé la suppression des quantités d' ordres inférieurs négligées pour trouver la même formule.

50. On a aussi l'application des nombres à cette formule pour un cas déterminé, dont on tire aisément la valeur pour les autres par la seule proportion des valeurs b, & c. Si l' on fait la déviation, qui répond à la valeur $c = 2°$, & l' angle DCH, qui répond à la tangente $b = 4°$; on trouve la correction pour le point H $= 35'',2 - 8'',8 = 26'',4$, & pour le point G $= - 35'',2 - 8'',8 = - 44'',0$. On y a la manière de trouver à la fois la déviation de l' axe de la lunette DF (fig. 6, & 7), & du rayon DI de la direction DC perpendiculaire au limbe par des observations de deux fixes, une beaucoup moins éloignée du zénith, & l' autre beaucoup plus, faites avec les deux positions opposées du limbe: il y a la détermination des formules pour les mêmes corrections pour un secteur à limbe circulaire P'DQ' (fig. 5): il suffit ici d' indiquer seulement tous ces objets.

§. VI.

Des Opuscules XI, & XII.

51. Dans l' Opuscule XI, il y a la vérification de l' instrument des passages, dans le suivant la détermination des erreurs produites par la position fautive d' une ligne méridienne horizontale pour en tenir compte. On donne une légère idée de l' instrument des passages à la fig. 1 (Tab. VII): pour la bien connoître on en peut voir la forme, & la description complette dans l' Astronomie de M. de La-Lande, où il y a celle même à l' exemple de laquelle on en avoit fait exécuter à Paris sous ses yeux l' autre, qui a été le sujet de cette vérification. Cet instrument a une lunette (Tab. VII fig. 1) ABB'A', qui tourne autour d' un axe EK, appuyé aux deux soutiens LL', NN'. Cet axe doit être bien horizontal, & perpendiculaire à la ligne méridienne, & à l' axe de la lunette: alors ce dernier axe prolongé jusqu'à la surface céleste y décrit la circonférence du Méridien; & détermine le passage des astres par celui-ci, ce qui lui a donné son nom. Il peut avoir les mêmes trois erreurs, dont on a parlé dans le Mémoire III: la différence de l' angle des deux axes à l' angle droit, la déviation du premier de ces axes de la position perpendiculaire au plan du Méridien vers le Nord ou vers le Midi, & l' inclinaison de ce même axe à l' horizon.

52. On propose au commencement de cet Opuscule une méthode pour découvrir, & corriger la troisième erreur par un fil à plomb, qui doit passer par deux points P, Q marqués sur le tube de la lunette tant quand le point P est en haut & Q en bas, que quand après une demi-révolution autour du second axe celui-là se trouve en bas & l' autre en haut, & dans la fin il y a le moyen de faire la correction de l' erreur trouvée par cette méthode. Il y a une autre espèce de conversion pour découvrir & corriger la première erreur en changeant les bouts des deux bras de manière, que EF aille sur NN'. Si l' axe de la lunette est perpendiculaire au premier axe, on verra dans

l' in-

l'intersection des fils, qui se croisent dans le foyer de l'objectif, le même objet éloigné ; autrement la moitié de la distance latérale des deux objets, qui s'y rencontrent, donne la quantité de l'erreur. Mais il y a des réflexions sur ces méthodes, qui en rendent suspect l'usage au moins pour une exactitude suffisante.

53. Pour cela on propose plutôt ici aussi, comme dans l'Opuscule III, des formules tirées des erreurs qu'on trouve dans l'arrivée fautive au Méridien donnée par l'instrument pour trois fixes, & comparée avec l'exacte donnée par les hauteurs correspondantes. Il y a de la conformité dans le procédé de ces deux Opuscules, mais beaucoup aussi de différence tant dans la manière de trouver les formules, que dans les formules mêmes, & il y a une méthode tout-à-fait différente pour le même objet avec différentes méthodes pour trouver des valeurs propres à en tirer les erreurs, les unes en employant le calcul trigonométrique, les autres à l'aide d'une construction graphique : à la fin de l'*Opuscule* il y a des méthodes propres à corriger toutes les trois erreurs *de l'instrument*, dont quelqu'une en employant une autre lunette attachée au premier axe dans sa direction pour corriger l'inclinaison de celle-ci à l'horizon. Mais ce qui peut être d'un avantage encore plus grand c'est une formule, qui donne la correction à faire au lieu déterminé par une observation faite avec l'instrument fautif, dont on a connu les erreurs *sans* même les y corriger.

54. Dans l'Opuscule XII *il* s'agit des erreurs, qu'une mauvaise position de la ligne méridienne horizontale produit dans le moment du midi marqué sur elle : on la suppose ici horizontale, & on examine deux erreurs, qu'on peut rencontrer dans sa position, la première simple qu'elle passe par ce point, qu'on appelle le pied du gnomon, mais en faisant un angle avec la vraie direction, qui va du Nord au Midi, la seconde double, quand elle ne passe même par ce pied, & n'a pas la direction de la vraie méridienne. Ces deux erreurs répondent exactement aux deux dernières du quart de cercle mural, & de l'instrument des passages. Le plan qui passe par cette ligne, & par le sommet

 du

du même gnomon, qui est la pointe du style, ou dans les grandes méridiennes employées par les Astronomes le centre du trou, qui donne le passage au rayon, continué jusqu' à la surface de la sphère céleste, y marque toujours un grand cercle, comme l' axe de la lunette d' un instrument des passages, quand il est bien perpendiculaire à l' autre axe. Si la méridienne passe par le pied du gnomon, dont la direction va au zénith, ce grand cercle passe par le même zénith, & il est le vrai Méridien, lorsque la ligne méridienne a sa direction exacte, comme (Tab. VII fig. 7) le cercle AZB, qui passe par le zénith Z, & par les points A, B austral & boréal: mais si elle fait un angle avec la vraie méridienne; ce cercle sera CZD en coupant le Méridien en Z, où il formera l' angle sphérique CZA égal à celui, que la fausse méridienne forme sur l' horizon avec la vraie. Si celle-là ne passe même par le pied du gnomon; ce cercle sera incliné sur l' horizon sans passer par le zénith, mais coupant le Méridien dans un autre point comme le CED (fig. 8) en E.

55. On découvre l' erreur produite par la méridienne fautive dans le moment du midi qu' on y prend, en comparant ce moment avec celui qui est donné par les hauteurs correspondantes le même jour. Dans le cas d' une erreur simple dans la position de la méridienne il suffit une seule erreur dans le moment du midi d' un seul jour, qui répond à l' arc Ss (fig. 7), pour déterminer l' angle AZC, & l' erreur du midi dans un autre jour quelconque. Lorsque l' erreur de la position est double, il faut avoir deux erreurs du midi de deux jours marquées par les arcs Ss, S's' (fig. 8) pour avoir l' arc ZE, & l' angle AEC, & former la table des erreurs pour tous les autres jours de l' année. On voit bien, que cette détermination se doit faire ici de la même manière, que pour les deux dernières erreurs de l' instrument des passages.

56. Pourtant on trouvera dans cet Opuscule aussi quelque différence dans la manière de faire cette recherche, & pour tirer les formules correlatives à la solution de tous le problêmes y appartenants. Il s' agit de trouver dépendamment d' une, ou de deux erreurs du midi mal marqué pour avoir dans la fig. 7 l' angle AZC, dans

fig. 8

fig. 8 l'arc ZE, & l'angle AEC, comme aussi la petite formule pour l'erreur d'une journée dont on sait la distance du soleil au zénith, qui est donnée par la hauteur du pôle, & la déclinaison du soleil. Dans le cas d'une erreur simple l'angle AZC trouvé donne le moyen de tirer la vraie méridienne, qui passe par le pied du gnomon, & y fait avec la fausse un angle rectiligne égal au sphérique AZC (fig. 7) trouvé. Lorsque l'erreur est double, on détermine ici la distance NG (fig. 9) du pied du gnomon N à l'intersection G des deux méridiennes la vraie GH, & la fausse G*h*. On a à la fin du num. 25 toutes les dénominations des valeurs, qui entrent dans les formules, & toutes les formules tant pour avoir des valeurs subsidiaires, que des finales, qu'on devoit déterminer. Cette partie de ce numéro est le fruit total de toute la recherche de cet Opuscule, & elle peut servir seule de son extrait.

§. VII.

Des Opuscules XIII, & XIV.

57. On a dans l'Opuscule XIII une méthode pour tirer la ligne méridienne dans un plan soit horizontal, soit vertical, par trois points d'ombre quelconques, la hauteur du pôle, & la déclinaison du soleil, avec tout le reste qui appartient aux quadrants solaires. Ordinairement pour tirer la ligne méridienne dans un plan horizontal on se sert de deux points d'ombre également éloignés du pied du style: on trace un cercle autour de ce pied, & on marque le point de sa circonférence dans lequel la pointe de l'ombre qui diminue avant le midi entre dans ce cercle, & le point dans lequel elle en sort après midi par l'alongement de la même ombre. On tire la méridienne par le point du milieu entre ces deux. Pour cela il faut attendre ces moments, ce qui est incommode, & même il faudroit avoir bien déterminé le centre de ce cercle, qui est caché par l'épaisseur du style. Il y a dans cet Opuscule une méthode pour obtenir cet objet par trois points extrêmes de l'ombre quelconques, & sans se sou-

soucier de la poſition du ſtyle, qui peut être incliné comme on veut ſans déranger la conſtruction. La voici.

58. Dans la fig. 1 (Tab. VIII) T eſt le ſommet du ſtyle S le point, ſur lequel tombe la perpendiculaire baiſſée du point T ſur le plan horizontal donné, qui ſera le centre de la baſe du même ſtyle, ſi celui-ci eſt bien vertical : & nous appellerons le point S le pied du ſtyle, dont pourtant nous n'aurons aucun beſoin pour tracer la ligne méridienne : A, A', A'' ſont les trois points de l'ombre, le premier le plus, le ſecond le moins éloigné du ſommet T du ſtyle : avec les centres A, & A' on trouvera ſur le même plan le point *t* (*) : avec le centre *t*, & l'intervalle TA'', on trouvera le point *b* dans la ligne *t*A, & *b'* dans la *t*A' prolongée, & on tirera la ligne *bb'*, qui coupera la ligne AA' en C. On tirera la ligne A''C, *qu'on démontre devoir être perpendiculaire à la méridienne, qui paſſe par S*. Si on avoit le point S; on tireroit par ce point une ligne SMM' perpendiculaire à la ligne A''C, & on auroit la méridienne cherchée : mais comme ce point ſera caché dans l'épaiſſeur de la baſe du ſtyle, en amenant une pointe du compas en T, on amenera l'autre à un point F de la ligne CA'' de manière à pouvoir en trouver un autre F' dans la même ligne avec la même ouverture : avec le centre en F & F', & une ouverture un peu plus grande que la moitié de la ligne FF', on trouvera le point M vers le ſtyle, & avec une ouverture plus grande un autre M' du côté oppoſé. La ligne MM' ſera la méridienne cherchée.

59. Du point *t* on tirera une ligne parallèle à la *bb'*, qui rencontrera la AA' prolongée en D, & la ligne DE parallèle à la A''C, qui rencontrera la méridienne MM' à angles droits en E. Celle-ci ſera l'interſection du plan de l'équateur qui paſſe par T c'eſt-à-dire elle ſera la ligne équinoctiale du quadrant horizontal relatif à ce ſtyle.

60. Pour

(*) Les lignes A*t*, A'*t* doivent être égales aux lignes AT, A'T : la perſpective les fait paroître beaucoup plus petites.

60. Pour avoir le point S on peut transporter la ligne MM' sur un papier de la fig. 2, & avec les centres M, M' les diſtances MT, M'T de la fig. 1 on trouvera dans la fig. 2 le point T : on tirera la TS perpendiculaire à la même MM' prolongée indéfiniment : le point S sera le pied cherché du style, & ST sa vraie hauteur. On prendra sur la MM' une ligne M'E égale à celle de la fig. 1 : on tirera la ET, & la TP perpendiculaire à celle-ci, qui rencontrera la MM' en P : ce point sera le pôle du quadrant, par lequel doivent passer toutes les lignes des heures communes, qui vont du midi à minuit, & viceversa : l'angle SPT = STE donnera la hauteur du pôle : avec les centres M, M', & *les intervalles* MA', M'A' de la fig. 1, on trouvera dans la fig. 2 le point A', qui répondra au point A' de *la* fig. 1. Avec le centre T, & l'intervalle TA' de la fig. 1 on trouvera dans la ligne MM' de la fig. 2 le point *a* : avec les centres P, T, & les intervalles PA', T*a* on trouvera le point *a'*, & on tirera T*a'* : l'angle ET*a'* *sera la déclinaison* du soleil de ce jour. On a dans l'Opuscule la *démonstration* de tout cela par la comparaison de la fig. 2 avec la fig. 1, en concevant dans celle-ci les points P, S, T, & toutes *les* lignes qu'on y voit, qui partent du point T, & sont dessinées par des points.

61. Pour ce qui appartient à la délinéation des quadrants solaires *il* y a dans la fig. 3 la manière de trouver sur la ligne *équinoctiale* AEB tous les points des heures communes de l'Europe à l'aide d'un cercle, qui a le rayon ET' = ET dans la PSE prolongée, qui est la même que dans la fig. 2, & représente l'équateur, appliqué sur le même plan horizontal : on y voit les lignes horaires tirées par le pôle P & par ces points, la ligne de l'heure VI étant parallèle à l'équinoctiale. Dans la fig. 4 il y a la manière facile de faire la délinéation des deux tropiques pour terminer le quadrant, qui pourroit être indéfini en marquant les heures non par l'ombre de la pointe d'un style, mais par celle d'un côté d'un triangle *sPt* de la fig. 3. On détermine dans la fig. 4 l'axe AA' de l'hyperbole, dont les deux branches sont les deux tropiques, & les asymptotes, & ayant ceux-ci, avec un point,

point, comme A ou A', on fait avec la plus grande facilité la délinéation de cette courbe par des points.

62. Dans la fig. 5 il y a la construction très-simple pour trouver l' arc demi-diurne dans les deux tropiques, ce qui sert pour combiner les heures Italiennes, qui marquent le coucher du soleil à $23\frac{1}{2}$, avec les communes. A' l' aide de la même figure on trouve la déclinaison du soleil qui donne l' arc diurne de 1, & 9 heures justes, ce qui sert pour tracer certaines hyperboles, qui donnent un moyen facile pour déterminer les lignes des heures Italiennes. A' la fig. 4, & 6 il y a le moyen de transporter toutes les déterminations précédentes du plan horizontal à un plan vertical, & dans le deux figures 7, & 8 il y a la méthode pour faire plus exactement la délinéation des lignes horaires en trouvant par la Trigonométrie les azimuths, & les distances au zénith pour chaque heure, ce qui rend beaucoup plus facile & plus exacte la délinéation en grand sur un mur. On ne peut qu'indiquer seulement tous ces objets dans un court extrait.

63. Le §. XIV a pour objet la vérification de la machine parallatique: cette machine est très-connue: elle a beaucoup d'affinité avec l' instrument des passages, même celui-ci n' est qu' un cas particulier de celle-là. Pour mieux comprendre ce qui appartient à sa vérification il faut avoir présente à l' esprit sa construction, & la manière de l' employer: ici au commencement de cet Opuscule il y en a une très-legère idée: on fera bien d' en voir la description dans l' Astronomie de M. de La-Lande. Elle a deux axes avec une lunette: le premier de ces deux axes doit être placé parallélement à l' axe du monde, qui est celui de l' équateur: le second doit être perpendiculaire à un plan qui passe par l' axe de la lunette, & par une ligne droite parallèle au premier axe. Ce second tourne autour du premier, & avec *lui tourne aussi un index, qui dans un cercle perpendiculaire au même premier, & divisé en heures indique les différents cercles horaires, dans les plans desquels la lunette a son mouvement au*tour de ce second axe avec un autre index, qui marque les déclinaisons des astres qui se trouvent dans l' axe de la lunette mê-

me,

me, tandis que le premier index marque les différences des aſcensions droites, déterminées par le même cercle, qui donne les heures en donnant 15 degrés pour chaqu' heure. Quand ce premier index marque l' heure du midi, l' instrument devient un vrai instrument des passages, l' axe de la lunette tournant alors dans le plan du Méridien autour d' un axe horizontal.

64. Communément on n' employe cette machine, que pour suivre un astre dans le cercle parallèle de son mouvement diurne: ce qui lui a donné son nom. On l' employe aussi pour trouver même pendant le jour un astre, dont on sait l' ascension droite, & la déclinaison, ou pour parcourir une bande circulaire de la sphère céleste terminée par deux cercles parallèles à l'équateur, soit en cherchant s' il n' y a quelque chose de nouveau, comme une nouvelle comète, ou pour rencontrer quelque fixe, qui doit arriver au même champ de la lunette avec une planète, ou comète pour les comparer. Ces usages n' exigent pas une position exacte des axes. Mais ici il s' agit d' avoir une méthode pour s' assurer de cette position de manière à pouvoir employer cette machine à la détermination immédiate des déclinaisons, & ascensions droites par des observations faites dans un cercle horaire à une heure quelconque, comme on les détermine à leur passage par le Méridien par le quart de cercle mural, & par l' instrument des passages.

65. On commence par la position du premier axe, & on y propose trois méthodes pour cet objet. Souvent on employe avec cet instrument une espèce de micromètre à rhombe, qui est ici le sujet de l' Opuscule XVI, où l' on détermine les déclinaisons par la distance d' un de ces angles à l' astre dans un arc perpendiculaire au parallèle décrit par son mouvement diurne. Si le premier axe est bien placé, cet angle doit dans le mouvement autour de cet axe conserver toujours la même distance au pôle de l' équateur, & en faisant plusieurs observations d' une même fixe à des intervalles de temps quelconques, cette distance à cet angle doit aussi se trouver toujours la même. Si on y trouve de la différence, c' est elle qu' on employe ici pour déterminer les erreurs de la position de cet axe. Dans la fig. 1 (Tab. IX)

P est le pôle de l' équateur, A celui vers lequel est dirigé le premier axe de la machine : on doit déterminer la quantité, & la direction de l' arc PA.

66. Dans la première méthode on employe deux distances VS, V'S' d' une même fixe au même angle du rhombe dans deux de ces positions en V, & V' : & par la différence de ces deux distances on trouve les deux quantités cherchées ; mais on y suppose exacte la mesure des angles en A déterminés dans le cercle susdit divisé en heures pour en tirer la différence de l' angle VAV' donnée par cet index à l' angle VPV' donné par le temps écoulé entre les deux observations, ce qui exige l' exactitude de cette mesure, qu' on ne peut pas avoir par les divisions de ce cercle, qui ordinairement n' est pas assez grand. La seconde méthode, sans avoir besoin de la mesure exacte des angles en A, employe dans la fig. 2 trois de ces distances VS, V'S', V''S'', & obtient la solution du problême par un calcul de plusieurs triangles sphériques : la troisième pour éviter la résolution de ces triangles applique aux différences de ces trois distances, qui sont petite les formules différentielles de Trigonométrie, qui sont le sujet de l' Opuscule XV. On met ici ces formules au num. 17 sans démonstration, qu' on a après dans cette pièce justificative. On en tire de deux manières différentes les formules pour les valeurs cherchées, & au §. VI il y a l' exemple numérique appliqué à des valeurs réelles tirées des observations faites avec cette machine.

67. Dans le mouvement de la lunette autour du second axe on peut avoir les mêmes erreurs, que pour le quart de cercle mural, & pour l' instrument des passages. On fait cette recherche à la fig. 4, & il y a aussi de la différence dans le procédé, quoique l' objet soit le même, & des réflexions intéressantes sur les méthodes, & sur les résultats, il y a la manière de corriger les erreurs de la machine, ou de faire une table de celles, qui en dérivent dans les lieux observés pour en tenir compte dans les observations faites avec une machine de cette espèce fixée dans un Observatoire. Il y a à la fin ce qui appartient à rendre beaucoup plus utile l' usage d' une portative bien vérifiée.

§. VIII.

§. VIII.

De l' Opuscule XV.

68. L' Opuscule XV est le plus intéressant de tout ce Volume, parcequ' il contient une théorie générale, avec des matériaux, ou des outils d'un usage immense pour l'Astronomie, & peut être utile même pour le calcul différentiel & intégral. Il y a tout ce qui appartient aux formules différentielles de la Trigonométrie sphérique appliquées aussi à la plane. On en a fait mention & usage dans le Volume III & dans plusieurs Opuscules précédents à celui-ci. On voit dans le §. I l' objet & le plan de cet Opuscule. Dans un triangle on considère six termes, trois côtés, & trois angles. S' il y a quelque petit changement dans quelqu' un de ces termes, il y en a dans d' autres, & il y a une liaison mutuelle parmi ces changements, qui donne une très-grande facilité pour la solution d' une très-grande quantité de problêmes, sur-tout en Astronomie. On considère dans les éléments d' Astronomie les cas, dans lesquels deux de ces termes restent constants, & alors tous les quatre autres ont aussi des changements, c' est-à-dire des différences: on a donné les formules pour la liaison des différences de ces quatre. Cela n' a pas toute la généralité, puisqu' il y a des cas, où tout est changé sans aucun terme constant, & d' ailleurs cela exige un grand nombre de formules pour les différents binaires qu' on peut prendre pour constants, & pour tous les autres différents binaires des quatre termes variés, qui répondent a chaque binaire de fixes.

69. Or j' ai pris le problême dans toute sa grande généralité en considérant tout varié, & cela non seulement ne m' a pas multiplié le nombre des formules; mais les a réduites à quatre seules, qui répondent à quatre combinaisons de quatre d' entre ces six termes: ces sont trois côtés avec un angle, deux côtés avec deux angles, dont un intercepté, deux côtés avec deux angles opposés, trois angles avec un côté. Pour chacune de ces quatre combinaisons j' ai trouvé une équation de quatre termes

chacun desquels a la différence d' un des quatre termes de la combinaison avec un coefficient très-simple. Lorsqu' on a la variation de trois termes, & on cherche celle d' un quatrième, on doit bien trouver ces quatre termes dans une de ces quatre équations: dans laquelle il n' y aura autre valeur inconnue, que la différence, qu' on cherche. Si dans le problême on a un, ou deux termes constants; il suffit d' en faire la différence = 0, & le reste de l' équation de trois termes dans le premier cas, de deux seuls dans le second donne la valeur cherchée: ainsi on voit que tous les cas de deux termes constants, d' un seul constant, de tout changé, se trouvent renfermés dans ces seules quatre équations.

70. On fait usage dans quelqu' un des Opuscules précédents d' autres petites équations appartenantes à la liaison des petits compléments de deux côtés d' un triangle sphérique peu différents de 90°, & de leurs angles opposés. On les a déterminées aussi, & démontrées dans ce même Opuscule, pour y avoir total de cette théorie.

71. On a dans le §. II tout le fruit de cette recherche sans les démonstrations, qui viennent après: on y voit les six dénominations des côtés, & des angles, les quatre combinaisons, les quatres équations appartenantes aux triangles sphériques pour chacune la sienne, les mêmes appliquées aux triangles plans. Tout cela est suivi par cette autre espèce de formules pour ces supplements. Ce paragraphe est un extrait de tout ce qui sert pour la pratique dans toute cette théorie.

72. Dans les deux paragraphes suivants on a la démonstration des quatre équations de la première espèce appliquées à la Trigonométrie sphérique: cette démonstration est devenue très-simple en préparant tout pour les deux premières par une construction synthétique, qui rend presque toujours les recherches & les démonstrations beaucoup plus simples. Dans les trois, qui viennent après, il y a une démonstration bien différente des ces deux premières équations beaucoup plus compliquée, mais qui peut intéresser par plusieurs tours de calcul, qu' on y trouve. Dans le

§. VIII

§. VIII il y a la déduction de celles, qui appartiennent à la Trigonométrie plane, qu' on fait en retenant le rayon pour les angles le même d'auparavant celui des tables, & faisant infini celui de la sphère, qui répondoit aux côtés.

73. Dans le §. IX il y a des réflexions sur les dangers, qu'on peut rencontrer dans certains cas avec des règles pour s' en garantir, ce qui amène dans le §. X la détermination de la liaison des petits compléments avec la seconde espèce d'équations, parceque une des occasions, dans lesquelles les formules de la première espèce peuvent devenir erronées, est quand le côté ou l'angle variable est trop peu éloigné de 90°: il y a du danger aussi dans les cas, où quelqu'angle s'approche trop du zero ou de 120°: cela fait examiner ces cas dans le paragraphes XI & XII. On examine dans le premier de ces deux celui, où il y a un seul angle de cette espèce. A' cette occasion on tombe sur une démonstration bien exacte, & pourtant bien simple de ce théorème élémentaire de la Trigonométrie sphérique, où tandis que dans la plane la somme des trois angles est toujours égale à deux angles droits, dans la sphérique elle en est toujours plus grande : le même procédé, qui a donné d' abord une démonstration de ce premier théorème, dans les triangles d'un angle petit, qu' on y a généralisé après, amène par sa continuation à un autre aussi élémentaire, que l' excès des trois angles d'un triangle *sphérique sur les deux droits est égal à son aire, si l'on prend pour la valeur de cet excès celle de l'arc* du cercle qui le mesure dans un grand cercle de la même sphère en faisant son rayon = 1. La démonstration de ce beau théorème qu' on trouve ailleurs tirée des calculs les plus sublimes & compliqués, est réduite ici à une très-grande simplicité. Il y en a une autre dans ce même Opuscule. On trouvera quelque chose de pareil dans des pièces de quelqu' un, auquel j'avois communiqué ma manière simple de démonstrer ce théorème; mais on verra aisément que c' est à moi, par ma manière d'employer cette espèce de quantités, & par tout l' ensemble de ce qui se trouve dans ce même Opuscule. La démonstration est devenue si simple par la manière d'employer

dans

dans une méthode synthétique les vrais infiniment petits, en négligeant des quantités d'ordres inférieurs à celui de ses mêmes quantités, & on fait voir ici, que cette négligence ne porte aucune erreur même infiniment petite, le résultat de la démonstration restant exact, ce qui décèle aussi le fondement essentiel de la sureté de la méthode des infiniment petits bien appliquée, & par conséquent de tout le calcul différentiel & intégral.

74. Ce paragraphe est suivi de l'autre, qui considère les triangles sphériques, qui ont deux angles assez petits, ou des angles approchants de 180°. On découvre les propriétés de cette espèce de triangles, & dans le §. XIII il y a un résumé de tout ce qu'on a trouvé dans les deux paragraphes précédents pour les triangles sphériques, qui ont des angles ou bien petits, ou bien approchants de 180°, avec l'application des mêmes théorèmes aux triangles plans. Ce paragraphe est un vrai extrait de tout ce qu'on a trouvé dans les deux précédents: tout y est élémentaire, & très-essentiel pour la théorie des quantités infiniment petites appliquée aux quantités petites, mais finies, qui est t[illegible] en usage aujourd'hui dans toute l'étendue des Mathématiqu[illegible], mais qui est bien dangereuse, si l'on n'y prend bien garde.

75. Dans le paragraphe XIV il y a la manière de tirer d'autres équations, & formules de ces quatre par différentes substitutions, ou transformations. A cette occasion on fait voir, que la belle analogie, & généralité du calcul algébrique appliqué par Des-Cartes à la Géométrie exige; que dans le passage d'un angle aigu à un obtus on doit bien retenir le même signe pour le sinus, mais qu'on doit le changer non seulement pour le co-sinus, mais aussi pour la tangente, & co-tangente.

76. Dans le paragraphe XV il y a la manière d'appliquer les quatre équations générales à toute la grande multitude des combinaisons particulières, où l'on voit bien cette multitude immense, qui épouvante au premier coup d'œil, & pourtant elle se trouve renfermée dans ces quatre formules d'une ligne courte chacune, dont il est très-facile d'en tirer celle, qu'on se propose. Dans le paragraphe XVI il y a le développement de tous

les

les cas des deux termes constants, qui est très-aisé pour chacun en particulier, & qui exigeroit tant de formules particulières, pour y chercher celle qui convient à chaque cas proposé ; tandis qu' ici on les trouve toutes enfermées dans les mêmes quatre équations, & on les en tire avec la plus grande facilité, par la seule suppression des différences des deux termes constants : dans le XVII on fait la même chose pour le cas d' un seul terme constant.

77. Tout le reste de l' Opuscule sert pour donner l' exemple de la grande utilité des mêmes équations par différentes applications à des problêmes astronomiques. Il y en a une par paragraphe dans les quatre suivants, où l' on trouve les mêmes résultats qu' on trouve communément dans les livres élémentaires pour la solution des mêmes problêmes : tous ces cas sont de ceux de deux termes constants. Dans le premier, qui est le paragraphe XVIII on détermine la vîtesse de la montée d'un astre sur l' horizon, & de sa descente, & l' on y voit, que le maximum se trouve sur le premier vertical perpendiculaire au Méridien : dans le §. XIX on trouve les formules connues pour la correction du midi trouvée par des hauteurs correspondantes. Les deux suivants sont pour la plus courte durée du crépuscule, & pour le plus grand éclat de Vénus, sujets qui ne paroissent pas du ressort de cette espèce de formules, & pourtant on les y applique *très-naturellement*, & *on trouve pour le premier la déclinaison* australe, *dont le sinus est* $= \sin.lat \times \tan.9^\circ$; il y a des réflexions intéressantes sur le développement des cas de ce problême, qui donnent quelqu' autre espèce de maximum, & minimum tant en faisant la différence $= 0$, qu' en la faisant $= \infty$. Pour le maximum de l' éclat de Vénus on trouve les mêmes formules qu' on voit dans l' Astronomie de M. de La-Lande, d' où l' on tire l' élongation de Vénus dans ce maximum pour sa distance moyenne au soleil de 22°. 20'. 54", & la distance à la terre = 0,4304, & on en tireroit toutes les valeurs de la table calculée pour les autres distances par M. Keis, & rapportée par le même M. de La-Lande dans le grand ouvrage de son Astronomie.

78. Dans

78. Dans le dernier paragraphe il y a une autre applicati pour un cas d'un seul terme constant, qu'on avoit eu dans l'Opuscule VIII, on tire ici de la première des quatre équatio générales le même résultat, qu'on avoit eu là par une métho particulière : on indique les lieux de cette Collection, où l'on a fait usage de ces mêmes équations pour les cas de la Trigo-nométrie tant sphérique que plane, soit pour les cas de d termes constants, d'un, d'aucun. On voit bien par tant d'objets contenus dans cet Opuscule combien il doit être intéressant.

§. IX.

Des derniers trois Opuscules de ce Volume.

79. LE premier de ces trois Opuscules, qui est le XVI, a po r objet la correction de l'erreur produite par l'obliquité de la position du micromètre fait à rhombe, qu'on employe principale-ment dans la lunette d'une machine parallatique, comme on a indiqué dans l'Opuscule XIV ; mais on peut l'employer aussi d une lunette isolée. On voit à la fig. 1 (Tab. XI) sa forme BAEL, tel qu'on le voit dans une lunette astronomique, qui renverse les objets : ainsi ABD, qui dans cette figure est sa moitié inférieure, représente le demi-rhombe boréal, qui dans une lunette tourn e vers le midi est supérieur, & l'autre AED l'austral, EAB demi-rhombe oriental, EDB l'occidental, *le mouvement diurn qui se fait de gauche à droite pour un qui regarde directement le ciel de ce côté-là, allant dans la lunette de droite à gauch.*

80. On y fait le diamètre BE double de AD, & on tache de donner au second la direction parallèle au mouvement diurne : alors l'autre BE va sur un arc d'un cercle horaire, & on détermine la différence de l'ascension droite, & de la déclinaison d'un astre de position inconnue, comme d'une planète, ou comète, à celles d'un de position connue, comme d'une fixe, en marquant seulement les temps de l'arrivée de celle-ci aux côt du rhombe en F, & H, & de celle-là ou dans le même demi-rhombe en F', H', ou dans l'autre en F'', H''. Le temps du milieu

lieu

lieu entre ces deux passages est alors le temps du passage par l' axe BE en G, & en G', ou G'', ce qui donne la différence des ascensions droites par la seule différence des temps de ces passages, tout-a-fait comme dans le passage par le Méridien. Les temps employés par les cordes FH, & F'H', ou F''H'' donnent la différence de la déclinaison; parcequ' on a la longueur de chacune de ces cordes en parties de son parallèle en multipliant par 15 le nombre des minutes & secondes de son temps employé, & on le réduit en parties du grand cercle en multipliant le produit par le co-sinus de sa déclinaison. Les cordes FH, F'H' ou F''H'' sont égales aux distances BG, B'G', ou EG'' comme le diamètre AD est égal au demi-diamètre BC: ainsi la différence des cordes FH, F'H' donne GG', & l' excès du grand diamètre BE sur la somme des cordes FH, F''H'' donne GG'', & ces sont les différences en déclinaison. Il y a dans l' Opuscule des règles pour savoir s'il faut ajouter cette différence à la déclinaison de l' astre connu, ou l' en retrancher pour avoir celle de l' inconnu selon la dénomination des leurs déclinaisons, la longueur des leurs cordes, & le passage par un tel même demi-rhombe, ou par les deux opposés, quoique par un peu de réflexion on trouve aisément tout cela par soi-même avec une figure grossière sans la nécessité de ces règles générales.

81. Or il arrive souvent, que la position du grand diamètre n' *est pas exacte: les cordes parcourues dans le rhombe ne sont pas* les FH, F'H', F''H'' *perpendiculaires à ce diamètre*, mais les FI, F'I', F''I'' *inclinées*, qui le rencontrent en d' autres points L, L', L''. Les segments FL, LI de chacune de ces cordes sont inégaux, avec les temps y employés, qu' on appelle ici *t*, *t'*, leur somme *t''*, leur différence *dt*: on pourra déterminer ces temps, si l' on ajoute, comme à la fig. 2, une lame diamétrale, dont un des deux limbes, comme ici l' oriental, soit le grand diamètre: on fait les côtés mêmes de lame d' une petite largeur; parcequ' alors on n' a besoin d' éclairer le champ de la lunette, comme dans les autres micromètres pour voir les fils. On voit l' entrée dans le rhombe, quand l' astre sort de derrière la lame, & la

sortie, quand elle le cache : de même ici on voit l'arrivée au grand axe, quand l'astre s'y cache. Or les trois moments de l'arrivée d'un seul astre en F, L, I suffit pour déterminer l'angle EBR, que le diamètre BE fait avec la direction de l'arc BR du cercle horaire perpendiculaire aux cordes FI, qui sont toutes parallèles entr'elles, & contiennent avec les FH les angles IFH égaux à celui-là. Toute la détermination de tout le reste dépend de cet angle. On trouve que sa tangente est $= \frac{2dt}{t''}$.

82. Cette ligne BR rencontre les cordes FI, F'I' du demi-rhombe boréal en M, M', la F''I'' de l'austral en O, & une ligne ES parallèle aux cordes obliques en S : *la corde F''I'' est rencontrée par la ligne EM''* parallèle à la RB en M'', & la ligne LP' parallèle à la même rencontre en P, P' les cordes F'I', F''I''. La différence des déclinaisons est LP $=$ MM' différence des BM, BM', ou LP' $=$ MO excès de la ligne BS sur la somme des BM, SO $=$ EM''. Pour la différence de l'ascension droite il faut ajouter à celle qu'on trouve par la différence de l'arrivée au grand axe en L, & L', ou L'', une correction qui répond à la ligne L'P, ou L''P', & celle-ci est égale à la différence de la déclinaison LP, ou LP' multipliée par la tangente de l'angle PLL' $=$ EBR trouvé par sa tangente $= \frac{2dt}{t''}$. Ainsi, après avoir déterminé cet angle, *tout se réduit* à la manière de trouver les BM, BM', ou EM''.

83. Or on trouve ces lignes aisément par les temps t, t', qui donnent les FI, F'I', ou F''I'', par une différence dt, & une somme t'', qui donnent l'angle EBR, & par l'angle ABE $=$ DPE qu'on trouve $= 22°.34'$, en ayant sa tangente $= \frac{CA}{CB} = 0{,}5$. On a par-là les angles MBF, MBI, somme, & différence des deux trouvés, & la somme des leurs tangentes est au rayon $= 1$, comme FI $= 15t''$*cos.decl.* à la perpendiculaire BM. On trouve de même la BM', & encore la EM''. On entrevoit bien comment par-là on trouve tout ce qu'il faut.

84. On

84. On voit dans l' Opuscule tout le procédé de la recherche totale, avec plusieurs méthodes pour trouver le grand axe & la ligne BS, & il y a un exemple numérique du même procédé, où l' on a égard à une petite correction qu' il faut faire à la conversion du temps en parties du grand cercle faite par le co-sinus de la déclinaison de l' astre inconnu prise d' abord pour égale à celle de l' autre connu. Il y a aussi pour la généralité de la théorie tout ce qui appartient aux cas d' une inclinaison quelconque du grande diamètre, du passage d' un astre, de deux astres, ou même de tous les deux par tous les deux diamètres dans la figure 3, ou par le seul, dans lequel cas il y auroit très-peu de différence du cas premier, où il y a le passage par le seul grand diamètre.

85. Les deux derniers Opuscules n' intéressent guere l' Astronomie d' aujourd' hui par leur sujet, qui est l' horologe solaire armillaire universel, dont on faisoit usage dans l' Astronomie ancienne, tandis qu' à présent les pendules donnent une mesure, & une détermination du temps incomparablement plus exacte; mais ces mêmes Opuscules sont assez intéressants par les méthodes, par lesquelles on est arrivé à la solution du problême. Il s' agit de déterminer la quantité précise des erreurs, que la réfraction produit dans l' heure déterminée par cet instrument. La méthode pour arriver à sa solution, la première à se présenter à l' imagination, avoit une très-grande complication: l' usage des courbes de double *courbure paroissoit indispensable*, & par leur projection sur un plan *j' étois* arrivé à une solution, que je ne fais qu' indiquer à la fin du dernier Opuscule, dans lequel j' en donne une autre beaucoup plus simple, que j' avois rencontrée après, & que je croyois la plus simple possible: j' avois achevé cet Opuscule, quand je me suis apperçu, qu' il y en avoit une autre beaucoup plus simple encore: elle avoit quelque chose de commun avec l' autre, mais beaucoup de différence encore: *j'* en ai fait un autre Opuscule, par lequel, quoique postérieur de temps, j' ai commencé, en supprimant dans l' autre ce qu' il avoit de totalement commun, & donnant en entier le reste, qui devroit faire du plaisir

à ceux qui aiment la Géométrie, & le calcul, parcequ' il a beaucoup de recherches utiles, pour avoir tous les différents cas du problême, & démêler ceux, dans lesquels les formules tirées de la méthode des différences petites, mais finies, pouvoient faire tomber en erreur, & quelque fois infinie.

86. L' idée de l' instrument se trouve à la fig. 1 tant de la planche XII, qui appartient à l' Opuscule XVII, que de la XIII, qui appartient à l' Opuscule XVIII. L' instrument a deux anneaux DPEP', DKEK', qu' on replie l' un sur l' autre pour les emboîter; mais dans l' usage pour avoir l' heure, on tourne le second autour d' un diamètre commun DE, en lui donnant une position perpendiculaire au premier: celui-ci doit avoir sa position dans le plan du Méridien: il a un axe PCP' formé d' une plaque percée au milieu par le long avec une petite traverse, qui peut s' éloigner du centre C tant vers P, que vers P', & celle-ci a un petit trou, par lequel doit passer le rayon du soleil, & marquer l' heure sur le cercle du second anneau divisé en heures. Le même premier anneau a une suspension dans un point A, qui peut s' approcher au point D, ou s' en éloigner. On le met à la distance DA égale à la latitude du lieu, & alors l' axe PP' a la direction de l' axe de l' équateur, & le même prolongé jusqu' à la sphère céleste rencontre son pôle P'': le trou F s' éloigne du centre C par un intervalle CF égale à la tangente de la *déclinaison relative au rayon* CD. On trouve ces tangentes marquées *sur la plaque de l' axe* d' un côté, & de l' autre du centre, vers le pôle boréal P pour les déclinaisons boréales, & vers l' opposé P' pour les australes.

87. Quand la suspension A, & le trou F sont à sa place, & le premier cercle dans le plan du Méridien, le rayon du soleil SF sans la réfraction iroit à une heure quelconque exactement à un point H du second cercle, & y marqueroit l' heure même. A midi le soleil se trouvant en N sur le Méridien céleste, qui passe par le pôle P'' & par le zénith Z, & coupe l' équateur en N, le rayon NF iroit dans le point E, qui est le plus bas du même cercle DKEK'. Les deux cercles des deux anneaux sont des

des grands cercles d'une sphère, qui a le centre en C, & qu'on peut appeller la sphère de l' instrument ; mais on prend pour centre de la sphère céleste le point F, & dans une sphère concentrique à celle-là avec le rayon FD = FE le second cercle DKEK' répondroit au parallèle opposé à celui, que le soleil parcourt ce jour-là dans la sphère céleste, qui ne seroit un grand cercle que dans les équinoxes, le trou F allant alors en C.

88. Ce qui fait le plus grand avantage de cette espèce d' horloge, c'est que si l' on néglige l' effet de la réfraction, il s' oriente par soi-même, montrant la position du Méridien, & l' heure à la-fois ; parceque, comme on démontre dans l' Opuscule, en tournant tout l' instrument qu' on tient à la main suspendu par l' anneau A autour de la ligne verticale AB, le rayon SF prolongé au de-là du trou F ne peut tomber sur le cercle DKEK', que dans deux seules de toutes ces positions, en H lorsque le premier cercle est dans le plan du Méridien, où il montre l' heure vraie, & en un autre point H' également éloigné du point du midi E, lorsque le plan même du premier cercle est dans une position bien différente. Comme il est aisé de ne pas se tromper dans l' heure d' un intervalle si considérable, quand on ne fait l' observation à une heure peu éloignée du midi, & il y a une autre raison, par laquelle une observation faite en temps pareil est trop sujette à être fautive, ainsi on ne se trompe pas sur le choix de celle des deux positions, qui répond à l' heure vraie, & donne la vraie position du Méridien.

89. La réfraction dérange un peu l' effet de cette manœuvre. Dans la position juste du premier cercle le rayon SF, que la réfraction élève par l' angle SF*s* dans le plan du cercle vertical Z*s*S = HF*h*, à la place d' aller en H va par la direction F*h*, baissée dans le même plan vertical, qui passe par la ligne ZF & par le point H : ainsi il reste inférieur à cette ligne, & ne rencontre pas le cercle DKEK' : pour le faire rencontrer il faut faire tourner l' instrument jusqu' à ce qu' un côté du cône droit, qui a le sommet en F, & ce cercle pour base, rencontre la direction de ce rayon en un point *h'* du même cercle. L' erreur dans l' heure

mal

mal marquée sera mesurée par l'arc Hh', & on l'aura en temps si l'on divise le nombre de secondes de cet arc par 15 : l'erreur de la position du premier cercle sera l'inclinaison du plan IFH (les points I, G sont les deux intersections de la verticale ZF avec la surface de la sphère de l'instrument) au plan IFh; parcequ'on conçoit ici, que dans la conversion de l'instrument la ligne verticale GFI est restée à sa place, ou qu'on la fait revenir, où elle étoit avant.

90. Pour trouver ces deux quantités on conçoit ici la ligne h'F prolongée jusqu'à la surface céleste, où elle doit rencontrer l'arc du cercle parallèle au mouvement diurne SN, qui aboutit sur le Méridien à sa rencontre de la continuation de la ligne droite EF en N. La première erreur, qui est celle de l'heure, est l'angle $SP''s'$ réduit en temps, & la seconde celle de la déviation du plan du premier cercle par rapport au plan du Méridien est égale à l'angle SZs', qui est la mesure du mouvement circulaire donné à l'instrument pour faire aller la ligne Fh' sur la Fh, continuation du rayon réfracté. On fait la résolution du triangle sphérique $ZP''S$, où l'on a deux côtés, $P''S$ complément de la déclinaison du soleil, $P''Z$ complément de la latitude du lieu, & l'angle en P'' donné par l'heure : on trouve le troisième côté ZS : on en ôte la réfraction Ss, & on a le reste Zs : on le démontre égal à Zs' : alors dans le triangle $ZP''s'$, où $P''s'$ est = $P''S$, on a tous les trois côtés : on en tire les angles $ZP''s'$, $P''Z$. la différence du premier à l'angle $ZP''S$ donne la première erreur, qui est celle de l'heure, & la différence du second au $P''ZS$ donne la seconde de la position du premier cercle par rapport à la direction du plan du Méridien.

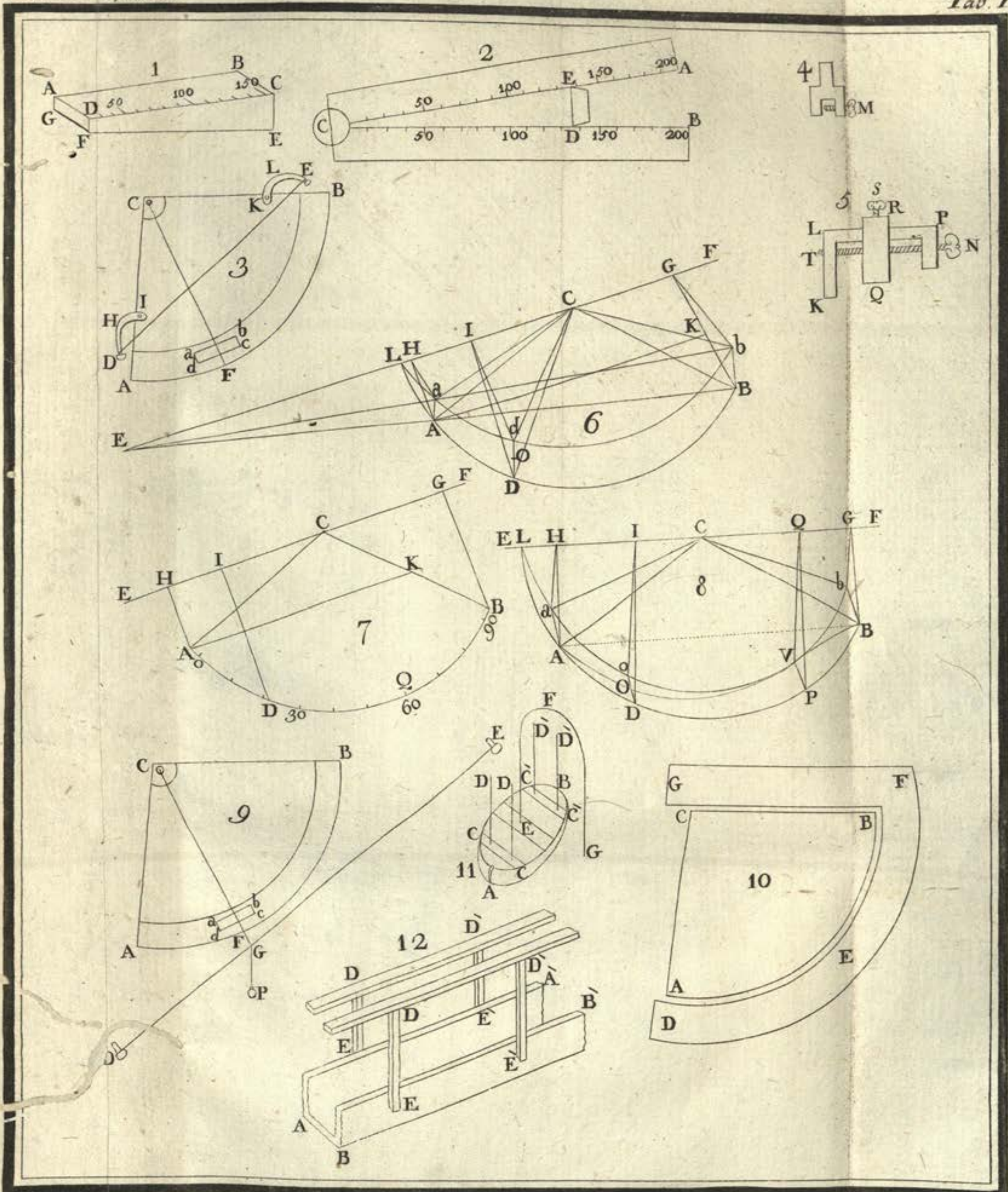
91. C'est la solution la plus simple & exacte faite par la Trigonométrie sphérique. Il y en a une autre après par des formules différentielles tirées à l'aide des petits arcs Ss, Ss' & angle $SP''s'$, SZs', avec un examen de différents cas correlatifs aux différentes valeurs qui y entrent. Il y a plusieurs de ces cas qui portent l'impossibilité, comme près du Midi, où l'excès de l'angle IFH sur l'angle IFE étant plus petit, que la réfraction h Fh,

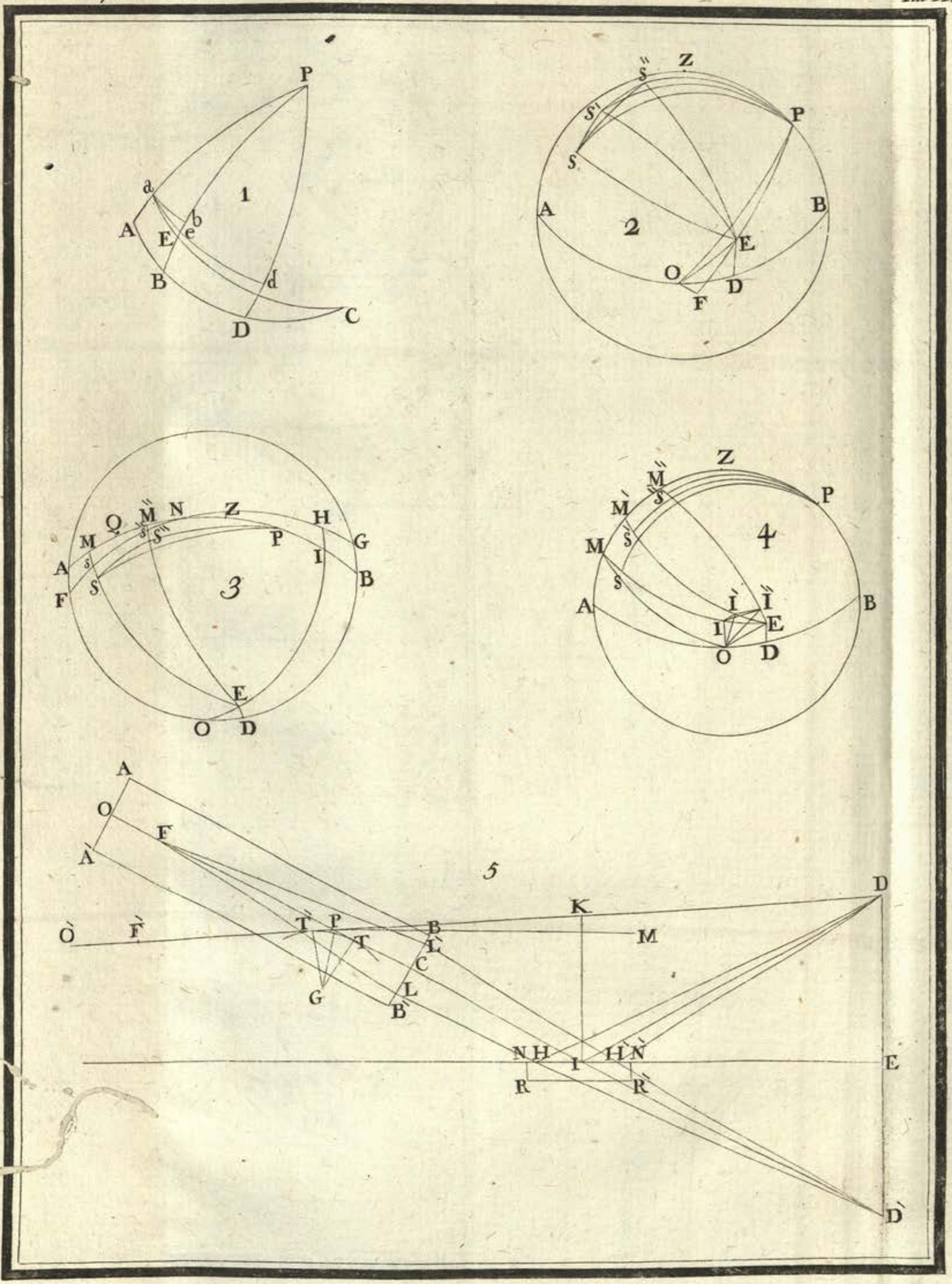
la révolution entière de l' instrument autour de la ligne GI n' amène jamais le cercle DKEK' au rayon F*h*. On examine les limites de cette impossibilité, & on détermine le maximum de l' erreur dans chaque limite, avec des exemples numériques pour la latitude de Paris.

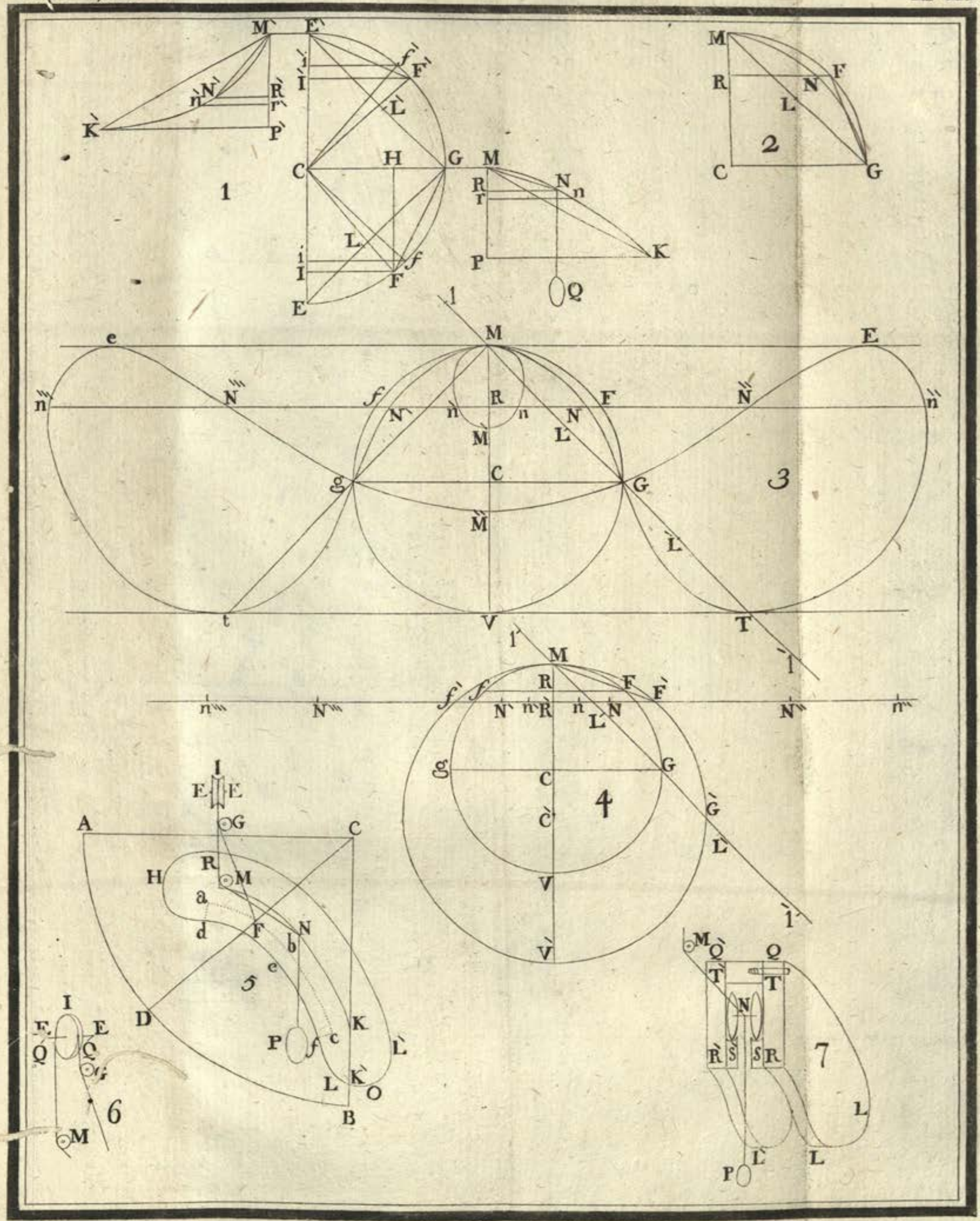
92. Dans l' Opuscule suivant qui est le dernier, il y a une autre solution tirée aussi de la Trigonométrie sphérique d'une manière bien différente, en considérant dans la fig. 1 de la planche XIII le point L, qui est la rencontre de la ligne GI avec la DE, l'arc GHI d'un cercle de la surface de la sphère de l' instrument, qui passe par H, & rencontre le rayon refracté en *h*, les angles HF*h*, HF*h'*, HC*h'*, HL*h'*. En employant les formules différentielles, on trouve les mêmes résultats, mais leur développement est beaucoup plus détaillé, & il est beaucoup plus intéressant pour avoir une connoissance plus intime de la force des méthodes différentielles. Il suffira ici d'avoir donné la solution principale du problême, & indiqué seulement un bon nombre des principaux parmi les objets qui méritent quelque attention des Géomètres, qu'on peut voir en plein dans ces deux Opuscules.

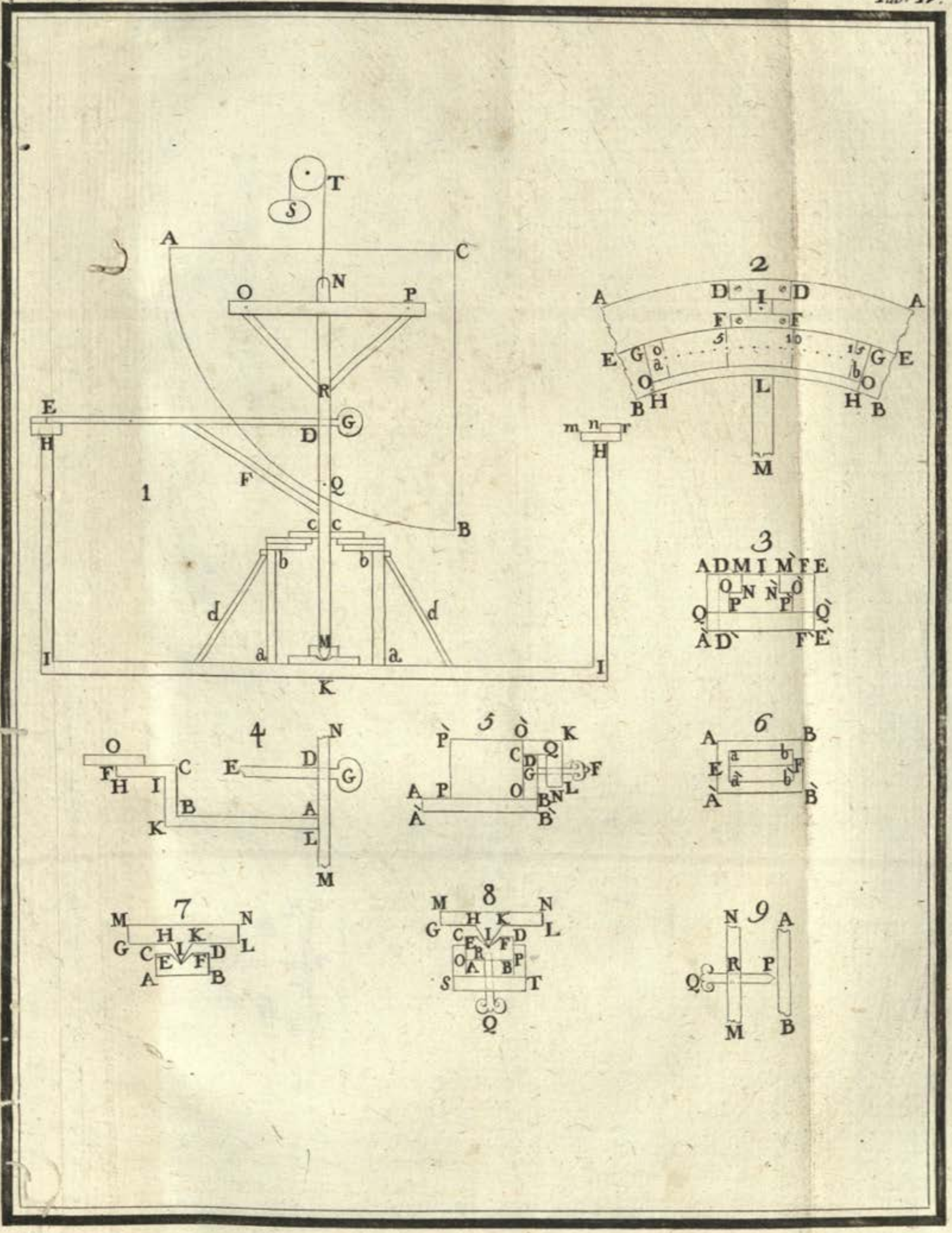
FIN DU TOM. IV.

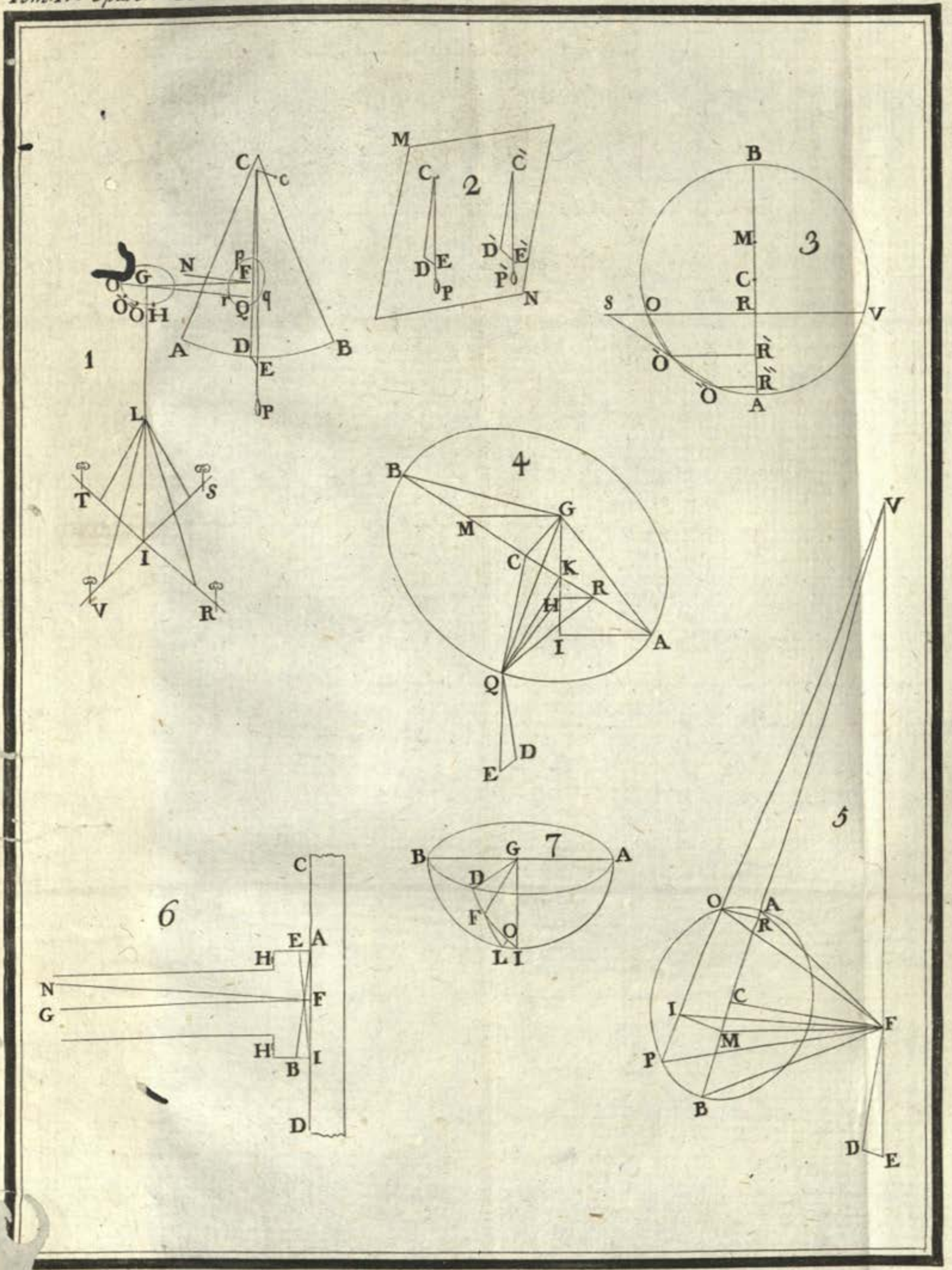
pag.	lin.	ERRATA	CORRIGE.
2	15	Sed ad adhibendam eam methodum oportet	oportet.
45	2	sN, s''N''	NM, N''M''.
62	30	Depressionis IPD observatæ infra horizontem	differentiæ binarum directionum determinatarum ab alidada.
85	3	minorem	minus.
120	19	GF	ACB.
132	32	H	H initium divisionum.
147	25	numeratoris	denominatoris.
153	4	denominator	numerator.
181	30	priore	propiore.
ibid.	34	$= r'$	$+ x = r'$.
208	2	subsequatur	præcedat.
249	23	erit P	erit PT
274	36	vespertinis	matutinis.
343	2	ABC, BAC	BCA, BCA'.
348	20	qui sont	dont le sinus sont.
349	1	qui étant	dont le supplément étant.
351	15	BC	2BC
412	35	denominatio	declinatio.
426	1	differentia distantiæ	distantia.
432	23	habens	habentem.
436	11	supplementum hujus posterioris	differentia hujus posterioris a PZS.
439	28	*log.*	*compl.log.*
441	4	binorum	trium.
475	13	y la	y a la.
504	8	& 9 heures	heures.
ibid.	18	le §.	l' Opuscule.

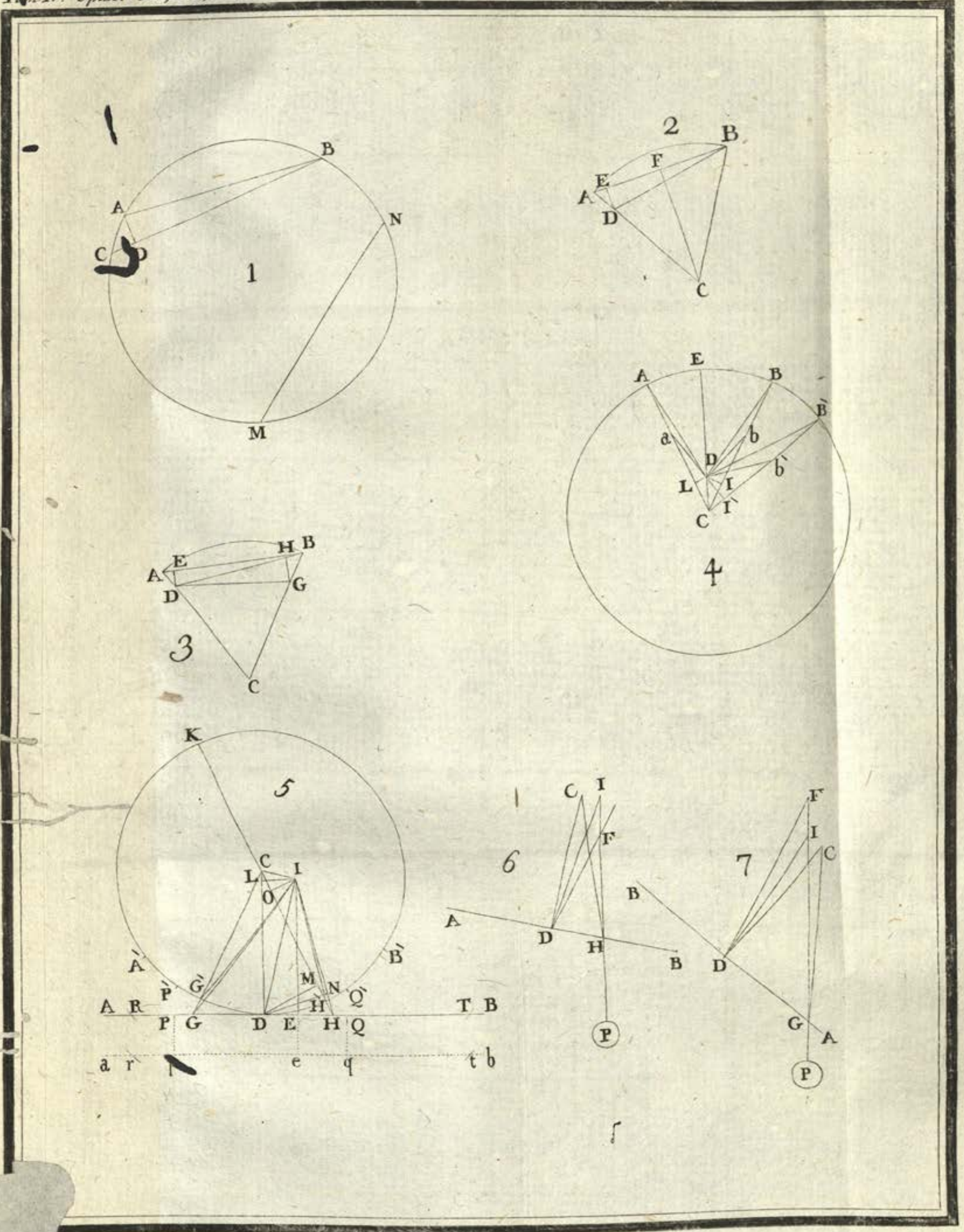

1
50
100
150
2
50
100
150
200
3
4
5
6
7
30
60
90
8
9
10
11
12

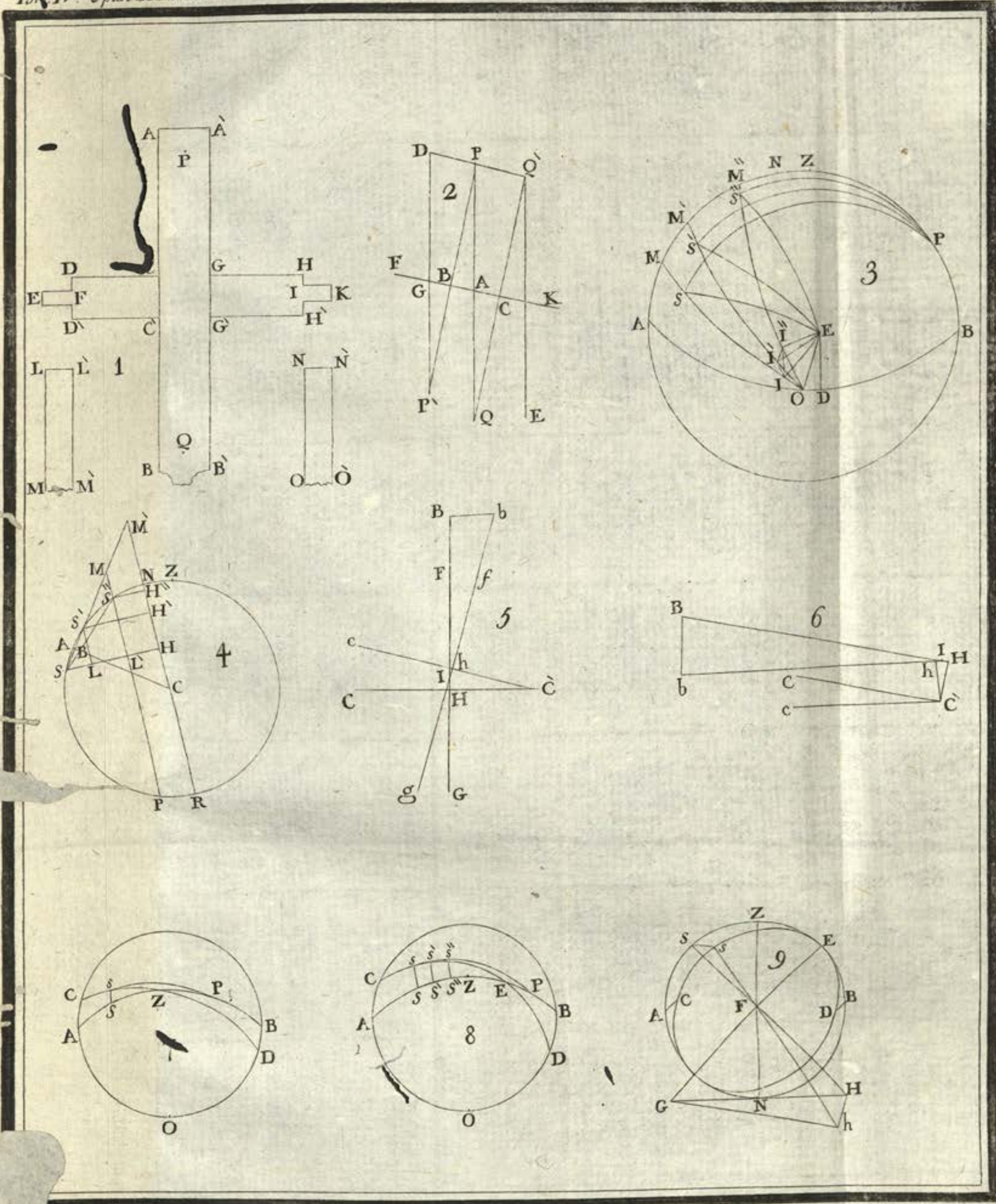

1
P
a
b
A
E
e
B
d
D
C
2
Z
S
P
A
B
E
O
D
F
3
M
N
Z
H
Q
G
P
I
A
B
F
S
E
O
D
4
Z
P
M
A
B
I
E
O
D
5
A
O
F
D
K
B
M
T
P
C
L
G
N
H
I
E
R

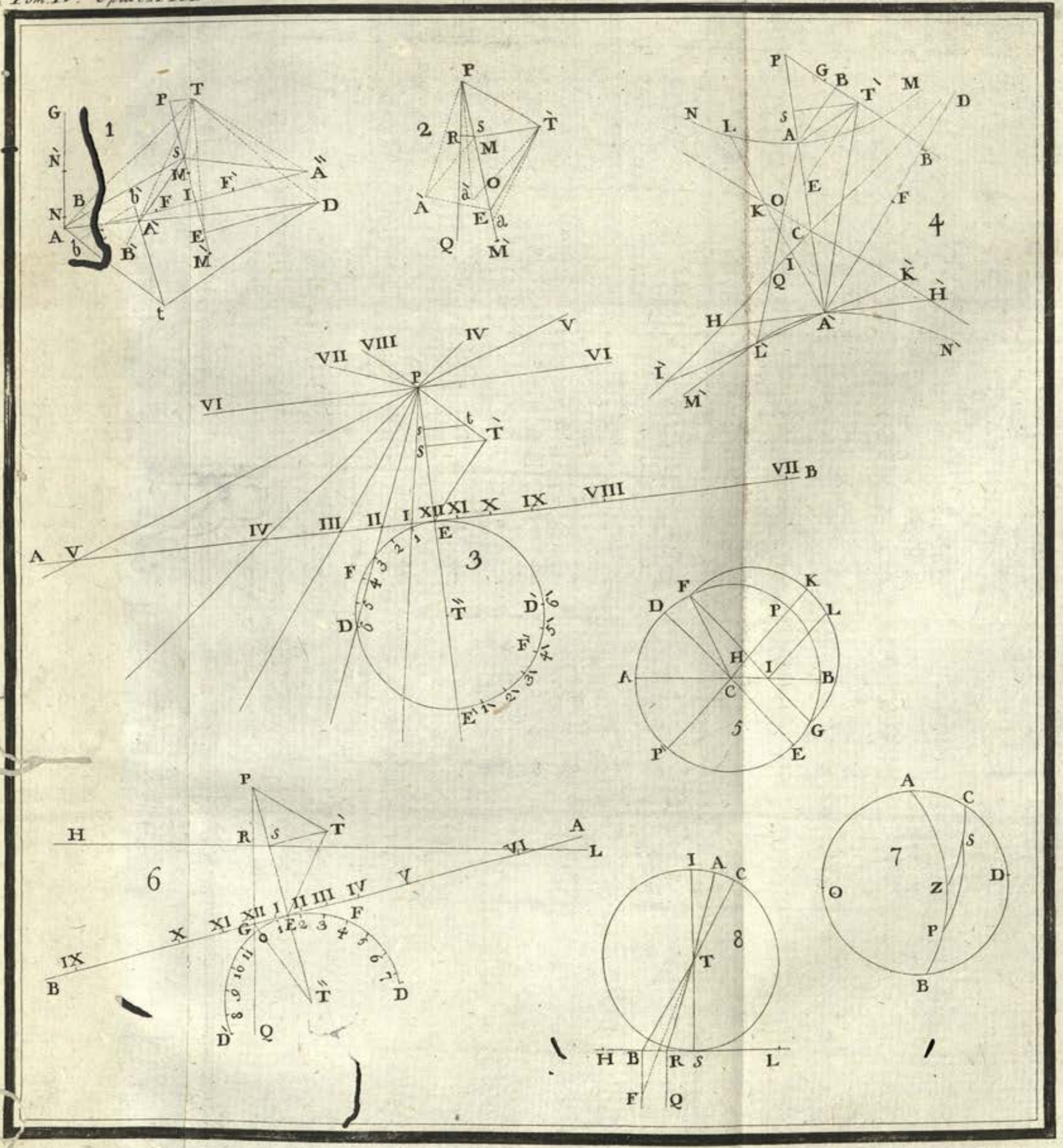

1
2
3
4
5
6
7

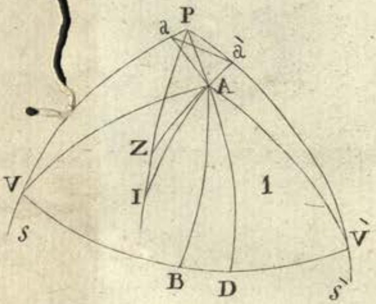

1
A C B N O P R E G D H F Q T S
c c b b d d a a M I I K m n r H
2
A D I D A F F E G G E 5 10 15 a b O O H H B B L M
3
A D M I M F E O N N P P O Q Q A D F E
4
O F H I C E D G B A K L N M
5
P O K C D Q G F A P O B N L A B
6
A B a b E F a b A B
7
M N H K G L C I D E F A B
8
M N H K G L C I D E F R O A B P S T Q
9
N A R P Q M B

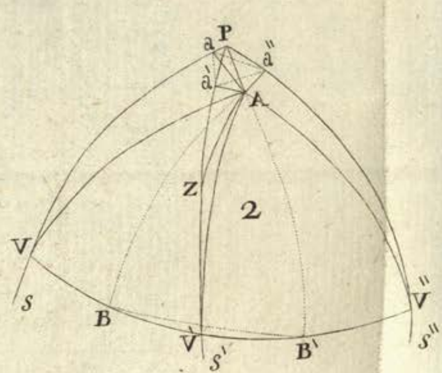

1
2
3
4
5
6
7
C c N p F G O Ö Ö H r Q q A D B E P L T S I V R
M C D E P C̀ D̀ È P̀ N
B M C R S O V R̀ Ò R̀̀ Ò A
B G M C K R H I A Q D E
V O A R C I F M P B D E
C E A H N F G H B I D
B G A D F O L I

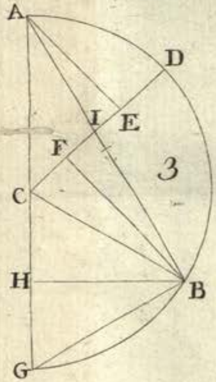

1
A B N C D M
2
A B C D E F
3
A B C D E G H
4
A B B` C D E I I` L a b b`
5
K C L I O A` B` P` G` M N H` Q` A R T B P G D E H Q a r e q t b
6
C I F A D H B P
7
F I C B D G A P

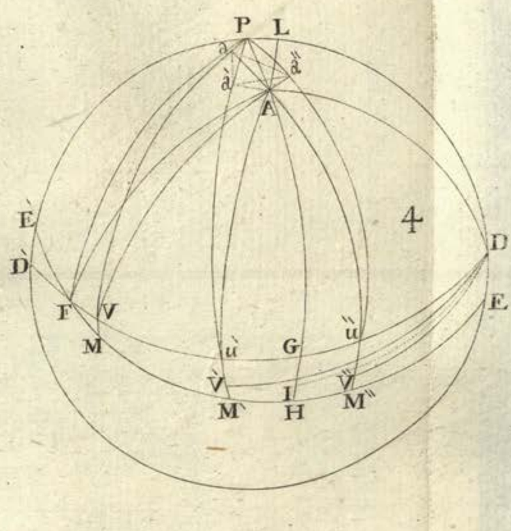

1
2
3
4
5
6
8
9

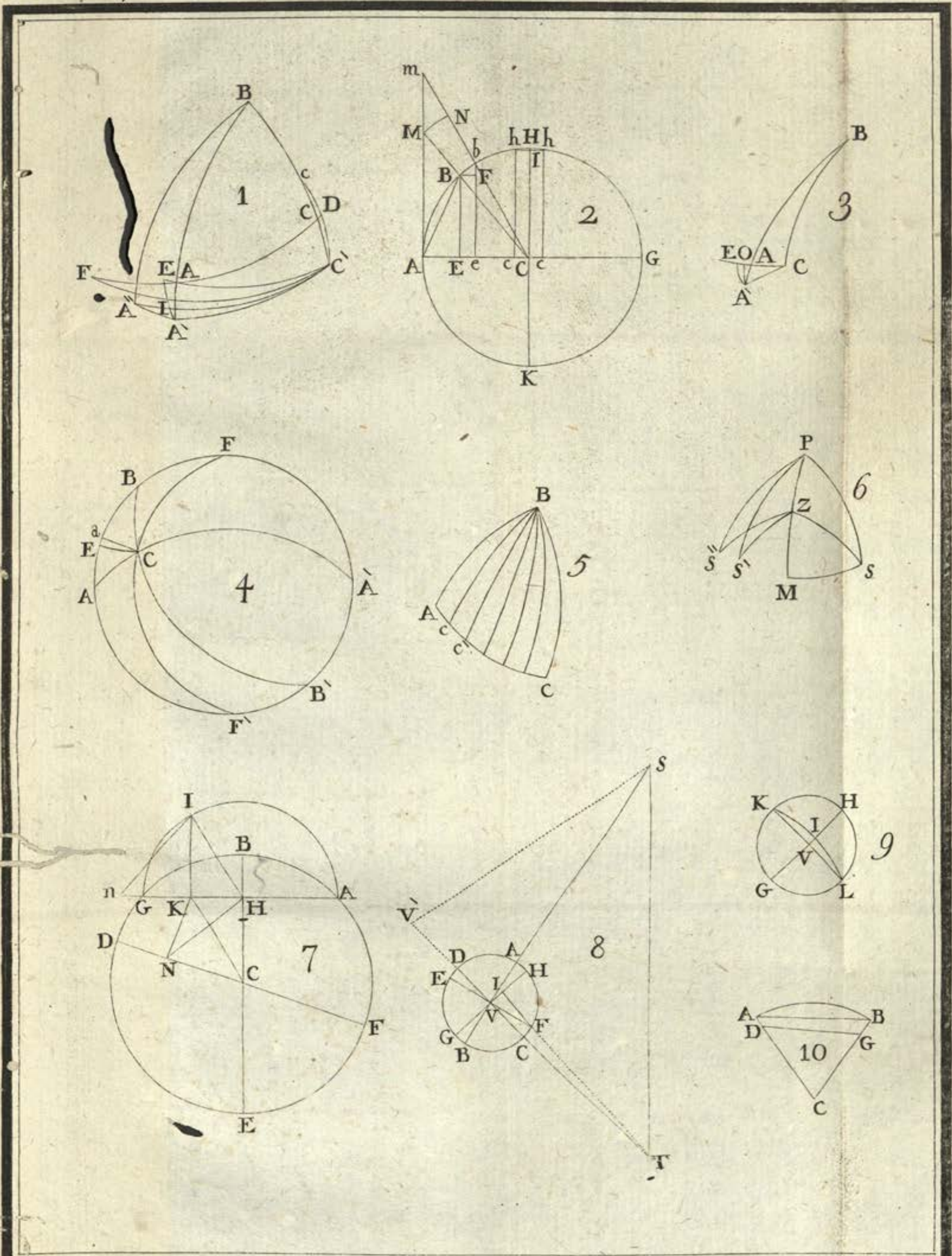

1
2
3
4
5
6
7
8
VI
VII
VIII
IV
V
VI
VII B
VIII
IX
X
XI
XII
I
II
III
IV
A V
IX
X
XI
XII
I
II
III
IV
V
VI
H
R
A
L
B
D
Q
HBRsL
F
Q

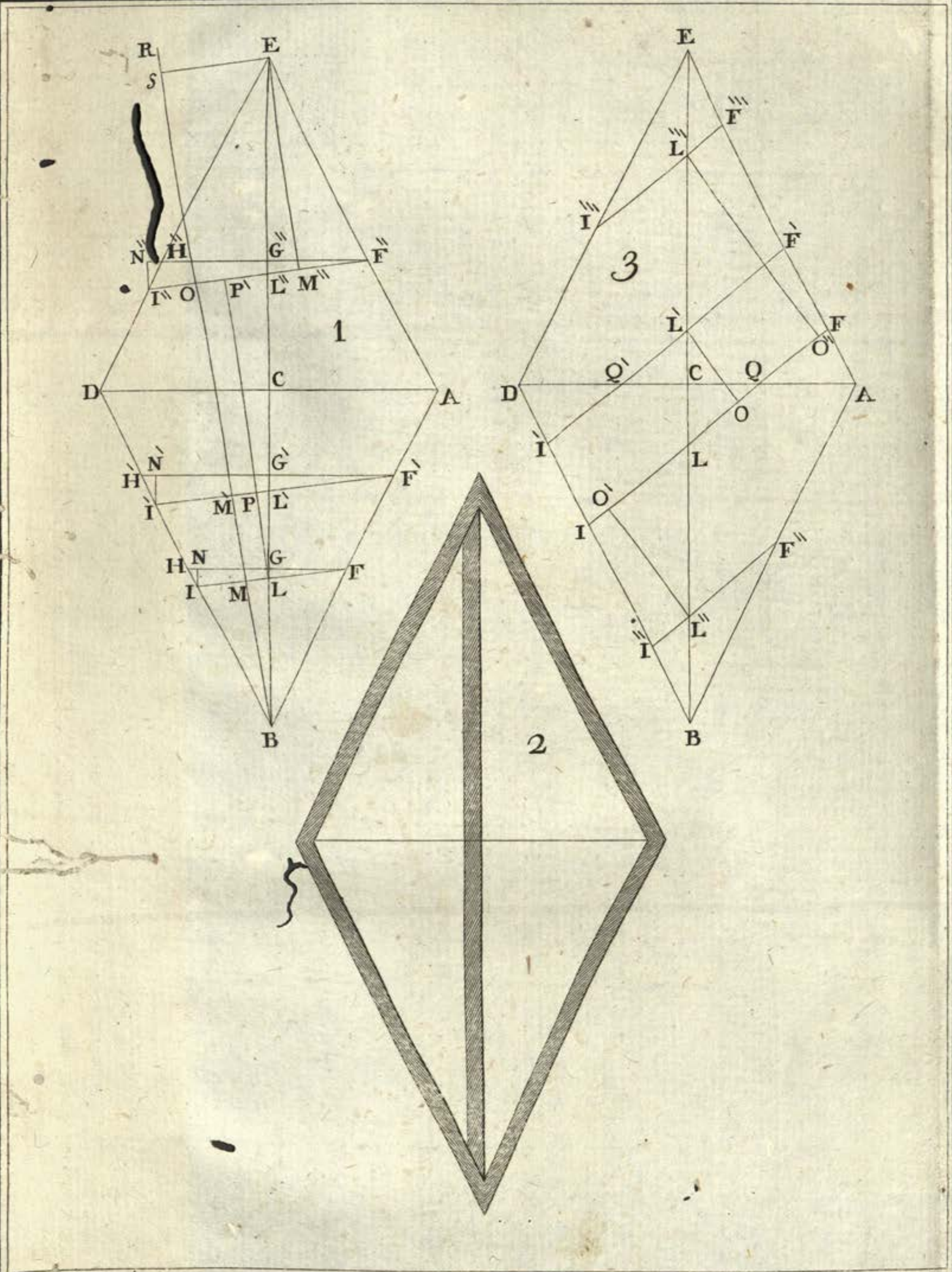

P
a
à
A
Z
I
1
V
S
V̀
B
D
S̀

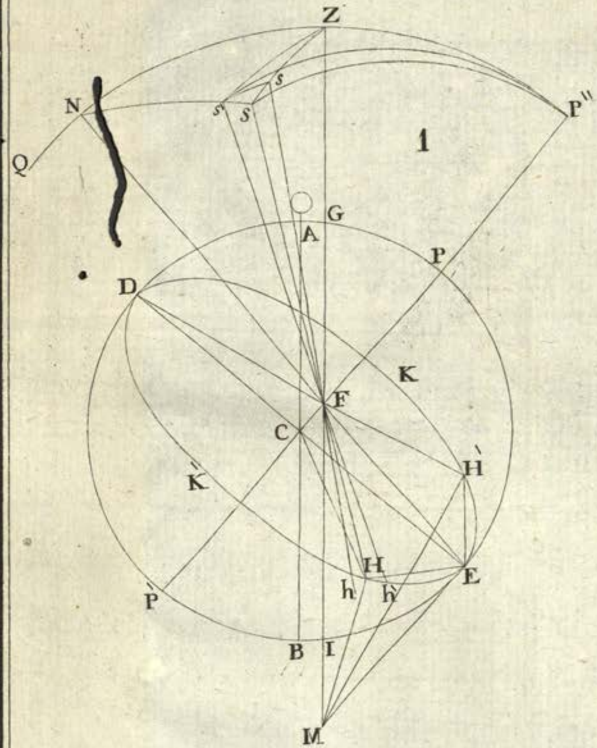

P
a
à
à̈
A
Z
2
V
S
B
V̀
S̀
B̀
V̈
S̈

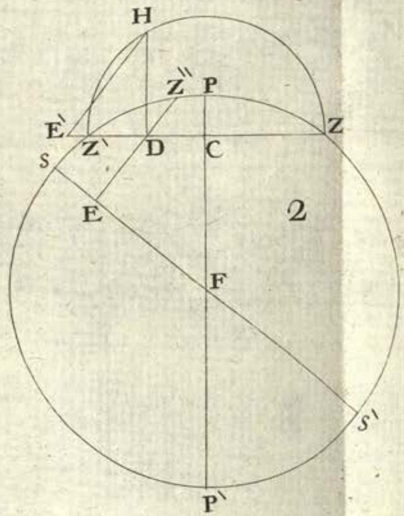

A
D
I
E
F
3
C
H
B
G

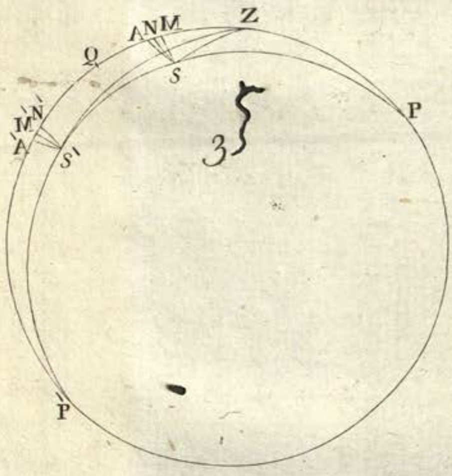

P
L
a
à
à̈
A
4
È
D̀
D
E
F
V
M
ù
G
ü
V̀
I
V̈
M̀
H
M̈

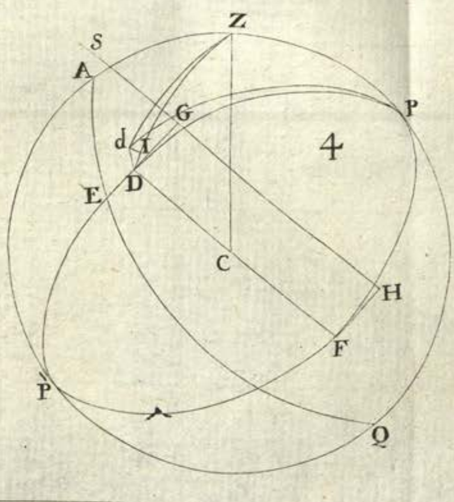

1
B c C D F E A C` A`` L A`
2
m N M b h H h I B F A E e c C c G K
3
B E O A C A`
4
F B a E C A A` B` F`
5
B A c c` C
6
P Z S`` S` S M
7
I B n G K H A D N C F E
8
S V` D A E H I V G B C F T
9
K H I V G L
10
A B D G C

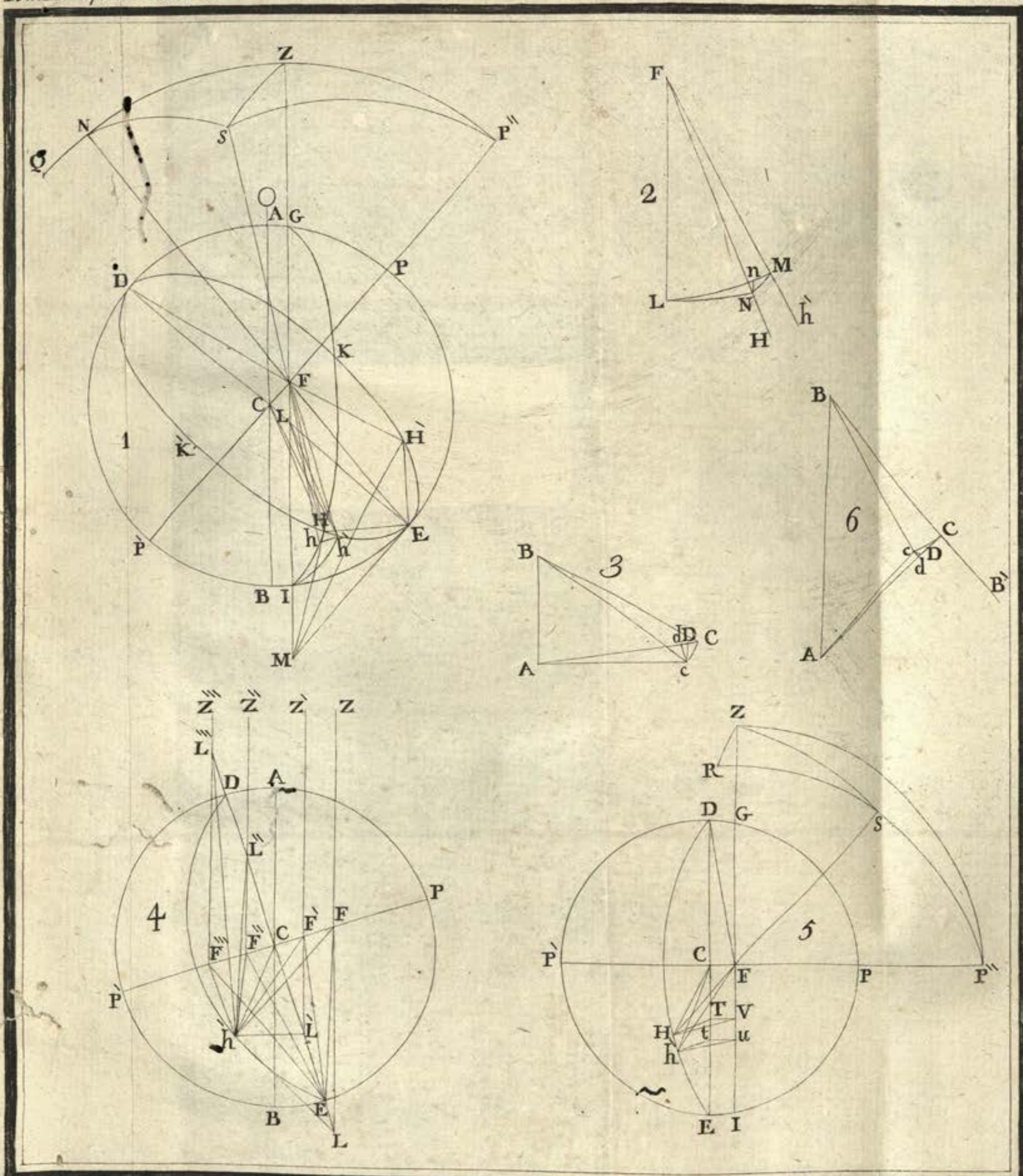

1
2
3
R
S
E
N
H
G
F
I
O
P
L
M
C
D
A
B
Q


Z
s
s
N
s
P''
Q
1
G
A
P
D
K
F
C
H̀
K̀
H
E
h
h̀
P̀
B
I
M


H
Z'' P
È
Z
Z̀
D
C
S
E
2
F
S'
P̀


ANM
Z
Q
S
P
M̀ Ǹ
À
S'
3
P̀


Z
S
A
G
P
d
I
4
D
E
C
H
F
P̀
Q


1
2
3
4
5
6
Z
N
S
Q
A
G
D
P
K
F
C
L
H
E
h
B
I
M
n
c
d
R
T
V
t
u

00049876

Digitized with financial assistance from
Observer Research Foundation
on 17 May, 2019